

MAXSUS UNITAR GRUPPA TA'SIRIGA NISBATAN INVARIANT DIFFERENSIAL RATSIONAL FUNKSIYALAR MAYDONINING HOSIL QILUVCHILARI SISTEMASI

Mo'minov Qobiljon Qodirovich

Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti,
fizika matematika fanlari doktori, professor

Jo'raboyev Saidaxbor Solijonovich

Farg'ona Davlat universiteti o'qituvchisi

Sultonova Barno Razzoqovna

Guliston Davlat universiteti tayanch doktoranti

e.mail: m_muminov@rambler.ru; saidaxbor.juraboyev@mail.ru

Annotatsiya. Ushbu maqolada maxsus unitar grupp ta'siriga nisbatan invariant differensial ratsional funksiyalar maydonining hosil qiluvchilari sistemasini tavsiflash masalasi o'rganilgan

Tayanch so'zlar: maxsus unitar grupp, invariant ko'phad, invariant ratsional funksiya

СИСТЕМА ОБРАЗУЮЩИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ПОЛЯ ИНВАРИАНТНЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ДЕЙСТВИЮ СПЕЦИАЛЬНОЙ УНИТАРНОЙ ГРУППЫ

Муминов Кобилжон Кодирович

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека
Доктор физико-математических наук, профессор

Журабоев Саидахбор Солижонович

Ферганский государственный университет, преподаватель

Султонова Барно Раззоковна

Гулистанский государственный университет, докторант

Аннотация. В данной статье изучается задача описания системы образующих дифференциального поля инвариантных рациональных функций относительно действия специальной унитарной группы.

Ключевые слова: специальная унитарная группа; инвариантный многочлен; инвариантная рациональная функция.

SYSTEM OF GENERATORS OF A DIFFERENTIAL FIELD OF INVARIANT RATIONAL FUNCTIONS WITH RESPECT TO THE ACTION A SPECIAL UNITARY GROUP

Muminov Kobyljon Kodyrovich

National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek,
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor

Juraboyev Saidakhbor Solyjonovich

Fergana State University, teacher

Sultonova Barno Razzokovna

Gulistan State University, doctorant

Annotation. In this article it was be studied the problem of describing a system of generators of a differential field of invariant rational functions with respect to the action of a special unitary group.

Keywords: special unitary group; invariant polynomial; invariant rational function

Kirish.

Aytaylik, V biror bir K maydon ustida aniqlangan chekli o'lchovli vektor fazo bo'lsin. O'zgaruvchilari V fazoga tegishli, koeffitsientlari K ga tegishli bo'lgan barcha ko'phadlar algebrasi $K[V]$ orqali belgilanadi. $GL(V)$ bilan V fazoning barcha teskarilanuvchi chiziqli almashtirishlari gruppasini belgilaymiz. Ixtiyoriy $G \subseteq GL(V)$ qism gruppaning V fazoga ta'sirini σ^x ko'rinishida olamiz, bu yerda $\sigma \in G, x \in V$.

Agar $K[V]$ algebraning $p(x, y, \dots, z)$ elementi va ixtiyoriy $\sigma \in G$ chiziqli almashtirish uchun

$$p(\sigma x, \sigma y, \dots, \sigma z) = p(x, y, \dots, z)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, $p \in K[V]$ ko'phad G -invariant deyiladi, [1].

Barcha, G -invariant ko'phadlar algebrasi $K[V]^G$ ko'rinishida belgilanadi. Tabiiyki bu holda, $K[V]^G \subset K[V]$ munosabat o'rinli.

Ma'lumki, $K[V]^G$ algebraning hosil qiluvchilari sistemasini tiklash va ular orasidagi munosabatlarni aniqlash masalalari invariantlar nazariyasining asosiy klassik masalalari hisoblanadi. Ushbu masalalarni yechimlari mos holda, *birinchi va ikkinchi fundamental teoremlar* deb yuritiladi, [2].

Adabiyotlar tahlili

Yuqorida qo'yilgan masalalarni o'rganishda German Veylning ishlari alohida o'rin tutadi. U o'zining "Klassik gruppalar, ularning invariantlari va tasvirlari" asarida bir qator klassik gruppalar jumladan, *chiziqli, maxsus chiziqli, ortogonal, simplektik gruppalar* uchun birinchi va ikkinchi asosiy teoremlarni isbotlari va ularning tadbirlarini keltirib o'tgan, [1].

Invariantlar nazariyasining asosiy masalalarini differensial analogi bilan respublikamizda J. Xojiyev [3, 4], V.I.Chilin [5], Q.Q. Mo'minov [6, 8], U.Bekbayev [7], R.Aripov [9], R. G'afforov [10] kabi olimlar shug'ullanishgan va *chiziqli, maxsus chiziqli, ortogonal, maxsus ortogonal, psevdoortogonal, simplektik, galiley gruppalari* uchun ijobiy natijalar olishgan.

Bugungi kunda olingan natijalar differensial geometriya, noevklid geometriyasi, kompyuter grafikasi kabi fan tarmoqlarining muhim masalalariga tadbiq qilinib kelinmoqda. Unitar grupp ta'siriga nisbatan invariant ko'phadlar algebrasi uchun birinchi va ikkinchi asosiy teoremlar Maykel Spivakning ishlarida keltirib o'tilgan, [12]. Q. Mo'minov va S. Jo'raboyevning ishlarida qo'yilgan masalalar kvaternion vektor fazolarda qaralgan va simplektik almashtirishlar gruppasiga nisbatan ba'zi muhim natijalar olingan, [13-18].

Ushbu maqolada qo'yilgan masalalarning differensial analogi $G = SU(n, \mathbb{C})$ bo'lgan hol uchun tadqiq qilingan.

Tadqiqot metodologiyasi

$V = \mathbb{C}^n$ - n -o'lchovli kompleks vektor fazo bo'lsin. V fazoning elementlarini n -o'lchovli ustun vektorlar ko'rinishida olamiz, ya'ni $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $x_i \in \mathbb{C}$. V fazoda skalyar ko'paytma

$$(x, y) = \bar{x}_1 y_1 + \bar{x}_2 y_2 + \dots + \bar{x}_n y_n \quad (1)$$

ko'rinishidagi bichiziqli forma orqali berilgan bo'lsin. Ma'lumki, (1) skalyar ko'paytmani o'zida invariant qoldiruvchi chiziqli almashtirishlar gruppasi *unitar grupp* deyiladi va $U(V)$ ko'rinishida belgilanadi, ya'ni

$$U(V) = \{ \sigma \in GL(V) : (\sigma x, \sigma y) = (x, y), x, y \in V \}.$$

Chiziqli algebra kursidan ma'lumki, chekli o'lchovli har qanday vektor fazoning chiziqli almashtirishi chekli tartibli kvadrat matritsa orqali ifodalanadi. U holda, $U(V)$ grupp

$$U(n, \mathbb{C}) = \{ g \in GL(n, \mathbb{C}) : \bar{g}^T g = g \bar{g}^T = E \}$$

gruppaga izomorf bo'ladi, bu yerda $\bar{g}^T$ - g matritsaning kompleks qo'hmasini transponirlangani, E - n -tartibli birlik matritsa. Odatda, $U(n, \mathbb{C})$ grupp ham *unitar grupp* deyiladi. $SU(n, \mathbb{C})$ orqali $U(n, \mathbb{C})$ gruppaning

$$SU(n, \mathbb{C}) = \{ g \in U(n, \mathbb{C}) : \det g = 1 \}$$

ko‘rinishida aniqlanuchi qism gruppasi belgilanadi va *maxsus unitar grupp*a deb ataladi, [11].

Aytaylik, $G \subseteq GL(n, \mathbb{C})$ bo‘lsin. G gruppaning V fazoga ta’siri $g \in G$ matritsani $x \in V$ vektorga o‘ngdan ko‘paytirish orqali aniqlanadi, ya’ni $(g, x) \rightarrow gx$.

$\mathbb{C}[V] = \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ orqali koeffitsientlari $\mathbb{C}$ maydondan olingan $x_1, x_2, \dots, x_n$ o‘zgaruvchili ko‘phadlar halqasini belgilaymiz. Agar $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}[V]$ ko‘phad va $g \in GL(n, \mathbb{C})$ matritsa uchun

$$f(gx_1, gx_2, \dots, gx_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, f ko‘phad G -invariant deyiladi. Barcha G -invariant ko‘phadlar qism halqasini $\mathbb{C}[V]^G$ ko‘rinishida belgilaymiz, [5].

Aytaylik, $\{f_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{C}[V]^G$ G -invariant ko‘phadlar sistemasi bo‘lsin. Agar ixtiyoriy $\varphi \in \mathbb{C}[V]^G$ ko‘phad $\{f_i\}_{i=1}^m$ sistema elementlariga $\mathbb{C}[V]$ halqa amallarini chekli marta qo‘llash orqali hosil bo‘lsa, u holda $\{f_i\}_{i=1}^m$ sistema $\mathbb{C}[V]^G$ halqaning hosil qiluvchilari sistemasi deyiladi, [3]. Quyidagi teoremda, $G = SU(n, \mathbb{C})$ bo‘lgan hol uchun $\mathbb{C}[V]^G$ halqaning hosil qiluvchilari sistemasi ko‘rsatilgan.

1-teorema. $f : \mathbb{C}^n \times \dots \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ komponentlari $\mathbb{C}^n$ fazoning vektorlari va ularning kompleks qo‘shmalaridan iborat $SU(n, \mathbb{C})$ -invariant funksiya bo‘lsin. U holda, f funksiya (x_i, x_j) skalyar ko‘paytma, $[x_1, \dots, x_n]$ determinant va uning kompleks qo‘shmasini ko‘phadi ko‘rinishida ifodalanadi, ([12] 13 bob 64-teorema).

Ish davomida 1-teoremaning differensial analogini keltirib chiqaramiz.

Asosiy natijalar

Quyida, sanoqli sondagi

$$x_1, \dots, x_n, x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}, \dots, x_1^{(r)}, \dots, x_n^{(r)}, \dots$$

o'zgaruvchilarning kompleks sonlar maydoni ustida aniqlangan barcha ko'phadlar halqasi berilgan bo'lsin. Odatda bunday halqa $\mathbb{C}\{x\}$ ko'rinishida belgilanadi [mo'minov], ya'ni

$$\mathbb{C}\{x\} = \mathbb{C}\left\{x_1, \dots, x_n, x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}, \dots, x_1^{(r)}, \dots, x_n^{(r)}, \dots\right\}.$$

$\mathbb{C}\{x\}$ halqada quyidagi,

$$d(x_j^{(r)}) = (x_j^{(r+1)}), \quad x_j^{(0)} = x_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad r \in \mathbb{Z}_0^+$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $d : \mathbb{C}\{x\} \rightarrow \mathbb{C}\{x\}$ amalni qaraymiz. Ma'lumki [8], d - amalni $\mathbb{C}\{x\}$ halqa differensialigacha bir qiymatli davom etdirish mumkin, bunday halqa *differensial halqa* (qisqacha d -halqa), uning elementlari esa *differensial ko'phadlar* (d -ko'phadlar) deyiladi. Ma'lumki, $\mathbb{C}\{x\}$ butunlik sohasini ifodalaydi. Shuningdek, $\mathbb{C}\{x\}$ halqaning d -differensialini maydon munosabatlarini differensiallarigacha mos holda yagona ko'rinishda davom etdirish mumkin. Bunday maydon $\mathbb{C}\langle x \rangle$ ko'rinishida belgilanadi va $\mathbb{C}\{x\}$ d -halqaning *nisbatlari maydonini* ifodalaydi. $\mathbb{C}\langle x \rangle$ d -maydonning elementlari esa *differensial ratsional funksiyalar* (d -ratsional funksiyalar) deyiladi va $f\langle x \rangle$ ko'rinishida belgilanadi, [3].

Agar ixtiyoriy $g \in G$ uchun $f\{x\} = f\{gx\}$ (mos holda $f\langle x \rangle = f\langle gx \rangle$) shart o'rinli bo'lsa, u xolda $f\{x\} \in \mathbb{C}\{x\}$ (mos holda $f\langle x \rangle \in \mathbb{C}\langle x \rangle$) d -ko'phad (d -ratsional funksiya) G -invariant deyiladi, [5].

Barcha G -invariant d -ko'phadlar halqasi $\mathbb{C}\{x\}^G$ (mos holda G -invariant d -ratsional funksiyalar maydoni $\mathbb{C}\langle x \rangle^G$) ko'rinishida belgilanadi.

Agar ixtiyoriy $f\langle x \rangle \in \mathbb{C}\langle x \rangle^G$ element $\Sigma = \{\alpha_i, i \in T\} \subset \mathbb{C}\langle x, \bar{x} \rangle^G$ sistemaning chekli sondagi elementlariga $\mathbb{C}\langle x \rangle^G$ d -maydon amallarini chekli marta qo'llash orqali hosil qilinsa Σ sistema $\mathbb{C}\langle x \rangle^G$ d -maydonning *hosil qiluvchilari sistemasi* deyiladi, [5].

Quyida, $G = SU(n, \mathbb{C})$ bo'lgan hol uchun $\mathbb{C}\langle x \rangle^G$ d -maydonining hosil qiluvchilari sistemasini tiklash masalasini o'rganamiz. Ma'lumki [3], bu hol uchun d -ratsional funksiya va d -ko'phad tushunchalari yetarli emas. Shuning uchun differensial ko'phad va differensial ratsional funksiya tushunchalarini yetarlicha kengaytiramiz va ular bilan bog'liq differensial $\ast$ -algebra va differensial $\ast$ -maydon tushunchalarini kiritamiz.

Ta'rif. *Differensial $\ast$ -halqa (differensial $\ast$ -maydon) deb quyidagi hossalari o'rinli bo'lgan $\ast: A \rightarrow A$ amalli A differensial halqaga (maydonga) aytiladi:*

- 1) $(a^\ast)^\ast = a, \forall a \in A;$
- 2) $(ab)^\ast = a^\ast b^\ast, \forall a, b \in A;$
- 3) $(a')^\ast = (a^\ast)', \forall a \in A.$

A ning differensial qismhalqasi $\ast$ amalga nisbatan yopiq bo'lsa, *differensial $\ast$ -qismhalqa* deyiladi, [3].

Chekli sondagi differensial o'zgaruvchilarning differensial $\ast$ -ko'phadi va differensial $\ast$ -ratsional funksiyasi odatdagi ko'rinishda ta'riflanadi.

Quyida A differensial $\ast$ -halqa sifatida $\mathbb{C}\{x\}$ halqani qaraymiz. Tabiiyki, bu holda " $\ast$ " amal kompleks qo'shma amali bilan ustma-ust tushadi. Shunga asosan quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$f\{x\} \sim f\{x, \bar{x}\}, \quad f\langle x \rangle \sim f\langle x, \bar{x} \rangle, \quad \mathbb{C}\{x\} \sim \mathbb{C}\{x, \bar{x}\}, \quad \mathbb{C}\langle x \rangle \sim \mathbb{C}\langle x, \bar{x} \rangle.$$

bu yerda $\bar{x} - x \in V$ vektorni kompleks qo'shmasi.

Bizga $\mathbb{C}\langle x, \bar{x} \rangle^G$ d -ratsional funksiyalar maydoni berilgan bo'lsin.

2-toerema. $\mathbb{C}\langle x, \bar{x} \rangle^G$ d -ratsional funksiyalar maydonining har qanday elementi G -invariant d -ko'phadlarning nisbati ko'rinishida ifodalanadi.

2-teorema isboti [3] adabiyotda keltirib o'tilgan.

3-teorema. $G = SU(n, \mathbb{C})$ bo'lsin. U holda, $\mathbb{C}\langle x, \bar{x} \rangle^G$ d -ratsional funksiyalar maydonining xar bir elementi

$$(\bar{x}^{(i)}, x^{(j)}) = \bar{x}_1^{(i)} x_1^{(j)} + \bar{x}_2^{(i)} x_2^{(j)} + \dots + \bar{x}_n^{(i)} x_n^{(j)} \quad (2)$$

$$[x^{(i_1)}, x^{(i_2)}, \dots, x^{(i_n)}] = \begin{vmatrix} x_1^{(i_1)} & x_1^{(i_2)} & \dots & x_1^{(i_n)} \\ x_2^{(i_1)} & x_2^{(i_2)} & \dots & x_2^{(i_n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{(i_1)} & x_n^{(i_2)} & \dots & x_n^{(i_n)} \end{vmatrix} \quad (3)$$

ko'rinishidagi G - invariant d -ko'phadlarga $\mathbb{C}\langle x, \bar{x} \rangle^G$ d -maydonning operatsiyalarini chekli marta qo'llash yordamida hosil qilinadi.

3-teorema 1-teoremaning differensial analogini ifodalaydi.

2- va 3- toremalarning natijalariga asosan $\mathbb{C}\langle x, \bar{x} \rangle^{SU(n, \mathbb{C})}$ d -maydonning hosil qiluvchilarini (2) va (3) tengliklar bilan berilgan $SU(n, \mathbb{C})$ -invariant ko'phadlar ko'rinishida qidiramiz. Quyida ushbu *elementlar sonini minimallashtirish masalasini* qaraymiz. Buning uchun $\mathbb{C}\langle x, \bar{x} \rangle^G$ d -ratsional maydonda aniqlangan amallar bilan birgalikda quyidagi ayniyatlardan foydalanamiz:

1°. $\overline{(x^{(i)}, x^{(j)})} = (x^{(j)}, x^{(i)})$, bu yerda $\bar{p}\{x, \bar{x}\}$ ifoda $p\{x, \bar{x}\}$ ko'phadni kompleks qo'shmasi ma'nosini anglatadi.

2°. $d(x^{(i)}, x^{(j)}) = (x^{(i+1)}, x^{(j)}) + (x^{(i)}, x^{(j+1)})$, bu yerda d -amal differensiallash amali.

3°.

$$[\bar{x}^{(i_1)}, \bar{x}^{(i_2)}, \dots, \bar{x}^{(i_n)}][x^{(i_1)}, x^{(i_2)}, \dots, x^{(i_n)}] = \begin{vmatrix} (x^{(i_1)}, x^{(i_1)}) & (x^{(i_1)}, x^{(i_2)}) & \dots & (x^{(i_1)}, x^{(i_n)}) \\ (x^{(i_2)}, x^{(i_1)}) & (x^{(i_2)}, x^{(i_2)}) & \dots & (x^{(i_2)}, x^{(i_n)}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (x^{(i_n)}, x^{(i_1)}) & (x^{(i_n)}, x^{(i_2)}) & \dots & (x^{(i_n)}, x^{(i_n)}) \end{vmatrix}$$

$$4^{\circ}. d\left([x^{(i_1)}, x^{(i_2)}, \dots, x^{(i_n)}]\right) = [x^{(i_1+1)}, x^{(i_2)}, \dots, x^{(i_n)}] + \dots + [x^{(i_1)}, x^{(i_2)}, \dots, x^{(i_n+1)}].$$

Yuqoridagi ayniyatlarni to'g'ridan-to'g'ri xisoblash orqali isbotlash mumkin. Ularning umumiy holdagi ko'rinishlari [1], [3] adabiyotlarda berilgan va isbotlangan.

Minimallashtirish masalasini yechishimiz uchun, 3-teoremaga asosan barcha (2) va (3) ko'rinishidagi G -invariant d -ko'phadlarni ma'lum sistema elementlari orqali d -ratsional ifodalanishini ko'rsatishimiz yetarli. Buning uchun quyidagi lemmalar va ularning natijalaridan foydalanamiz:

1-lemma. *Barcha $(x^{(i)}, x^{(j)})$ ko'rinishidagi G -invariant differensial ko'phadlar ixtiyoriy $i, j \in \mathbb{Z}_0^+$ uchun*

$$(x^{(l)}, x^{(l)}), (x^{(l)}, x^{(l+1)}), l \leq \left\lfloor \frac{i+j}{2} \right\rfloor \quad (5)$$

G -invariant differensial ko'phadlar orqali d -butun ratsional ifodalanadi, bu yerda $\left\lfloor \cdot \right\rfloor$ - sonning butun qismi.

1-lemma 1-ayniyatni e'tiborga olgan holda $h = j - i$ ayirmaga matematik induksiya metodini tadbiiq qilish orqali isbotlanadi.

2-lemma. (5) sistema elementlari (4) sistema elementlari va $[x^{(l-n+1)}, x^{(l-n+2)}, \dots, x^{(l)}]$ G -invariant d -ko'phad orqali d -ratsional ifodalanadi, bu yerda $l \geq n - 1, n \in \mathbb{N}$.

Lemmani isbotlashda 1-3 ayniyatlar va 1-lemmani natijalaridan foydalangan holda, l parametrni qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlariga nisbatan matematik induksiya metodini qo'llash orqali isbotlanadi.

3-lemma. $[x^{(i_1)}, x^{(i_2)}, \dots, x^{(i_n)}]$ G -invariant d -ko'phadlar (4) sistema elementlari orqali d -ratsional ifodalanadi.

3-lemma ham 1-3 ayniyatlar va 1-2 lemmalarning natijalarini e'tiborga olgan holda $i_1, i_2, \dots, i_n$ -hosilalarni qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlariga matematik induksiya metodini qo'llash orqali isbotlanadi.

Yuqoridagi lemmalarning natijalaridan quyidagi teorema ega bo'lamiz.

4-teorema. $\mathbb{C} \langle x, \bar{x} \rangle^{SU(n, \mathbb{C})}$ *d-ratsional funksiyalar maydonining ixtiyoriy elementi*

$$1) (x^{(i)}, x^{(i)}) = \bar{x}_1^{(i)} x_1^{(i)} + \bar{x}_2^{(i)} x_2^{(i)} + \dots + \bar{x}_n^{(i)} x_n^{(i)};$$

$$2) (x^{(i)}, x^{(i+1)}) = \bar{x}_1^{(i)} x_1^{(i+1)} + \bar{x}_2^{(i)} x_2^{(i+1)} + \dots + \bar{x}_n^{(i)} x_n^{(i+1)};$$

$$3) [x, x^{(1)}, \dots, x^{(n-1)}] = \begin{vmatrix} x_1 & x_1^{(1)} & \dots & x_1^{(n-1)} \\ x_2 & x_2^{(1)} & \dots & x_2^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_n & x_n^{(1)} & \dots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

ko'rinishidagi G - invariant d -ko'phadlarga d -maydon operatsiyalarini va kompleks qo'shma amallarini chekli marta qo'llash orqali hosil qilinadi, bu yerda $i = \overline{0, n-2}$.

Yuqoridagi teorema $n=2$ bo'lgan hol uchun J. Xojiyev va A.M. Suktayevalar tomonidan isbotlangan, [3].

Xulosa

Xulosa o'rnida shuni aytishimiz mumkinki, $SU(n, \mathbb{C})$ -invariant differensial ratsional funksiyalar maydoni chekli hosil qiluvchilarga ega va ularni soni $2n-1$ dan ko'p emas.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati

1. Weyl H. *The Classical Groups. Their Invariants and Representations* / Princeton Univ. Press, 1997
2. Э. Б. Винберг, В. Л. Попов. *Теория инвариантов* // –Итоги науки техн. ВИНТИ, Соврем, пробл. матем. Фундам. направл.1989. – 55, – с. 137–309
3. Хаджиев Дж. *Приложение теории инвариантов к дифференциальной геометрии кривых* / Ташкент: ФАН. 1988. 136 с.
4. Dj. Khadjiyev, I. Oren, O. Peksen *Generating systems of differential invariants and the theorem on existence for curves in the pseudo-Euclidean geometry*, // Turkish Journal of Mathematics, 37 (2013), 80-94.
5. Муминов К.К., Чилин В.И. *Эквивалентность кривых в конечномерных пространствах* / LAP LAMBERT Academic Publishing. Deutschland (Германия). 2015.
6. Muminov K. K., *Equivalence of paths with respect to the action of a symplectic group* // Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., – 2002– Number 7–p. 27–38.
7. Muminov K.K., Bekboev U.D. *On differential rational invariants of classical movements groups of vector spaces* // Methods of Functional Analysis and Topology, (MFAT). Ukraine, Kiev. 2004. Vol. 10, № 3. -P. 7-10
8. K.K. Muminov, I.V. Chilin. *A transcendence basis in the differential field of invariants of pseudo-Galilean group* // Russian Mathematics, 63(3), (2019) p.15-24.
9. Арипов Р.Г., Хаджиев Дж. *Полная система глобальных дифференциальных и интегральных инвариантов кривой в евклидовой геометрии* / Известия ВУЗов. Математика., 2007, (542). С. 1-14.
10. Муминов К.К., Гаффоров Р.А. *Эквивалентность путей в некоторой неевклидовой геометрии* // Вестник КРАУНЦ. Физ-мат. Науки, 2022 Т.40. №3. С. 28-41.
11. Кострикин А.И., Манин Ю.И. *Линейная алгебра и геометрия* / М.: Наука, 1986. -303 с
12. Michael Spivak *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry Volume Five Third Edition* / PUBLISH OR PERISH, INC. Houston, Texas 1999 P. 475.
13. Muminov K.K and Juraboyev S.S, *The system of d-generators of d-skew field of $Sp(n)$ -invariant d-rational functions* // International Journal of Applied Mathematics 35(6), (2022), pp.903-921.

14. Muminov K.K and Jurabayev S.S, Equivalence of Paths under the Action of the Real Representation of $Sp(n)$ // Journal of Applied Mathematics and Physics 10, (2022), pp.1837-1858.
15. Muminov K.K and Jurabayev S.S, Equivalence of paths with respect to the action of the group $Sp(n)$ // AIP Conference Proceedings 2781, 020040 (2023).
16. К. К. Муминов и С.С. Журабоев, Эквивалентность путей относительно действия специальной унитарной группы // Вестник НУУз 2/1, (2017), с.146-150.
17. Juraboyev S.S, The problem of describing the generators of a differential field of invariant differential rational functions with respect to the action of the group of real representations of symplectic transformations in a quaternion space // Bull. Inst. Math 5(3), (2022), pp.151-165.
18. Jo'raboyev S. S. $Sp(n)$ gruppining kompleks tasvirlari gruppasi uchun invariantlar nazariyasining birinchi asosiy teoremasi // Qar.DU xabarlari 3/1 (59), 2023, 28-34 b.