

АНАЛОГ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ

Окбоев Акмалжон Бахромжонович, PhD,

akmaljon12012@gmail.com

Институт математики имени В.И.Романовского АН РУз,

Ташкент, Узбекистан

Аннотация. В работе исследована задача Трикоми для уравнения парабола-гиперболического типа в смешанной области. Параболическая часть рассматриваемого уравнения состоит из дробной производной по Риману-Лиувиллю, а гиперболическая часть состоит из вырождающегося гиперболического уравнения второго рода. Решение поставленной задачи в гиперболической подобласти найдено как решение задачи Коши, а в параболической подобласти - как решение первой краевой задачи. Для доказательства существования решения задачи используется теория интегральных уравнений Вольтерра второго рода.

Ключевые слова: Уравнение парабола-гиперболического типа, смешанная область, задача Трикоми, задача Коши, первая краевая задача.

KASR TARTIBLI RIMAN-LIUUVIL HOSILASI IHTIROK ETGAN ARALASH TIPDAGI TENGLAMA UCHUN TRIKOMI MASASI ANALOGI.

Oqboyev Akmaljon Baxromjonovich, PhD,

akmaljon12012@gmail.com

O'zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasi V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti,

Toshkent, O'zbekiston

Annotatsiya. Ushbu ishda aralash sohada parabol-giperbolik tipdagi tenglama uchun Tricomi masalasi o'rganilgan. Ko'rib chiqilayotgan tenglamaning parabolik qismi Riman-Liouvil kasr tartibli hosilasi qatnashgan tenglmadan, giperbolik qismi esa ikkinchi turdagi buziladigan giperbolik tenglamadan iborat. Giperbolik sohada qo'yilgan masalaning yechimi Koshi masalasining yechimi sifatida, parabolik sohada esa birinchi chegaraviy masala yechimi sifatida qidirilgan. Masalaning yechimi mavjudligini isbotlash uchun ikkinchi turdagi Volterra integral tenglamalari nazariyasi qo'llaniladi.

Kalit so'zlar: Parabol-giperbolik tipdagi tenglama, aralash soha, Triкоми masalasi, Koshi masalasi, birinchi chegaraviy masala.

UDC: 517.95

AN ANALOG OF THE TRICOMI PROBLEM FOR A MIXED TYPE EQUATION WITH RIEMANN-LIOUVILLE FRACTIONAL DERIVATIVE

Akmaljon Okboev Bakhromjonovich, PhD,

akmaljon12012@gmail.com

V.I. Romanovskii Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences,

Tashkent, Uzbekistan

Abstract. In this article, the Tricomi problem for a parabolic-hyperbolic type equation in a mixed domain is investigated. Riemann-Liouville fractional derivative participates in the parabolic part of the considered equation,

and the hyperbolic part consists of a degenerate hyperbolic equation of the second kind. The solution of the problem in the hyperbolic sub-domain is found as a solution to the Cauchy problem, and in a parabolic sub-domain as a solution to the first boundary value problem. For proving the existence of the solution of the problem, the theory of second kind Volterra integral equations is used.

Key words: parabolic-hyperbolic type equation, mixed domain, Tricomi problem, Cauchy problem, first boundary value problem.

Введение. В этой работе в области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup AB$ для уравнения

$$0 = \begin{cases} L_1(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - D_{0y}^\delta u - \lambda^2 u, & (x, y) \in \Omega_1, \\ L_{\alpha, \lambda}(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial y} - \lambda^2 u, & (x, y) \in \Omega_2 \end{cases} \quad (1)$$

сформулируем и исследуем задачи Трикоми, где Ω_1 -область, ограниченная при $y > 0$ отрезками $AB, BB_0, A_0 B_0, AA_0$ прямых $y = 0, x = 1, y = 1, x = 0$ соответственно, Ω_2 - область, ограниченная при $y < 0$ дугами AC, BC, AB характеристик $x - 2\sqrt{-y} = 0, x + 2\sqrt{-y} = 1, y = 0$ уравнения (1), $\delta \in (0, 1)$, $\alpha \in (-1/2, 0)$, а λ - действительное или чисто мнимое число, $D_{0x}^\alpha \varphi(x)$ - интегро-дифференциальный оператор порядка α в смысле Римана-Лиувилля

$$D_{0x}^\alpha \varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^x \frac{\varphi(t) dt}{(x-t)^{\alpha+1}}, & \alpha < 0, \\ \varphi(x), & \alpha = 0, \\ \frac{d^n}{dx^n} D_{0x}^{\alpha-n} \varphi(x), & \alpha > 0. \end{cases}$$

Постановка задачи

Определение 1. Регулярным в области Ω_1 решением уравнения (1), называется функция $u(x, y)$, удовлетворяющая в области Ω_1 уравнению (1) и следующим условиям $D_{0y}^{\delta-1} u(x, y) \in C(\overline{\Omega_1}), u_{xx}(x, y), D_{0y}^\delta u(x, y) \in C(\Omega_1)$.

Задача T_0 . Требуется определить функцию $u(x, y)$, обладающую следующими свойствами: а) $u(x, y)$ является регулярным решением уравнения (1) в области Ω_1 и решением класса R_{00}^λ в области Ω_2 ; б) на линии вырождения выполняется условие склеивания

$$\lim_{y \rightarrow -0} u(x, y) = \lim_{y \rightarrow +0} y^{1-\delta} u(x, y), \quad 0 \leq x \leq 1;$$

$$\lim_{y \rightarrow -0} (-y)^\alpha \frac{\partial}{\partial y} [u(x, y) - A_\alpha(\tau, \lambda)] = \lim_{y \rightarrow +0} y^{1-\delta} \frac{\partial}{\partial y} [y^{1-\delta} u(x, y)], \quad 0 < x < 1;$$

в) на границе области Ω удовлетворяет граничным условиям

$$u|_{AA_0} = \varphi_0(y), \quad u|_{BB_0} = \varphi_1(y), \quad 0 \leq y \leq 1; \quad (2)$$

$$u|_{AC} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1/2, \quad (3)$$

где $A_\alpha(\tau, \lambda)$ – определяется формулой

$$A_\alpha(\tau, \lambda) = J_1^1 \int_0^1 \tau(\xi) [z(1-z)]^\beta \bar{J}_\beta(\sigma) dz + \frac{8J_1^1 y}{(1+\beta)(1+2\beta)} \times$$

$$\times \int_0^1 \left(\lambda^2 - \frac{d^2}{d\xi^2} \right) \tau(\xi) [z(1-z)]^{1+\beta} \bar{J}_{1+\beta}(\sigma) dz,$$

$$J_1^1 = \Gamma(1+2\alpha) / \Gamma^2(1/2 + \alpha), \quad \sigma = 4\lambda \sqrt{-yz(1-z)}, \quad \xi = x - 2\sqrt{-y}(1-2z), \quad \tau(x) = u(x, -0),$$

$J_g(z)$ – функция Бесселя первого рода, $\bar{J}_g(z) = G(g+1)(z/2)^{-g} J_g(z)$, т.е.

$$\bar{J}_g(z) = G(g+1) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (z/2)^{2m}}{m! G(m+g+1)}, \quad g^1 = 1, -2, -3, \dots,$$

а $\varphi_0(y), \varphi_1(y)$ и $\psi(x)$ –

заданные непрерывные функции.

Отметим, что Н.К.Мамадалиев [1, 2] исследовал различные задачи для уравнения (1) при различных значениях α , когда $\delta=1$, $\lambda=0$. В работе [3] изучено нелокальная краевая задача для уравнения (1) при $\alpha = \alpha_0 - n, \alpha_0 \in (1/2, 1), n = 2, 3, \dots$ и $\delta=1$. В работе [4] поставлена и исследована задача Трикоми для уравнения (1) при $\alpha = \alpha_0 - n, \alpha_0 \in (1/2, 1), n = 2, 3, \dots$ и $\delta=1$.

Свойства некоторых операторов с функциями Бесселя в ядрах.

Рассмотрим следующие интегральные операторы [5]:

$$A_{k\lambda}^{1,\lambda} [g(x)] = g(x) - \int_k^x g(t) \frac{t-k}{x-k} \frac{\partial}{\partial t} J_0 \left[\lambda \sqrt{(x-k)(x-t)} \right] dt, \quad (4)$$

$$B_{kx}^{1,\lambda} [g(x)] = g(x) + \int_k^x (t) \frac{\partial}{\partial x} J_0 \left[\lambda \sqrt{(k-t)(x-t)} \right] dt. \quad (5)$$

Свойство 1. Если $g(x) \in C(0,1) \cap L_1[0,1]$, то выражения $A_{kx}^{1,\lambda} [g(x)]$ и $B_{kx}^{1,\lambda} [g(x)]$ будут определены в $(0,1)$ и принадлежат классу $C(0,1)$.

Справедлива следующая теорема и лемма:

Теорема 1[5]. Если $g(x) \in C[0,1]$, то для любых $k \in [0,1]$ и $x \in (0,1)$ справедливы следующие равенства: $A_{kx}^{1,\lambda} B_{kx}^{1,\lambda} [g(x)] = g(x)$, $B_{kx}^{1,\lambda} A_{kx}^{1,\lambda} [g(x)] = g(x)$, т.е. в классе непрерывных на $[0,1]$ функций операторы (4) и (5) являются взаимно обратными.

Лемма 1[5]. При $\beta < 1$ и $x \in [0,1]$ справедливы равенства

$$\int_0^x (x-t)^{-\beta} \bar{J}_{-\beta} \left[\lambda \sqrt{t(x-t)} \right] g(t) dt = \Gamma(1-\beta) D_{0x}^{\beta-1} \left[B_{0x}^{1,\lambda} [g(x)] \right], \quad (6)$$

$$\int_x^1 (t-x)^{-\beta} \bar{J}_{-\beta} \left[\lambda \sqrt{(t-x)(1-t)} \right] g(t) dt = \Gamma(1-\beta) D_{x1}^{\beta-1} \left[B_{x1}^{1,\lambda} [g(x)] \right].$$

Исследование задачи T_0

Рассмотрим уравнение (1) в области Ω_2 , т.е. рассмотрим уравнение $L_{\alpha,\lambda}(u) = 0$. Непрерывное в $\bar{\Omega}_2$ решение видоизмененной задачи Коши для уравнения $L_{\alpha,\lambda}(u) = 0$, с начальными данными

$$u(x, y)|_{y=0} = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq 1; \quad (7)$$

$$\lim_{y \rightarrow +0} (-y)^\alpha (\partial / \partial y) [u - A_\alpha^-(\tau, \lambda)] = \nu(x), \quad 0 < x < 1, \quad (8)$$

в характеристических переменных $\xi = x - 2\sqrt{-y}$, $\eta = x + 2\sqrt{-y}$ имеет вид

$$u(x, y) = A_\alpha^-(\tau, \lambda) - 2^{-2+4\beta} \gamma_2 \int_{\xi}^{\eta} (\eta-t)^{-\beta} (t-\xi)^{-\beta} \bar{J}_{-\beta}(\sigma) \nu(t) dt, \quad (9)$$

где $\gamma_2 = 2\Gamma(2 - 2\alpha) / \Gamma^2(3/2 - \alpha)$, $\sigma = \lambda\sqrt{(\eta - t)(t - \xi)}$,

$$A_{\alpha}(\tau, \lambda) = \gamma_1 (\eta - \xi)^{-1-2\beta} \int_{\xi}^{\eta} (\eta - t)^{\beta} (t - \xi)^{\beta} \bar{J}_{\beta}(\sigma) \tau(t) dt - \\ - \frac{\gamma_1 (\eta - \xi)^{-1-2\beta}}{2(1+2\beta)(\beta+1)} \int_{\xi}^{\eta} (\eta - t)^{\beta+1} (t - \xi)^{\beta+1} \bar{J}_{\beta+1}(\sigma) [\lambda^2 \tau(t) - \tau''(t)] dt.$$

Определение 2. Функция $u(x, y)$, определяемая в области Ω_2 формулой (9), называется решением уравнения $L_{\alpha, \lambda}(u) = 0$ из класса R_{0p}^{λ} при $-1/2 < \alpha < 0$, если функция $\tau(x)$ представима в виде

$$\tau(x) = \text{sign}(x - p) \int_p^x |x - t|^{-2\beta} \bar{I}_{-\beta} [\lambda(x - t)] T(t) dt,$$

где $v(x), T(x) \in C[0, 1] \cap C^1(0, 1)$ и $v'(x), T'(x) \in L(0, 1)$.

Согласно определению 2, функция $u(x, y)$, определенная в области Ω_2 в виде (9), называется решением уравнения $L_{\alpha, \lambda}(u) = 0$ из класса R_{00}^{λ} , если функция $\tau(x)$ представима в виде

$$\tau(x) = \int_0^x (x - s)^{-2\beta} \bar{I}_{-\beta} [\lambda(x - s)] T(s) ds, \quad (10)$$

а $v(x), T(x) \in C[0, 1] \cap C^1(0, 1)$ и $v'(x), T'(x) \in L(0, 1)$.

Из (10) вытекает, $\tau(x) \in C^3[0, 1]$ и

$$\tau(0) = 0, \quad \tau'(0) = 0. \quad (11)$$

Решения задачи $\{(1), (7), (8)\}$ из класса R_{00}^{λ} в области Ω_2 имеет вид

$$u(x, y) = \int_0^{\xi} (\eta - s)^{-\beta} (\xi - s)^{-\beta} \bar{I}_{-\beta} \left[\lambda \sqrt{(\eta - s)(\xi - s)} \right] T(s) ds +$$

$$+ \int_{\xi}^{\eta} (\eta - s)^{-\beta} (s - \xi)^{-\beta} \bar{J}_{-\beta} \left[\lambda \sqrt{(\eta - s)(s - \xi)} \right] N(s) ds, \quad (12)$$

где $N(s) = (2 \cos \pi \beta)^{-1} T(s) - 4^{2\beta-1} \mathcal{Y}_2 \nu(s)$.

Подчиняя решение (12) краевому условию (3), получаем уравнение относительно $N(\eta)$:

$$\int_0^{\eta} (\eta - s)^{-\beta} s^{-\beta} \bar{J}_{-\beta} \left[\lambda \sqrt{(\eta - s)s} \right] N(s) ds = \psi \left(\frac{\eta}{2} \right), \quad 0 \leq \eta \leq 1$$

Последнее уравнение, в результате применения равенства (6), можно привести к виду, удобному для дальнейшего исследования:

$$D_{0\eta}^{\beta-1} \left\{ B_{0\eta}^{1,\lambda i} \left[\eta^{-\beta} N(\eta) \right] \right\} = \frac{1}{\Gamma(-\beta+1)} \psi \left(\frac{\eta}{2} \right), \quad 0 \leq \eta \leq 1. \quad (13)$$

Применяя к обеим частям уравнения (13) последовательно операторы $D_{0\eta}^{1-\beta}$, $A_{0\eta}^{1,\lambda i}$ и учитывая равенства $D_{0\eta}^{1-\beta} D_{0\eta}^{\beta-1} f(\eta) = f(\eta)$, $A_{0\eta}^{1,\lambda i} B_{0\eta}^{1,\lambda i} g(\eta) = g(\eta)$, а также структуры функции $N(\eta)$, получаем

$$T(x) = \mathcal{Y}_3 \nu(x) + \frac{2 \cos \pi \beta x^{\beta}}{\Gamma(1-\beta)} A_{0x}^{1,\lambda} \left[D_{0x}^{1-\beta} \psi \left(\frac{x}{2} \right) \right].$$

Подставляя это значение $T(x)$ в (10), находим соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ на отрезке $[0,1]$, получаемое из области Ω_2 :

$$\begin{aligned} \tau(x) = & \mathcal{Y}_3 \int_0^x (x-s)^{-2\beta} \bar{I}_{-\beta} \left[\lambda(x-s) \right] \nu(s) ds + \\ & + \frac{2 \cos \pi \beta}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^x (x-s)^{-2\beta} \bar{I}_{-\beta} \left[\lambda(x-s) \right] s^{\beta} A_{0s}^{1,\lambda} \left[D_{0s}^{1-\beta} \psi \left(\frac{s}{2} \right) \right] ds, \quad 0 \leq x \leq 1, \end{aligned} \quad (14)$$

где $\mathcal{Y}_3 = 2 \cdot 4^{2\beta-1} \mathcal{Y}_2 \cos \pi \beta$.

Согласно условиям задачи T_0 , в уравнении (1) и в условиях (2) можно перейти к пределу при $y \rightarrow +0$ (например, см. [6], [7]). В результате получим следующие соотношения:

$$\tau''(x) - \Gamma(1+\delta)v(x) - \lambda^2 \tau(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (15)$$

$$\tau(0) = \lim_{y \rightarrow +0} y^{1-\delta} \varphi_1(y) = a, \quad \tau(1) = \lim_{y \rightarrow +0} y^{1-\delta} \varphi_2(y) = b. \quad (16)$$

Если считать, что $v(x)$ - известная функция, то при $\lambda \in R$ или $\lambda i \in R$, $\lambda i \neq \pi m, m \in Z$ задача {(15), (16)} имеет единственное решение [8]

$$\begin{aligned} \tau(x) = & a + x(b - a) + \\ & + \lambda^2 \int_0^1 G(x, t; \lambda) [a + t(b - a)] dt + \Gamma(1 + \delta) \int_0^1 G(x, t; \lambda) v(t) dt, \end{aligned} \quad (17)$$

где $G(x, t; \lambda)$ - функция Грина задачи {(15), (16)}

$$G(x, t; \lambda) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sh} \lambda(x-t) \operatorname{sh} \lambda t}{\lambda \operatorname{sh} \lambda}, & 0 \leq x \leq t, \\ \frac{\operatorname{sh} \lambda x \operatorname{sh} \lambda(t-1)}{\lambda \operatorname{sh} \lambda}, & t \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Из формулы (17), в силу равенства (11), вытекают следующие равенства $a = 0, b = 0$ и

$$\tau(x) = \Gamma(1 + \delta) \int_0^1 G(x, t; \lambda) v(t) dt. \quad (18)$$

(18) является основным соотношением между $\tau(x)$ и $v(x)$ на отрезке $[0, 1]$, получаемое из области Ω_1 .

Теперь из соотношений (18) и (14) найдем неизвестные функции $\tau(x)$ и $v(x)$. С этой целью, из (18) и (14) исключим функцию $\tau(x)$:

$$\Gamma(1 + \delta) \int_0^1 G(x, t; \lambda) v(t) dt = \int_0^x (x - \xi)^{-2\beta} \Gamma_{-\beta} [\lambda(x - \xi)] v(\xi) d\xi +$$

$$+ \frac{2 \cos \pi \beta}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^x (x-s)^{-2\beta} \bar{I}_{-\beta} [\lambda(x-s)] s^\beta A_{0s}^{1,\lambda} \left[D_{0s}^{1-\beta} \psi' \left(\frac{s}{2} \right) \right] ds, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (19)$$

Продифференцируем это равенство дважды по x . Затем, от полученного равенства почленно вычтем равенство (19). В результате, имеем интегральное уравнение относительно $\nu(x)$:

$$\nu(x) - \frac{2\beta(2\beta+1)}{\Gamma(1+\delta)} \int_0^x (x-s)^{-2\beta-2} \bar{I}_{-\beta-1} [\lambda(x-s)] \nu(s) ds = Q(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (20)$$

где

$$Q(x) = \frac{4\beta(2\beta+1)\cos \pi \beta}{\Gamma(1+\delta)\Gamma(1-\beta)} \int_0^x (x-t)^{-2\beta-2} \bar{I}_{-\beta-1} [\lambda(x-t)] \Phi(t) dt, \\ \Phi(t) = t^\beta A_{0t}^{1,\lambda} \left[D_{0t}^{1-\beta} \psi' \left(\frac{t}{2} \right) \right].$$

Так как $\alpha \in (-1/2, 0)$, то $\beta = \alpha - 1/2 \in (-1, -1/2)$ и $-2\beta - 2 \in (-1, 0)$. Поэтому ядро интегрального уравнения (20) имеет слабую особенность.

Пусть выполнены следующие условия:

$$\psi^{(m)}(0) = 0, \quad m = 0, 1, 2, \quad \psi^{(p)}(s/2) = s^\beta \psi'_0(s), \quad p > -2 - 2\beta, \quad \psi'_0(s) \in C[0, 1]. \quad (21)$$

Докажем, что $Q(x) \in C[0, 1] \cap C^1(0, 1)$ и $Q'(x) \in L(0, 1)$. С учетом (21) и (4), имеем

$$\Phi(t) = \frac{t^{2+2\beta}}{8\Gamma(2+\beta)} \int_0^1 (1-z)^{1+\beta} \psi^{(p)} \left(\frac{zt}{2} \right) dz - \\ - \frac{\lambda^2 t^{4+2\beta}}{32\Gamma(2+\beta)} \int_0^1 \int_0^{3+\beta} \bar{J}_1 \left[\lambda t \sqrt{s(1-s)} \right] ds \int_0^1 (1-z)^{1+\beta} \psi^{(p)} \left(\frac{zts}{2} \right) dz, \\ \Phi'(t) = \frac{\beta t^{1+2\beta}}{8\Gamma(2+\beta)} \int_0^1 (1-z)^{1+\beta} \psi^{(p)} \left(\frac{tz}{2} \right) dz + \frac{t^{1+2\beta}}{8\Gamma(1+\beta)} \int_0^1 (1-z)^\beta \psi^{(p)} \left(\frac{zt}{2} \right) dz - \\ - \frac{\beta \lambda^2 t^{3+2\beta}}{32\Gamma(2+\beta)} \int_0^1 \int_0^{3+\beta} \bar{J}_1 \left[\lambda t \sqrt{s(1-s)} \right] ds \int_0^1 (1-z)^{1+\beta} \psi^{(p)} \left(\frac{zst}{2} \right) dz + \\ + \frac{\lambda^4 t^{5+2\beta}}{128\Gamma(2+\beta)} \int_0^1 \int_0^{3+\beta} (2-s) \bar{J}_2 \left[\lambda t \sqrt{s(1-s)} \right] ds \int_0^1 (1-z)^{1+\beta} \psi^{(p)} \left(\frac{zts}{2} \right) dz. \quad (22)$$

Отсюда, в силу $\psi'''(s/2) = s^p \psi'_0(s)$, $p > -2 - 2\beta$, $\psi'_0(s) \in C[0,1]$, следует, что $\Phi(\xi) \in C[0,1]$, поэтому $Q(x) \in C[0,1]$. Теперь вычисляем $Q'(x)$:

$$\begin{aligned} Q'(x) = & - \frac{4\beta \cos \pi\beta \lambda^2}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^x (x-t)^{-2\beta-1} \bar{I}_{-\beta-1}[\lambda(x-t)] \Phi(t) dt + \\ & + \frac{4\beta(2\beta+1) \cos \pi\beta}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^x (x-t)^{-2\beta-2} \bar{I}_{-\beta-1}[\lambda(x-t)] \Phi'(t) dt - \\ & - \frac{4\beta \cos \pi\beta \lambda}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^x (x-t)^{-2\beta-1} \bar{I}'_{-\beta-1}[\lambda(x-t)] \Phi'(t) dt. \end{aligned}$$

Отсюда, согласно (21) и (22) следует, что $Q'(x) \in C(0,1) \cap L(0,1)$. Следовательно, $Q(x) \in C[0,1] \cap C^1(0,1)$ и $Q'(x) \in L(0,1)$.

В силу свойств ядра и правой части интегрального уравнения (20), согласно теории интегральных уравнений Вольтерра второго рода [9], оно имеет единственное решение.

После нахождения функции $\nu(x)$ из (20), функция $\tau(x)$ находится по формуле (18). После этого решение задачи T_0 в области Ω_2 определяется по формуле (12), а в области Ω_1 - как решение первой краевой задачи для уравнения $L_1(u) = 0$ с условиями (2) и $\lim_{y \rightarrow +0} y^{1-\beta} u(x, y) = \tau(x)$, $0 \leq x \leq 1$, определяется по формуле [10]

$$u(x, y) = \int_0^1 f(t) G(x, y; t, 0) dt + \int_0^y f_1(s) G_i(x, y; 0, s) ds - \int_0^y f_2(s) G_i(x, y; 1, s) ds,$$

где

$$G(x, y; t, s) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} [\Gamma(x-t+2m, y-s) - \Gamma(x+t+2m, y-s)],$$

$$\Gamma(x, y) = \frac{1}{2y} \int_{|x|}^{+\infty} e_{1,\delta/2}^{1,0} \left(-\frac{\xi}{y^{\delta/2}} \right) J_0(\lambda \sqrt{\xi^2 - x^2}) d\xi, \quad e_{\alpha,\beta}^{\mu,\delta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + \alpha k) \Gamma(\delta - \beta k)}, \quad \alpha > \beta.$$

,

Таким образом, доказана следующая основная

Теорема 2. Если λ – действительное число или чисто мнимое число, отличное от $i\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, а заданные функции удовлетворяют условиям (21) и $y^{1-\delta} \varphi_1(y), y^{1-\delta} \varphi_2(y) \in C[0,1]$, $\lim_{y \rightarrow +0} y^{1-\delta} \varphi_1(y) = 0$, $\lim_{y \rightarrow +0} y^{1-\delta} \varphi_2(y) = 0$, то задача T_0 имеет единственное решение.

Литература

1. Мамадалиев, Нуманжон К. "О представлении решения видоизмененной задачи Коши." *Сибирский математический журнал* 41, no. 5 (2000): 1087-1097.
2. Мамадалиев, Назиржон Камилжонович. "Об одном подходе к решению задачи Трикоми для уравнения параболо-гиперболического типа." *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук* 9.1 (2007): 66-68.
3. Urinov AK, Okboev AB. Nonlocal boundary-value problem for a parabolic-hyperbolic equation of the second kind. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2020 Sep;41(9):1886-97.
4. Окбоев А.Б. Задача Трикоми для уравнения параболо-гиперболического типа // Бюллетень Института математики. –Ташкент. 2020. №1. –С. 95 – 103
5. Салахитдинов М.С., Уринов А.К. Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром. –Ташкент: Фан, 1997. 168 с.
6. S. Kh. Gekkieva, A boundary value problem for the generalized transfer equation with a fractional derivative in a semi-infinite domain. *Izv. Kabardino-Balkarsk. Nauchnogo Tsentra RAN* 1 (8) (2002), 6-8.
7. Berdyshev, A. S., A. Cabada, and E. T. Karimov. "On a non-local boundary problem for parabolic-hyperbolic equation involving Riemann-Liouville fractional differential operator."
8. Джураев Т. Д., Сопуев А., Мамажонов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. –Ташкент: Фан, 1986. – 220 с.
9. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. – Москва: Физматгиз, 1959. – 232 с.
10. Mamchuev, M.O. Solutions of the Main Boundary Value Problems for a Loaded Second-Order Parabolic Equation with Constant Coefficients, *Differ. Uravn.*, 2016, vol. 52, no. 6, pp. 789–797.