

KECHIKUVCHI ARGUMENTLI JANGOVAR HARAKATLAR MODELINI YECHISH USULI HAQIDA

Karimov Nodirbek Madirimovich

Mirzo Ulugʻbek nomidagi Oʻzbekiston Milliy universiteti katta oʻqituvchisi

E-mail: matematik-uz@mail.ru

Annotatsiya. Ushbu maqolada, kechikuvchi differentsial tenglamalar sistemasini jangovar konfliktli holatlarga tadbiri qaralgan. Lanchesterning jangovar harakatlar modeliga kechikuvchi argument kiritilib, u ma'lumot uzatishda kechikish vaqtini hisobga oladi, bu haqiqiy jangovar vaziyatlarda muhim omil bo'lishi mumkin. Bu jang dinamikasini aniqroq modellashtirish va tahlil qilish va bashorat qilishda vaqt omilini hisobga olish imkonini beradi. Boshlang'ich qiymatli masalaning yechimi mavjud va yagonaligi bo'yicha teorema isbotlandi. Kechikuvchan argumentli jangovar harakatlar modelining analitik yechimini topish uchun qadamlar usulidan, sonli yechimlarni topishda esa Python tilining numpy, matplotlib va ddeint kutubxonalaridan foydalanildi.

Kalit soʻzlar: kechikuvchi argument, kechikuvchi differentsial tenglama, ziddiyatli vaziyat, Lanchester kvadratik qonuni, boshlang'ich funktsiya, qadamlar usuli, xarakteristik tenglama, xos son, xos vektor.

О МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ МОДЕЛИ БОЕВЫХ ДЕЙСТВИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

Каримов Нодирбек Мадиримович

Старший преподаватель Национального университета Узбекистана имени

Мирзо Улугбека

E-mail: matematik-uz@mail.ru

Аннотация. В данной статье рассматривается применение системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом к ситуациям боевого конфликта. Модель боевых действий Ланчестера включает аргумент задержки, учитывающий задержку передачи информации, которая может быть важным фактором в реальных боевых ситуациях. Это позволяет более точно моделировать и анализировать динамику боя, а также учитывать фактор времени в прогнозах. Доказана теорема существования и

единственности решения начальной задачи. Для нахождения аналитического решения боевой модели с запаздывающим аргументом использовался метод шагов, а для численного решения использовались библиотеки *numpy*, *matplotlib* и *ddeint* языка Python.

Ключевые слова: запаздывающий аргумент, дифференциальное уравнение с запаздыванием, конфликтная ситуация, квадратичный закон Ланчестера, начальная функция, метод шагов, характеристическое уравнение, собственное значение, собственный вектор.

ABOUT THE METHOD OF SOLUTION THE MODEL OF COMBAT ACTIONS WITH DELAY ARGUMENT

Karimov Nodirbek Madirimovich

Senior teacher of the National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek

E-mail: matematik-uz@mail.ru

Annotation: *In this article, the application of the system of delayed differential equations to situations of combat conflict is analyzed. Lanchester's combat action model incorporates a delay argument that takes into account the delay in information transmission, which can be an important factor in real combat situations. This allows for more accurate modeling and analysis of battle dynamics, and takes the time factor into account in predictions. The theorem on the existence and uniqueness of the solution of the initial value problem has been proved. The method of steps was used to find the analytical solution of the delayed argument combat model, and the *numpy*, *matplotlib* and *ddeint* libraries of the Python language were used to find the numerical solutions.*

Key words: *Delay argument, delay differential equation, conflict situation, Lanchester's quadratic law, initial function, steps method, characteristic equation, eigenvalue, eigenvector.*

KIRISH

Atrofdagi voqelikning ko‘plab dinamik modellarida jarayonlarning kelajakdagi rivojlanishi nafaqat hozirgi vaqtdagi holati bilan balki rivojlanishning butun tarixi bilan ham sezilarli darajada belgilanadi. Ushbu jarayonlarning matematik tavsifi har xil turdagi kechikishlar bilan differentsial tenglamalar yordamida yozilishi mumkin.

Jarayonlarning oldingi holatlariga bog'liq bo'lgan differentsial tenglamalar kechikuvchi differentsial tenglamalar (ing. Delay Differential Equations – DDE) deb ataladi.

Keyingi ta'sir bilan bog'liq funktsional-differentsiallanuvchi sistemalarni tizimli o'rganishga birinchi qadamlar A.D.Myshkis va R.Bellmanning kechikuvchi argumentli sistemalarga oid ishlarida qo'yilgan [2, 11].

Keyinchalik bu sohada yangi tadqiqotlar qilinishi va turli mamlakatlar matematik olimlarining say-harakatlari bilan ushbu ilmiy yo'nalish qisqa vaqt ichida juda ko'plab tabiiy va texnik jarayonlarga tadbiq etildi hamda yangidan-yangi nazariyalar va yechish usullari yaratildi [1, 3, 4, 5, 9, 10].

Harbiy harakatlar qarama-qarshi tomonlarning o'zaro ta'sirini tahlil qilish va tushunishni talab qiladi va bu borada matematik modellar muhim rol o'ynaydi. Zamonaviy harbiy janglarning eng mashhur matematik modellaridan biri Lanchester kvadratik modelidir [6, 7, 8].

Ushbu maqolada Lanchesterning asl modelining kengaytmasi bo'lgan va qarama-qarshi tomonlar o'rtasida ma'lumot uzatishda kechikish vaqtini hisobga olishga imkon beradigan Lanchesterning kvadratik qonunini ko'rib chiqamiz.

Hozirgi kunda kechikuvchi argumentli differentsial tenglamalar zamonaviy fan va texnikaning turli sohalarida keng qo'llanilmoqda: biologiyada, tibbiyotda (epidemiyalarning ko'payishi va tarqalishi jarayonlari), avtomatika va telemexanikada, iqtisodiyotda, mexanikada, radiolokatsiyada va harbiy ishlarda.

Harbiy ishlar sohasidagi kechikuvchi differentsial tenglamalar sistemasiga misol sifatida ikki qarama-qarshi tomonning jangovar harakatlari uchun Lanchesterning kvadratik qonuni tenglamalarini keltirish mumkin. Ushbu differentsial tenglamalardagi kechikish jangovar ziddiyatni boshlanishidan oldingi va ziddiyatga kirishish orasidagi vaqt bilan belgilanadi. Bunda tomonlar jangovar ziddiyatga kirishishi uchun ularga keladigan yordamchi kuchlar yoki razvedka ma'lumotlari ba'zi omillar (masalan, texnik muammolar, ob-havo sharoiti, geografik to'siqlar, dushman harakatlari, qonuniy cheklovlar va boshqalar) sababli kechikishi mumkin.

MASALANING QO'YILISHI

Soddalik uchun kechikuvchi argumentli differentsial tenglamalar sistemasini ko'rib chiqamiz. Kechikuvchi Lanchester kvadratik qonuni ikki armiya dinamikasini tavsiflaydi, bunda har bir armiya askarlar (kuchlar) soniga mutanosib hujum kuchiga va unga ta'sir qiladigan dushman askarlari soniga mutanosib mudofaa kuchiga ega. Kechikish shundan iboratki, askarlar sonining o'zgarishi bir zumda emas, balki kechikish bilan sodir bo'ladi. Kechikuvchi Lanchester kvadratik qonunida qarama-qarshi tomonlarning jang boshidagi qiymatini emas, balki "tarixni" ya'ni jangga kirishdan oldingi qiymatni ham bilish kerak bo'ladi.

Lanchester kvadratik qonunida kechikuvchi argument bilan qarama-qarshi ikki tomon ko'rib chiqiladi, biz ularni "X" va "Y" deb belgilaymiz. $x(t)$ va $y(t)$ mos ravishda "X" va "Y" tomonlarning t vaqtdagi askarlar (kuchlar) sonini ifodalasin. Shuningdek, τ parametrni kiritamiz, bu konfliktli tomonlar o'rtasida ma'lumot uzatishda kechikish vaqti. U holda, Lanchesterning kvadratik qonuni modeli uchun kechikuvchi argumentli differentsial tenglamalar sistemasi quyidagi ko'rinishga ega:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = -a_1x(t) - b_1y(t - \tau), & t > 0, \\ \frac{dy(t)}{dt} = -a_2y(t) - b_2x(t - \tau), & t > 0. \end{cases} \quad (1)$$

(1) uchun boshlang'ich shartlar quyidagicha:

$$\begin{cases} x(t) = \varphi_1(t) = x_0, & t \in [-\tau, 0], \\ y(t) = \varphi_2(t) = y_0, & t \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (2)$$

bu yerda $x(t)$ va $y(t)$ - X va Y tomonlarning t vaqdagi askarlari soni. τ - konfliktli tomonlar haqida ma'lumot uzatishning kechikish vaqti ($\tau > 0$). $a_i > 0$ koefitsiyentlar jangovar bo'lmagan sabablarga ko'ra yo'qotishlar darajasini tavsiflaydi. $b_i > 0$ ($i = 1, 2$) - jangovar harakatlar tufayli yo'qotishlar darajasi. Bu ishda ikkala tomonga ham yordamchi kuchlar kelib qo'shilmaydi.

(1) va (2) sistemalarni matritsa ko'rinishida yozamiz.

$$X'(t) = AX(t) + BX(t - \tau), \quad t \geq 0, \quad (3)$$

(3) uchun boshlang'ich shart esa quyidagicha:

$$X(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0]. \quad (4)$$

bu yerda $\varphi(t)$ - berilgan uzluksiz vektor funksiya, A, B lar esa 2×2 matritsalar.

YECHIMNING MAVJUDLIGI VA YAGONALIGI

Faraz qilaylik, $M_+ = [\theta, \theta + h]$ oraliqda $\tau \geq 0$ o'zgarmas bo'lsin, bunda $\theta \geq 0$ va $h > 0$.

Ta'rif.

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau)), \quad t \in M_+ \quad (5)$$

ko'rinishdagi tenglamaga kechikuvchi argumentli differensial tenglama deyiladi.

Bu yerda $\tau > 0$ kechikish deyiladi. $f(t, x(t), x(t - \tau))$ va $f_x(t, x(t), x(t - \tau))$ funksiyalar i^3 da uzluksiz funksiyalar. (5) uchun boshlang'ich shart (qiymat) quyidagicha berilgan

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in M_- = [\theta - \tau, \theta], \quad (6)$$

bu yerda φ - i da berilgan uzluksiz funksiya.

Teorema. Agar f funksiya $G = M_+'$ i chiziqda uzluksiz va chegaralangan, φ funksiya M_- da uzluksiz va $\tau > 0$ esa M_+ da o'zgarmas bo'lsa, u holda (5), (6) boshlang'ich qiymatli masalaning $M_+ = [\theta, \theta + h]$ oraliqda kamida bitta yechimi mavjud bo'ladi.

Teoremaning isboti [3] dagi 7§ V teoremaning isboti va [10] da qo'llanilgan qadamlar usuliga asoslanadi.

Isbot. Faraz qilaylik, $t \in [\theta + (n-1)\tau, \theta + n\tau]$ $n \in \mathbb{N}$ uchun $x'_n(t) = f(t, x_n(t), x_n(t - \tau))$ o'rinli bo'lsin.

(5) tenglamani quyidagi qadamlar usuli bilan yechish mumkin. $x(t)$ yechim $t \in [\theta + (n-1)\tau, \theta + n\tau]$ oraliqda oddiy differensial tenglama (ODT) uchun boshlang'ich qiymatli masalani qanoatlantirsin:

1-qadam. $t \in [\theta, \theta + \tau]$ ning o'rniga $t - \tau \in [\theta - \tau, \theta]$ deb yozamiz.

$$x_1'(t) = f(t, x_1(t), \varphi(t - \tau)) \quad \text{va}$$

$$x_1(\theta) = \varphi(\theta).$$

$g(t, x_1) \equiv f(t, x_1(t), \varphi(t - \tau))$ va $g_{x_1}(t, x_1)$ uzluksizligidan, ushbu ODT uchun yagona yechim mavjudlik natijalari bilan kafolatlanadi.

Bundan shunday xulosa qilishimiz mumkin

$$x_1(t) = x_1(\theta) + \int_{\theta}^t f(s, x_1(s), x_1(s - \tau)) ds = \varphi(\theta) + \int_{\theta}^t f(s, x_1(s), \varphi(s - \tau)) ds. \quad (7)$$

Demak, $x_1(t)$ yechim $t \in [\theta, \theta + \tau]$ oraliq uchun yagona aniqlangan.

2-qadam. Xuddi shunday, $t \in [\theta + \tau, \theta + 2\tau]$ oraliqda $x(t)$ ODT uchun boshlang'ich qiymatli masalani qanoatlantirsin:

$$x_2'(t) = f(t, x_2(t), x_2(t - \tau)) = f(t, x_2(t), x_1(t - \tau))$$

$$x_2(\theta + \tau) = x_1(\theta + \tau).$$

Shuning uchun,

$$x_2(t) = x_2(\theta + \tau) + \int_{\theta + \tau}^t f(s, x_2(s), x_2(s - \tau)) ds = x_1(\theta + \tau) + \int_{\theta + \tau}^t f(s, x_2(s), x_1(s - \tau)) ds. \quad (8)$$

Demak, $x_2(t)$ yechim $t \in [\theta + \tau, \theta + 2\tau]$ oraliq uchun yagona aniqlangan.

Shunga qaramay, bunday masalalar uchun mavjudlik natijalari qaralayotgan oraliqlarda yagona yechim mavjudligini kafolatlaydi. $x_3(t)$ yechimni topish uchun $t \in [\theta + 2\tau, \theta + 3\tau]$ oraliqda yuqoridagi jarayonni takrorlaymiz va hokazo. Bundan, ixtiyoriy x_n yechim o'zidan oldingi yechim orqali topiladi degan xulosa kelib chiqadi. Demak, $x_n(t)$ yechim $t \in [\theta + (n - 1)\tau, \theta + n\tau]$, $n \in N$ oraliq uchun yagona aniqlangan.

Shunday qilib, yuqoridagi proseduralardan keyin (5), (6) boshlang'ich qiymatli masalaning yagona yechimi

$$x(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{agar } t \in M_- = [\theta - \tau, \theta], \\ \varphi(\theta) + \int_{\theta}^t f(s, x(s), x(s - \tau)) ds, & \text{agar } t \in M_+ = [\theta, \theta + h]. \end{cases} \quad (9)$$

Xulosa qilib aytganda, barcha $t \in M_- \cup M_+ = [\theta - \tau, \theta + h]$ qiymatlari uchun $x(t)$ (5), (6) boshlang'ich qiymatli masalaning yechimi va bu yechim yagonadir. Teorema isbotlandi.

(3), (4) kechikuvchi argumentli chiziqli differensial tenglamani umumiy yechimini quyidagicha ham yozish mumkin [8].

$$e_r^{Bt} = \begin{cases} \Theta, & t < -\tau, \\ E, & -\tau \leq t < 0, \\ E + Bt + \frac{B^2(t - \tau)^2}{2} + \dots + \frac{B^n(t - (n-1)\tau)^n}{n!}, & (n-1)\tau \leq t < n\tau, \quad n=1, 2, 3, \dots, \end{cases} \quad (10)$$

bu yerda $\tau > 0$, Θ va E lar mos ravishda n -o'lchovli nol va birlik matritsalar.

SONLI MISOL

Ushbu bo'limda (3), (4) sistemalarni soddaroq shartlar asosida konfliktli tomonlar uchun qo'llaymiz:

$$X'(t) = AX(t) + BX(t - \tau), \quad t \geq 0, \quad (11)$$

bu yerda $A = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ 0 & -0.2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -0.9 \\ -0.4 & 0 \end{bmatrix}$, τ - kechikish. Boshlang'ich shart esa

$$X(t) = \varphi(t) = \begin{bmatrix} 1000 \\ 900 \end{bmatrix}, \quad t \in [-\tau, 0]. \quad (12)$$

A matritsaning xos qiymatlari va xos vektorlarini topishdan boshlaymiz.

Xarakteristik tenglama quyidagicha bo'ladi:

$$h(\lambda) \equiv \det(A - \lambda I) = (\lambda - 0.1)(\lambda - 0.2) = 0$$

Shunday qilib, A ning xos qiymatlari $\lambda_1 = 0.1$ va $\lambda_2 = 0.2$.

$$(A - \lambda_1 I)v_1 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ 0 & -0.2 \end{bmatrix} v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

bundan kelib chiqadiki, λ_1 ga mos keluvchi xos vektor $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ga teng.

$$(A - \lambda_2 I)v_2 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ 0 & -0.2 \end{bmatrix} v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

λ_2 ga mos keluvchi xos vektor esa $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ga teng.

Shunday qilib, $x(t) = Ax(t)$ ning yechimini quyidagicha yozamiz.

$$x_h(t) = c_1 e^{-0.1t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{-0.2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

bu yerda c_1, c_2 o'zgarmas sonlar.

$t \in [0, \tau]$ oraliq uchun

$$\begin{aligned} x'(t) = Ax(t) + Bq(t - \tau) &= \begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ 0 & -0.2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & -0.9 \\ -0.4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000 \\ 900 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ 0 & -0.2 \end{bmatrix} x(t) - \begin{bmatrix} 810 \\ 400 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (14)$$

(14) ning xususiy yechimini quyidagi ko'rinishda qidiramiz:

$$x_p(t) = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix},$$

bu yerda p_1, p_2 o'zgarmas sonlar.

(14) dagi $x(t)$ ni o'rniga $x_p(t)$ ni qo'yamiz

$$x_p(t) = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ 0 & -0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 810 \\ 400 \end{bmatrix}$$

bundan $p_1 = -8100$ va $p_2 = -4000$ bo'ladi. Shunday qilib, (14) ning xususiy yechimi

$$x_p(t) = \begin{bmatrix} -8100 \\ -4000 \end{bmatrix}$$

Demak, (14) ning $t \in [0, \tau]$ oraliqdagi umumiy yechimi quyidagi ko'rinishda bo'ladi

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = c_1 e^{-0.1t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{-0.2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8100 \\ 4000 \end{bmatrix},$$

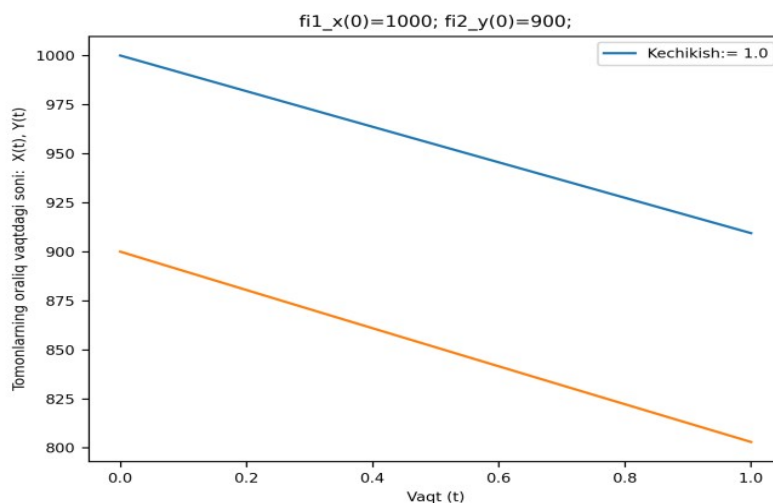
bu yerda c_1, c_2 konstantalar. $x(0) = q(0)$ boshlang'ich shartdan c_1 va c_2 larni topamiz.

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1000 \\ 900 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8100 \\ 4000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 - 8100 \\ c_2 - 4000 \end{bmatrix}.$$

Bundan $c_1 = 9100$ va $c_2 = 4900$ kelib chiqadi.

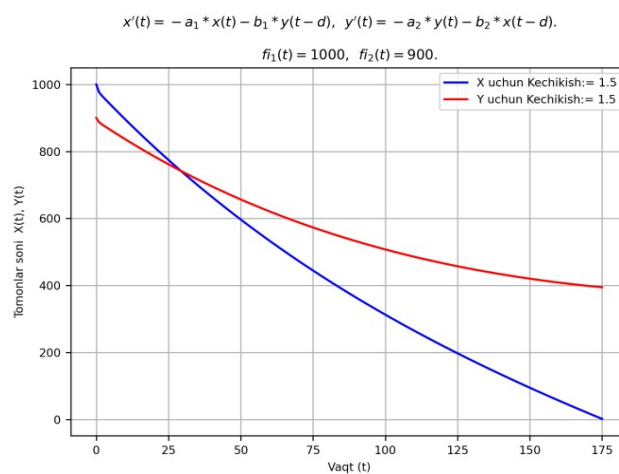
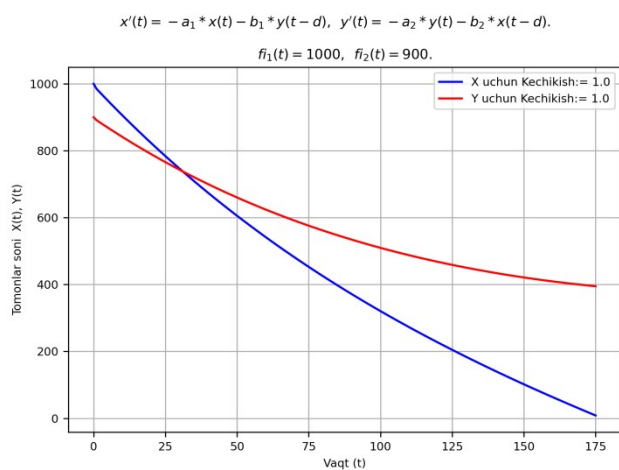
Demak, (11), (12) ning $t \in [0, \tau]$ oraliqdagi umumiy yechimi

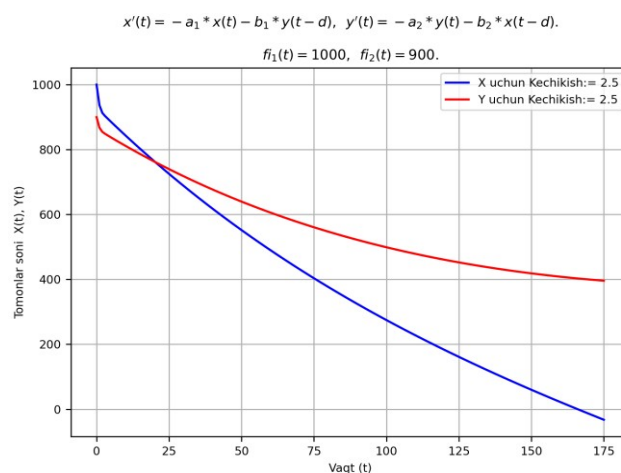
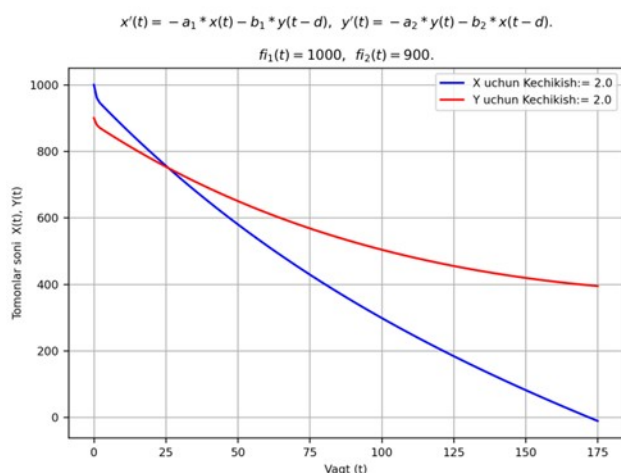
$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = 9100e^{-0.1t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 4900e^{-0.2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8100 \\ 4000 \end{bmatrix}. \quad (15)$$



1-rasm. (15) funksiyaning $t \in [0, 1]$ oraliqdagi grafik yechimi

Xuddi shunday, keyingi $t \in [(n-1)\tau, n\tau]$, ($n=2, 3, 4, \dots$) oraliqlar uchun ham (11), (12) boshlang'ch qiymatli masalaning umumiy yechimlarini topish mumkin.





2-rasm. τ ning turli qiymatlari uchun (11), (12) boshlang'ich qiymatli masalaning umumiy grafiki

2-rasmdan ko'rish mumkinki, qarama-qarshi tomonlar sonining o'zgarishi bir zumda emas, balki kechikish bilan sodir bo'ladi. Shuningdek, 1-jadvalda τ kechikishning turli qiymatlari uchun ziddiyatni tugash vaqti, g'olib tomonda qolgan kuchlar miqdorlari keltirilgan.

1-jadval

<i>Kechikish vaqti</i>	<i>Jangni tugash vaqti</i>	<i>G'olib tomonda qolgan kuchlar miqdori (Y tomon)</i>
1.0	175	394
1.5	174	395
2.0	171	397
2.5	165	403

Kechikishning turli qiymatlarida ziddiyatni tugash vaqti, qarama-qarshi tomonlarda qolgan kuchlar miqdorlari

(11), (12) boshlang'ich qiymatli masalani keyingi vaqt oraliqlaridagi yechimlarini topganda $(x_i, y_i)^T, (i=1,2,3,...)$ qiymatlari ham kelib chiqadi. Bu yerda shuni e'tiborga olish kerakki, agar x_i yoki y_i lardan birortasini qiymati 0 dan kichik yoki teng bo'lib qolsa, jarayon shu yerda to'xtatiladi va shu tomon yutqazgan hisoblanadi va yutgan tomonda qancha askar qolgani, jang qancha vaqt davom etgani aniqlanadi.

XULOSA

Xulosa qilib shuni ta'kidlash kerakki, kechikuvchi argumentli differentsial tenglamalar juda murakkab bilim sohasidir. Lanchesterning jangovar harakatlar modeliga kechikuvchi argument tushunchasi kiritildi. (5), (6) boshlang'ich qiymatli masalaning yechimi mavjud va yagonaligi bo'yicha teorema isbotlandi. (3), (4) kechikuvchan argumentli jangovar harakatlar modelining analitik yechimini topish uchun kechikuvchan argumentli differentsial tenglamalar nazariyasining qadamlar usulidan foydalanildi. Shuningdek, sonli yechimlarni topishda esa Python tilining numpy, matplotlib va ddeint kutubxonalaridan foydalanildi. Jangovar ziddiyatli vaziyatlar uchun kechikuvchi argumentli Lanchester kvadratik qonunini qo'llash, bizga, sodir bo'layotgan voqealarning mohiyatini tushunishni osonlashtiradi harbiy harakatlar natijalarini bashorat qilishda foydali bo'lishi mumkin. Shu bilan birga kechikuvchi argumentli Lanchesterning kvadratik qonunini har xil turdagi va miqyosdagi jangovar harakatlarni rejalashtirishda, dushman kuchlarini bir nechta jangovar guruhlariga ajratishda va keladigan yordamchi jangovar vositalarni optimal taqsimlashda, konfliktli vaziyatlar uchun optimal strategiyalarni ishlab chiqishda qo'llash mumkin.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Alfredo Bellen and Marino Zennaro. Numerical methods for delay differential equations. Oxford University Press, 2003. 206 p.
2. Bellman, Richard; Cooke, Kenneth L. (1963). Differential-Difference Equations. Mathematics in Science and Engineering. New York, NY: Academic Press. 478 p.
3. D.Ya.Khusainov and G.V.Shuklin. Linear autonomous time-delay system with permutation matrices solving. Stud. Univ. Žilina, Ser. Math., Vol. 17, Iss. 1. 2003. pp 101–108.
4. Driver, Rodney D. (1977). Ordinary and Delay Differential Equations. Applied Mathematical Sciences. Vol. 20. New York, NY: Springer-Verlag.

5. L.F.Shampine and S.Thompson. Numerical Solution of Delay Differential Equations. Mathematics Department, Southern Methodist University, Dallas, 2017.
6. Karimov, N. (2023). Qarama-qarshi tomonlarning jangovar harakatlarini sonli tahlili. Евразийский журнал академических исследований, 3(4 Special Issue), 168–174. <https://www.in-academy.uz/index.php/ejar/article/view/14494>
7. Mamatov, M. Sh., and N. M. Karimov. "The task of distribution of accessory resources of forces in conflict situations." ISJ Theoretical & Applied Science, 06 (86) (2020): 639-645.
8. Н.М.Каримов. Решение задачи распределения управляемых ресурсов сил с помощью квадратичного закона Ланчестера при конфликтных ситуациях. Наманган давлат университети илмий ахборотномаси. 2020 йил 3-сон. 38-46.
9. А.Д.Полянин, В.Г.Сорокин, А.И.Журов. Дифференциальные уравнения с запаздыванием: Свойства, методы, решения и модели. – М.: издательство «ИПМех РАН», 2022. – 464 с.
10. Геворкян Э.А. Дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом: Учебное пособие. М.: 2004. 79 с.
11. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Государственное из-во., 1951. 256 с.
12. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971. 296 с.
13. Сысоева М.В., Сысоев И.В. Программирование для «нормальных» с нуля на языке Python: Учебник. В двух частях. Часть 2. - М.: Базальт СПО; МАКС Пресс, 2023. – 184.