

MATRITSAVIY ORIGINAL VA MATRITSAVIY TASVIR FUNKSIYALARNING ASOSIY XOSSALARI

Rajabov Shoxrux Shuxrat o'g'li
Toshkent davlat texnika universiteti
"Oliy matematika" kafedrası assistenti
E-mail: shoxrux.rajabov@tdtu.uz

Annotatsiya. *Operatsion hisobning asosiy boshlang'ich tushunchalaridan original funksiya va tasvir funksiya tushunchalari hisoblanadi. Matritsaviy analiz vujudga kelganidan so'ng, operatsion hisobning asosiy tushunchalari original funksiya va tasvir funksiya tushunchalarini matritsa argumentli funksiyalar uchun umumlashtirish masalasi kelib chiqdi. Ushbu maqolada biz shu masala bo'yicha ish olib boramiz.*

Kalit so'zlar. *matritsaviy original, matritsaviy tasvir, Laplas almashtirilishi, golomorf funksiya, Hankel teoremasi, integral, differensial, yagonalik teoremasi, siljish teoremasi, o'xshashlik teoremasi, parameter bo'yicha differensiallashtirish.*

BASIC PROPERTIES OF MATRIX ORIGINAL AND MATRIX IMAGE FUNCTIONS

Rajabov Shokhrukh Shukhrat ogli
Tashkent State Technical University
Assistant of the "Higher Mathematics" department
E-mail: shoxrux.rajabov@tdtu.uz

Annotation. *The concepts of original function and image function are among the main initial concepts of operational calculus. After the emergence of matrix analysis, the issue of generalizing the concepts of original function and image function, the basic concepts of operational calculus, to functions with matrix arguments arose. In this article, we will work on this issue.*

Key words. *matrix original, matrix image, Laplace transform, holomorphic function, Hankel's theorem, integral, differential, uniqueness theorem, shift theorem, similarity theorem, differentiation by parameter.*

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ МАТРИЧНОГО ОРИГИНАЛА И МАТРИЧНОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ

Раджабов Шохрух Шухрат угли

Ташкентский государственный технический университет

Ассистент кафедры «Высшая математика»

E-mail: shoxrux.rajabov@tdtu.uz

Аннотация. *Понятия оригинал функции и функции-изображение относятся к числу основных понятий операционного исчисления. После появления матричного анализа встал вопрос об обобщении понятий оригинал функции и функции-изображение, основных понятий операционного исчисления, на функции с матричными аргументами. В этой статье мы поработаем над этим вопросом.*

Ключевые слова. *матричный оригинал, матричный образ, преобразование Лапласа, голоморфная функция, теорема Ганкеля, интеграл, дифференциал, теорема единственности, теорема сдвига, теорема подобия, дифференцирование по параметру.*

Kirish qism

Bizga $f(A) \in \mathbb{R}[m \times m]$ matritsa argumentli funksiya berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. Quydagi shartlarni qanoatlantiruvchi $f(A)$ funksiyaga *matritsaviy original* deyiladi:

I. $A < 0$ da $f(A) \equiv 0$.

II. $\forall A = A^T$ simmetrik matritsalar uchun $f(A) - A \geq 0$.

III. $\forall A \in \mathbb{R}[m \times m]$ matritsalar uchun $\exists M > 0$ va $\alpha \geq 0$ sonlar topiladiki $|f(A)| \leq M \cdot e^{\alpha A}$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Endi shu ta'rifga teskari bo'lgan ta'rif matritsaviy originalning ta'rifini keltiramiz.

2-ta'rif. $f(A)$ matritsaviy originalning *matritsaviy tasviri* deb, $Z = X + iY$, $(Z \in \mathbb{C}[m \times m]: Z = Z^*)$ o'zgaruvchining

$$F(Z) = \int_0^\infty f(A) \cdot e^{-ZA} dA \quad (1)$$

integrali bilan aniqlanadigan $F(Z)$ matritsaviy funksiyaga aytiladi.

3-ta'rif. (1) formula orqali $f(A)$ matritsaviy originaldan $F(Z)$ matritsaviy tasvirga o'tishga *Laplas almashtirishi* deyiladi.

$f(A)$ matritsaviy original bilan $F(Z)$ matritsaviy tasvir orasidagi moslik $F(Z) \xrightarrow{\quad} f(A)$ yoki $f(A) \xleftarrow{\quad} F(Z)$ kabi belgilanadi. Bu yerda, " $\xrightarrow{\quad}$ " belgining yo'nalishi umumiylikka zid kelmagan holda hamisha matritsaviy tasvirdan matritsaviy originalga tomon yo'nalgan bo'ladi.

Asosiy qism

1-teorema. $f(A)$ matritsaviy original funksiyaning Laplas almashtirishi yordamida aniqlangan $F(Z)$ matritsaviy tasvir funksiyasi matritsaviy o'ng yarim tekislikdan $(Z \in \mathbb{C}[m \times m]: \operatorname{Re} Z = X > X_0 > 0)$ olingan Z matritsa o'zgaruvchining golomorf funksiyasi bo'ladi.

Isbot. Haqiqatdan ham, ko'rishimiz mumkinki (1) formula bo'yicha aniqlanadigan $F(Z)$ matritsaviy tasvir funksiyasi aniqlanishiga ko'ra Z matritsa o'zgaruvchining har bir elementi $z_{ij} \ (i, j = \overline{1, m})$ bo'yicha bir o'zgaruvchili

funksiya sifatida holomorf bo'ladi. Bu esa, $F(Z)$ matritsaviy tasvir funksiyasi Z matritsa o'zgaruvchining holomorf funksiyasi bo'lishini anglatadi.

2-teorema. Agar $F(Z)$ matritsaviy tasvir funksiyasi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(X + iY)| dY < +\infty \quad (2)$$

ihyoriy $X > X_0 > 0$ uchun

$$\lim_{X \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(X + iY)| dY = 0 \quad (3)$$

bo'lib, $F(Z) \xrightarrow{0} f(A)$ bo'lsa, u holda $f(A)$ differensiallanuvchi bo'lgan har bir nuqtada

$$f(A) = \frac{2^{\frac{1}{2}m(m-1)}}{(2\pi i)^{\frac{1}{2}m(m+1)}} \int_{\operatorname{Re} Z > 0} e^{ZA} F(Z) dZ \quad (4)$$

teng bo'ladi.

Isbot. 1-teoremaga ko'ra $F(Z)$ matritsaviy tasvir funksiyasi matritsaviy o'ng yarim tekislikdan $(Z \in \mathbb{C}[m \times m]: \operatorname{Re} Z = X > X_0 > 0)$ olingan Z matritsa o'zgaruvchining holomorf funksiyasi bo'ladi. U holda (1) formula bo'yicha aniqlanadigan $F(Z)$ funksiyasi uchun umumlashgan Hankel teoremasiga ko'ra uni quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$F(Z) = \int_{\Omega > 0} f(A) \cdot e^{-ZA} dA \quad (5)$$

(5) formulada $\Omega = \left\{ Z \in \mathbb{C}[m \times m]: \operatorname{Re}(z_{ij}) > 0 \right\}$.

(5) formulada quyidagi

$$g(A) = f(A) e^{-XA} \quad (6)$$

yangi o'zgaruvchini kiritamiz:

$$\begin{aligned}
F(X + iY) &= \int_{\Omega > 0} f(A) \cdot e^{-(X + iY)A} dA = \int_{\Omega > 0} f(A) \cdot e^{-XA} \cdot e^{-iYA} dA = \\
&= \int_{\Omega > 0} g(A) \cdot e^{-iYA} dA
\end{aligned} \tag{7}$$

(7) tenglikdan Fur'ening teskari inversiya haqidagi teoremasini qo'llab $g(A)$ funksiyani topib olamiz:

$$g(A) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega > 0} F(X + iY) \cdot e^{iYA} dY$$

Topilgan $g(A)$ funkiyani (6) ifodaga olib borib qo'yamiz:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega > 0} F(X + iY) \cdot e^{iYA} dY = f(A) e^{-XA} \tag{8}$$

Endi ohirgi (8) tenglikdan $f(A)$ topib olamiz:

$$\begin{aligned}
f(A) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega > 0} F(X + iY) \cdot e^{XA + iYA} dY = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega > 0} F(X + iY) \cdot e^{(X + iY)A} dY = \\
&= \frac{2^{\frac{1}{2}m(m-1)}}{(2\pi i)^{\frac{1}{2}m(m+1)}} \int_{\text{Re } Z > 0} e^{ZA} F(Z) dZ
\end{aligned}$$

1-lemma. $F(Z)$ matritsaviy tasvir uchun quyidagi chiziqlilik munosabatlari o'rinli bo'ladi:

$$\begin{aligned}
\text{I. agar } c = \text{const} \text{ va } f(A) &\leftarrow \frac{0}{1} F(Z) \text{ bo'lsa, u holda} \\
cf(A) &\leftarrow \frac{0}{1} cF(Z).
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
\text{II. agar } f_1(A) &\leftarrow \frac{0}{1} F_1(Z) \text{ va } f_2(A) \leftarrow \frac{0}{1} F_2(Z) \text{ bo'lsa, u holda} \\
f_1(A) + f_2(A) &\leftarrow \frac{0}{1} F_1(Z) + F_2(Z).
\end{aligned} \tag{10}$$

Isbot. Lemmani isboti bevosita integrallashda o'zgarmasni integral belgisidan tashqariga chiqarish va chiziqlilik xossaligidan kelib chiqadi.

3-teorema (*originalning yagonaligi haqidagi teorema*). Agar $F(Z)$ matritsaviy tasvir funksiya $f_1(A)$ va $f_2(A)$ matritsaviy orginallarning tasviri

bo'lsa, u holda bu originallar o'zlarining barcha uzluksiz nuqtalarida ustma-ust tushadi. Ya'ni $f_1(A) \equiv f_2(A)$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot. Teorema shartiga ko'ra: $F(Z) \xrightarrow{0} f_1(A)$ va $F(Z) \xrightarrow{0} f_2(A)$ Matritsaviy tasvir funksiyaning chiziqlilik xossasiga foydalanib quyidagi munosabatni hosil qilamiz: $f_1(A) - f_2(A) \xrightarrow{0} F(Z) - F(Z) = 0$
Bundan kelib chiqadiki $f_1(A) \equiv f_2(A)$.

Natijalar va muhokamalar

4-teorema (o'xshashlik teoremasi). Agar $f(A) \xrightarrow{0} F(Z)$ bo'lsa, u holda $\alpha > 0$ bo'lganda

$$f(\alpha A) \xrightarrow{0} \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{1}{\alpha} Z\right) \quad (11)$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Isbot. Yuqorida keltirilgan 2-ta'rif (1) munosabatga ko'ra:

$$f(\alpha A) \xrightarrow{0} \int_0^{\infty} f(\alpha A) \cdot e^{-ZA} dA$$

Bu integralda $\alpha A = U, dA = \frac{1}{\alpha} dU$ deb almashtirish kiritib, quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$f(\alpha A) \xrightarrow{0} \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} f(U) \cdot e^{-\frac{1}{\alpha} ZU} dU = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{1}{\alpha} Z\right)$$

5-teorema (kechikish teoremasi). Agar $f(A) \xrightarrow{0} F(Z)$ bo'lsa, u holda $B[c] \in \mathbb{R}[m \times m], (c = \text{const} > 0)$ konstanta matritsa uchun

$$f(A - B[c]) \xrightarrow{0} e^{-ZB[c]} F(Z) \quad (12)$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Isbot. Laplas almashtirishi ta'rifiga va (1) formulaga ko'ra:

$$f(A - B[c]) \leftarrow \int_0^{\infty} f(A - B[c]) e^{-Z(A - B[c])} dA$$

Bu integralda $A - B[c] = U$, $dA = dU$ almashtirish kiritib, quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} f(A - B[c]) \leftarrow \int_{-c}^{\infty} e^{-Z(B[c] + U)} \cdot f(U) dU &= e^{-Z B[c]} \int_{-c}^{\infty} e^{-Z U} \cdot f(U) dU = \\ &= e^{-Z B[c]} \int_{-c}^0 e^{-Z U} \cdot f(U) dU + e^{-Z B[c]} \int_{-c}^{\infty} e^{-Z U} \cdot f(U) dU = e^{-Z B[c]} F(Z), \\ \int_{-c}^0 e^{-Z U} \cdot f(U) dU &= O(Z = 0 \text{ da } f(Z) = 0) \end{aligned}$$

chunki 1-integral: ga teng bo'ladi.

6-teorema (siljish teoremasi). Agar $f(A) \leftarrow F(Z)$ bo'lsa, u holda ihtiyoriy $\Lambda \in \mathbb{C}[m \times m]$ uchun

$$e^{\Lambda A} f(A) \leftarrow F(Z - \Lambda)$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Isbot. Bevosita (1) formuladan foydalanib isbotlaymiz:

$$e^{\Lambda A} f(A) \leftarrow \int_0^{\infty} e^{-ZA} \cdot e^{\Lambda A} \cdot f(A) dA = \int_0^{\infty} e^{-(Z - \Lambda)A} \cdot f(A) dA = F(Z - \Lambda).$$

1-izox. 6-teoremasidan shunday xulosa kelib chiqadiki, $f(A)$ matritsaviy originalning $e^{\Lambda A}$ matritsa argumentli funksiyaga ko'paytirilishi $F(Z)$ matritsaviy tasvir argumenti Z matritsa o'zgaruvchini Λ matritsa o'zgaruvchiga siljishiga olib kelar ekan. Shuning uchun ham bu teorema siljish teoremasi deb nomlangan.

7-teorema (parametr bo'yicha differensiallash teoremasi). Agar

$T = [t_{ij}] \in \mathbb{C}[m \times m]$ parametrik matritsa uchun $f(A, T) \leftarrow F(Z, T)$ munosabat

o'rinli bo'lsa, u holda $\frac{\partial f(A, T)}{\partial t} \leftarrow \frac{\partial F(Z, T)}{\partial t}$ munosabat o'rinli bo'ladi.

$$F(Z, T) = \int_0^{\infty} e^{-ZA} f(A, T) dA$$

Isbot. Haqiqatdan ham, bo'lgani uchun matritsaviy integralni T parameter bo'yicha differensiallab,

$$\frac{\partial F(Z, T)}{\partial t} = \int_0^{\infty} e^{-ZA} \cdot \frac{\partial f(A, T)}{\partial t} dA$$

munosabatni hosil qilamiz. Bundan kelib chiqadiki:

$$\frac{\partial f(A, T)}{\partial t} = - \frac{\partial F(Z, T)}{\partial t}.$$

Bu xossa ko'plab tasvirlarni hosil qilish imkonini beradi.

8-teorema (*originalni differensiallash teoremasi*). Agar $f(A) \leftarrow \frac{1}{Z} F(Z)$ bo'lib, $f'(A)$ matritsaviy original bo'lsa, u holda

$$f'(A) \leftarrow \frac{1}{Z} F(Z) - f(0) \quad (13)$$

bo'ladi.

Isbot. Faraz qilamiz $f'(A)$ matritsaviy original bo'lsin deb. U holda $f'(A)$ uchun quyidagi matritsaviy Laplas almashtirishi o'rinli bo'ladi:

$$f'(A) \leftarrow \frac{1}{Z} \int_{A>0} f'(A) \cdot e^{-ZA} dA \quad (14)$$

(14) munosabatdagi matritsaviy integralda bo'laklab integrallash asosida $U = e^{-ZA}$ $dU = -Z \cdot e^{-ZA}$, $dV = f'(A)dA$, $V = f(A)$ deb belgilash kiritib:

$$f'(A) \leftarrow \frac{1}{Z} \left[f(A) \cdot e^{-ZA} \right]_{A>0} + \int_{A>0} f(A) \cdot e^{-ZA} dA \quad (15)$$

munosabatni ega bo'lamiz.

Hosil qilingan (15) munosabatdagi $f(A)$ uchun 1-ta'rifning III shartiga ko'ra $|f(A)| \leq M \cdot e^{\alpha A}$ tengsizlikka ega bo'lamiz. Shu sababli, agar $\text{Re } Z > \alpha$ bo'lsa va $A > 0$ da: $|f(A) \cdot e^{-ZA}| \leq M \cdot e^{(\alpha - \text{Re } Z)A} \rightarrow 0$ bo'ladi. Natijada (14)

moslikda birinchi qo'shiluvchidan $-f'(0)$ qoladi va (15) munosabat uzil-kesil ushbu ko'rinishni oladi:

$$f'(A) \leftarrow \frac{1}{Z} ZF(Z) - f'(0).$$

Xususiyl holda, agar $f'(0) = 0$ bo'lsa, u holda

$$f'(A) \leftarrow \frac{1}{Z} ZF(Z).$$

Teoremani takroran tatbiq etib, quyidagi mosliklarni hosil qilamiz:

$$f''(A) \leftarrow \frac{1}{Z} Z[ZF(Z) - f'(0)] - f''(0) = Z^2 F(Z) - Zf'(0) - f''(0),$$

$$f'''(A) \leftarrow \frac{1}{Z} Z[Z^2 F(Z) - Zf'(0) - f''(0)] - f'''(0) = Z^3 F(Z) - Z^2 f'(0) - Zf''(0) - f'''(0).$$

Umumiylikka zid kelmagan holda (13) formulani $(n-1)$ marta takroran qo'llash orqali quyidagi umumlashgan formulani hosil qilamiz:

$$f^{(n)}(A) \leftarrow \frac{1}{Z^n} Z^n F(Z) - Z^{n-1} f'(0) - Z^{n-2} f''(0) - Z^{n-3} f'''(0) - \dots - Zf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \quad (16)$$

Xususiyl holda funksiyaning va uning hosilalarining barcha boshlang'ich qiymatlari 0 -nol matritsaga teng bo'lsa:

$$f^{(n)}(A) \leftarrow \frac{1}{Z^n} Z^n F(Z)$$

moslikka ega bo'lamiz.

9-teorema (*originalni integrallash haqidagi teorema*). Agar

$f(A) \leftarrow \frac{1}{Z} F(Z)$ bo'lsa, u holda

$$\int_{0 < B < A} f(B) dB \leftarrow \frac{1}{Z} F(Z)$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Isbot. 8-teoremasi (*originalni differentsiallashtirish teoremasi*) ni $\int_{0 < B < A} f(B) dB$

maritsaviy originalga tatbiq etamiz va $\int_{0 < B < A} f(B) dB \leftarrow \frac{1}{Z} G(Z)$ deb belgilaymiz.

$$\left(\int_{0 < B < A} f(B) dB \right)' \leftarrow \frac{1}{Z} ZG(Z) - \int_{0 < B < 0} f(B) dB \quad (17)$$

(17) moslikda $\left(\int_{0 < B < A} f(B) dB \right)' = f(A)$ va $\int_{0 < B < 0} f(B) dB = 0$ ekanligini e'tiborga olsak bu moslik quyidagi ko'rinishni oladi:

$$f(A) \leftarrow \int_{0 < B < A} ZG(Z) \quad (18)$$

Biroq teorema shartiga ko'ra

$$f(A) \leftarrow \int_{0 < B < A} F(Z) \quad (19)$$

(18) va (19) munosabatlarni kelib chiqadiki $ZG(Z) = F(Z) \Rightarrow G(Z) = Z^{-1}F(Z)$.

Demak, $\int_{0 < B < A} f(B) dB \leftarrow \int_{0 < B < A} Z^{-1}F(Z)$ moslik o'rinli ekan.

10-teorema (tasvirni differensiallash teoremasi). Agar $f(A) \leftarrow \int_{0 < B < A} F(Z)$ bo'lsa, u holda

$$-Af(A) \leftarrow \int_{0 < B < A} F'(Z) \quad (20)$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Isbot. Teoremani isbotlashimiz uchun $F(Z) = \int_{A > 0} f(A) \cdot e^{-ZA} dA$ matritsaviy tasvir funksiyani Z matritsaviy parameter bo'yicha differensiallaymiz:

$$F'(Z) = \int_{A > 0} f(A)(-Z)e^{-ZA} dA.$$

Bundan kelib chiqadiki $-Af(A) \leftarrow \int_{0 < B < A} F'(Z)$ munosabat o'rinli ekan.

11-teorema (tasvirni integrallash teoremasi). Agar $f(A) \leftarrow \int_{0 < B < A} F(Z)$ bo'lib, $A^{-1}f(A)$ matritsaviy original tashkil qilsa, u holda

$$A^{-1}f(A) \leftarrow \int_{0 < W < Z} F(W) dW \quad (21)$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Isbot. Teorema shartiga ko'ra $A^{-1}f(A) \leftarrow \int_{0 < B < A} \Phi(Z)$. Endi $\Phi(Z)$ matritsaviy tasvir funksiyani differensiallaymiz:

$$\Phi'(Z) = - \int_{A>0} e^{-ZA} f(A) dA = -F(Z).$$

U holda

$$\Phi(Z) - \Phi(\Theta) = \int_{0 < W < Z} F(W) dW \quad (22)$$

(22) munosabatda $\Phi(\Theta) = 0$ ekanligini e'tiborga olsak

$$A^{-1} f(A) \leftarrow \int_{0 < W < Z} F(W) dW$$

munosabat kelib chiqadi.

Xulosa

Kompleks o'zgaruvchining funksiyalari nazariyasining muhim tushunchalaridan biri Laplas almashtirishi (operatsion hisob) asosida chiziqli differensial tenglamalarni integrallash usuli hisoblanadi. Laplas almashtirishi haqiqiy o'zgaruvchi funksiyalarni kompleks argumentli tasvir funksiyalari bilan bog'laydi.

Matritsa argumentli funksiyalar uchun ham operatsion hisob usullarini umumlashtirish masalalari muhim ahamiyat kasb qiladi. Bunday holda, matritsaviy tasvir funksiyalar ustidagi operatsiyalar orginal funksiyalar (asl nusxalar) bo'yicha operatsiyalarga qaraganda ancha sodda bo'lib chiqadi. Masalan, asl nusxa uchun chiziqli differensial tenglama uning tasviri bo'yicha algebraik tenglama bilan almashtiriladi. Tasvir uchun olingan tenglamani yechib, uning orginalini tasvir yordamida tiklanadi, bu berilgan differensial tenglamaning yechimi hisoblanadi.

Biz ushbu maqolada operatsion hisobning boshlang'ich fundamental tushunchalarini matritsaviy analiz ma'nosida umumlashtirdik va asosiy xossalarning matritsaviy analoglarini oldik. Keyingi ilmiy izlanishlarimizda albatta operatsion hisobning kiritilishiga ko'ra differensial hisobga tadbiqlarining matritsaviy umumlashmalarini olishga harakat qilamiz.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Gupta A.K., Nagar D.K., Matrix Variate Distributions, Monographs and surveys in pure and applied mathematics, Chapman, USA 2000, pp.18-27.
2. Хуа Ло-кен, Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях, М.: Изд-во иностр. лит., г.1959.
3. Joshi R.M. and Joshi J.M.C., Generalized Laplace transform with matrix variables, Internat. J. Math. & Math. Sci.Vol. 10, No.3 (1987) pp. 503-512.
4. Rajabov Sh.Sh., «Original uniqueness theorem for functions with matrix arguments», *Наука и технология в современном мире*, 2(7), (2023) сс. 38–39.
5. Rajabov Sh.Sh., Sharifboyev Sh.D., M.Sh.Rajabova M.Sh., Shift theorem for the problem of finding the original function in matrix argument functions, <https://conferencea.org> 2022, pp. 110-111.
6. Ражабов Ш.Ш., Задача коэффициентов Каратеодоре в $C[m \times m]$, Scientific Progress |Volume 2 | Issue 6 |ISSN: 2181-1601| 2021., ст. 761-763.
7. Rakhmonov U.S., Abdukarimov A., Rajabov Sh., Calculation of inherently deformable pipelines lying on a solid viscoelastic base with random characteristics, *AIP Conference Proceedings* 2612, 030016 (1-7) (2023) <https://doi.org/10.1063/5.0117526>