

ПОЛИДОИРАДА M -ГАРМОНИК ФУНКЦИЯЛАР

¹Мадрахимов Рузимбай Машарипович, ²Омонов Олим Исоқович

¹Тошкент давлат педагогика университети профессори

²Тошкент давлат педагогика университети ўқитувчиси

¹E-mail: mruzimbay@mail.ru

²E-mail: o.i.omonov@mail.ru

Аннотация. Ушбу мақолада U^n полидоирада $f(z)$ функция M - гармоник бўлса, $f^2(z)$ функция M - субгармониклиги исботланган. Бундан ташқари, $\tilde{\Delta}f(z) = \tilde{\Delta}f^\alpha(z) = 0$ ($\alpha \neq 0, \alpha \neq 1, \alpha \in \mathbb{R}$) бўлса, $f(z): U^n \rightarrow [0, \infty)$ функция n -гармониклиги исботланган.

Калит сўзлар: голоморф функция, гармоник функция, субгармоник функция, n -гармоник функция, n -субгармоник функция, плюригармоник функция, плюрисубгармоник функция, M - гармоник функция, M - субгармоник функция.

M -ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ В ПОЛИКРУГЕ

¹Мадрахимов Рузимбай Машарипович, ²Омонов Олим Исоқович

¹Профессор Ташкентского государственного педагогического университета

²Преподаватель Ташкентского государственного педагогического университета

¹E-mail: mruzimbay@mail.ru

²E-mail: o.i.omonov@mail.ru

Аннотация. В работе доказано, что если функция $f(z)$ M - гармонична в поликруге U^n , то функция $f^2(z)$ является M - субгармоничной. Кроме того, в случае $\tilde{\Delta}f(z) = \tilde{\Delta}f^\alpha(z) = 0$

$(\alpha \neq 0, \alpha \neq 1, \alpha \in \mathbb{R})$ доказано, что $f(z): U^n \rightarrow [0, \infty)$ является n -гармоничной функцией.

Ключевые слова: голоморфная функция, гармонические функции, субгармонические функции, n -гармоничные функции, n -субгармоничные функции, плюригармонические функции, плюрисубгармонические функции, M -гармонические функции, M -субгармонические функции.

M -HARMONIC FUNCTIONS IN POLYDISC

¹MadraKhimov Ruzimbay Masharipovich, ²Omonov Olim Isoqovich

¹Professor of Tashkent State Pedagogical University

²Lecturer at Tashkent State Pedagogical University

¹E-mail: mruzimbay@mail.ru

²E-mail: o.i.omonov@mail.ru

Annotation. It is proved in the paper that if a function $f(z)$ is M -harmonic in a polydisk U^n , then the function $f^2(z)$ is M -subharmonic. In addition, the case is $\tilde{\Delta} f(z) = \tilde{\Delta} f^\alpha(z) = 0$ ($\alpha \neq 0, \alpha \neq 1, \alpha \in \mathbb{R}$) proved to $f(z): U^n \rightarrow [0, \infty)$ be a n -harmonic function.

Key words: holomorphic function, harmonic function, subharmonic function, n -harmonic function, n -subharmonic function, pluriharmonic function, plurisubharmonic function, M -harmonic function, M -subharmonic function.

1. Введение. Хорошо известно, что функция $f(z) \in C^2(G)$ называется гармонической (субгармонической) в области $G \subset \mathbb{C}^n$ (G - фиксированная область в $\mathbb{C}^n$), если она всюду в G удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta f(z)=0 \quad (\Delta f(z)\geq 0), \text{ где } \Delta f(z)=4\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f(z)}{\partial z_i \partial \bar{z}_i}.$$

Функция $f(z)$ называется n -гармонической (n -субгармонической), если $f(z)$ -гармоническая ($f(z)$ -субгармоническая) по каждому переменному в отдельности. Функция $f(z)$ должна удовлетворять n уравнениям $\Delta_j f(z)=0$ (неравенствам $\Delta_j f(z)\geq 0$) ($j=1,\dots,n$).

Поскольку наша основная работа связана с автоморфизмами на поликругах, мы приводим основные свойства автоморфизмов на этих поликругах U^n . U^n - открытый единичный поликруг в $\mathbb{C}^n$ ($U^n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_v| < 1, v=1,\dots,n\}$, $\partial U^n = \{w \in \mathbb{C}^n : |w_v| = 1, v=1,\dots,n\}$).

Известно, что для $a \in U$ мы обозначаем биголоморфное отображение $\varphi_a(z)$, заданное $\varphi_a(z) = \frac{a - z}{1 - \bar{a}z}$, в единичный круг $U \subset \mathbb{C}$. Эти отображения известны как преобразования Мебиуса U . Легко показать, что отображение $\varphi_a(z)$ удовлетворяет $\varphi_a(0) = a$, $\varphi_a(a) = 0$ и $\varphi_a^{-1} = \varphi_a$.

Подгруппу автоморфизмов этого поликруга, составляют, очевидно, дробно-линейные преобразования

$$\varphi_v(z) = e^{i\theta_v} \frac{z_v - a_v}{1 - \bar{a}_v z_v} \quad (v=1,\dots,n) \quad (1),$$

где a_v , $|a_v| < 1$, -комплексные, а θ_v - действительные числа.

При $n > 1$ к этим преобразованиям можно добавить еще те, которые получаются из них дополнительной перестановкой переменных $\varphi_v(z) \rightarrow \varphi_\mu(z)$, где $\mu = \mu(v)$ - взаимно однозначное отображение множества $\{1, 2, \dots, n\}$ на себя.

Любой автоморфизм поликруга $U^n \subset \mathbb{C}^n$ имеет вид (1) или получается из (1) перестановкой переменных $\varphi_v(z) \rightarrow \varphi_\mu(z)$. [1]

Группа автоморфизмов $Aut(U^n)$ характеризуется следующим образом: пусть $\psi \in Aut(U^n)$. Тогда существуют $a_1, a_2, \dots, a_n \in U^n$, $\theta_i \in [0, 2\pi)$ и перестановка σ из $\{1, 2, \dots, n\}$ такие, что

$$\psi = \left(e^{i\theta_1} \frac{a_1 - z_{\sigma(1)}}{1 - \bar{a}_1 z_{\sigma(1)}}, e^{i\theta_2} \frac{a_2 - z_{\sigma(2)}}{1 - \bar{a}_2 z_{\sigma(2)}}, \dots, e^{i\theta_n} \frac{a_n - z_{\sigma(n)}}{1 - \bar{a}_n z_{\sigma(n)}} \right).$$

Компонента связности G единицы $Aut(U^n)$ - это подгруппа, заданная всеми автоморфизмами из

$$\psi(z) = (e^{i\theta_1} \varphi_{a_1}(z), e^{i\theta_2} \varphi_{a_2}(z), \dots, e^{i\theta_n} \varphi_{a_n}(z)),$$

где $\varphi_{a_j}(z)$ - обычное преобразование Мебиуса U .

Если функция $f(z)$ является n -субгармоничной на U и $\varphi_a(z) = (\varphi_{a_1}(z_1), \varphi_{a_2}(z_2), \dots, \varphi_{a_n}(z_n)) \in G$, то $f \circ \varphi_a$ также является n -субгармоничной для всех $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in U^n$. [4]

Инвариантный оператор Лапласа $\tilde{\Delta}$ функций на дважды гладких в U^n определяется следующим образом:

$$\tilde{\Delta} f(z) = \Delta(f \circ \varphi_z)(0)$$

где $z \in U^n$, Δ - обычный лапласиан. Оператор $\tilde{\Delta}$ называется инвариантным, потому что он коммутирует с автоморфизмами поликруга U^n в следующем смысле: $\tilde{\Delta}(f \circ \varphi) = (\tilde{\Delta} f) \circ \varphi$, где $f(z) \in C^2(G)$ ($G \subset U^n$), а φ - любой биголоморфный автоморфизм поликруга U^n . [2]

Для произвольного $\lambda \in \mathbb{C}$ обозначим через X_λ пространство всех функций $f(z) \in C^2(U^n)$, удовлетворяющих уравнению

$$\tilde{\Delta} f(z) = \lambda \cdot f(z).$$

Случай $\lambda = 0$ наиболее интересен. Элементы пространства X_0 мы будем называть M -гармоническими функциями.

Определение 1.1. Функция $f(z) \in C^2(U^n)$ называется M -гармонической (M -субгармонической) в U^n , если $\tilde{\Delta} f(z) = 0$ ($\tilde{\Delta} f(z) \geq 0$),

где $\tilde{\Delta} f(z) = 2 \sum_{j=1}^n (1 - |z_j|^2)^2 \frac{\partial^2 f(z)}{\partial z_j \partial \bar{z}_j}$ инвариантный лапласиан в U^n . [4]

Совершенно ясно, что каждая n -гармоничная функция $f(z)$ в U^n удовлетворяет $\Delta f(z) = \tilde{\Delta} f(z) = 0$.

Заметим, что если функция $f(z)$ является $\tilde{\Delta}_j f(z) = 0$ (для всех $j = 1, \dots, n$), то она n -гармонична в U^n . Приведен пример функции, удовлетворяющей равенству $\tilde{\Delta}_{U^n} f(z) = 0$, но не являющейся n -гармоничной на U^n . [4]

Р.М. Мадрахимов в работе [6] получил следующий результат: если функция $f(z)$ гармоническая и M -субгармоническая в U^n , то $f(z)$ n -гармонична в U^n .

Вопрос. Если функция $f(z)$ является гармонической в B , то является ли гармонической функция $f^2(z)$?

Ответ на этот вопрос отрицательный, как показывает следующий пример функция $f(z) = z_1 \bar{z}_1 - z_2 \bar{z}_2$, $z \in \mathbb{C}^2$.

Поскольку $\Delta f(z) = 0$ в $\mathbb{C}^2$, и $\Delta f^2(z) = 8(z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2)$, то функция $f^2(z)$ не является гармонической в $\mathbb{C}^2 \cap \{z_1 \neq 0 \text{ или } z_2 \neq 0\}$.

Если мы рассмотрим дополнительные условия на M -гармоническую функцию и аналогичный вопрос в поликруге, то получим следующие результаты.

2. Основные результаты работы.

Теорема 2.1. Если функция $f(z)$ M -гармоническая в U^n , то $f^2(z)$ M -субгармоническая в U^n .

Доказательство. Для функции $f^2(z)$ инвариантный лапласиан имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta} f^2(z) &= 2 \sum_{j=1}^n (1 - |z_j|^2)^2 \frac{\partial^2 f^2(z)}{\partial z_j \partial \bar{z}_j} = \\ &= 2 \sum_{j=1}^n (1 - |z_j|^2)^2 \left(2 \frac{\partial f(z)}{\partial z_j} \cdot \frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}_j} + 2 f(z) \frac{\partial^2 f(z)}{\partial z_j \partial \bar{z}_j} \right) = \\ &= 4 \sum_{j=1}^n (1 - |z_j|^2)^2 \frac{\partial f(z)}{\partial z_j} \cdot \frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}_j} + 4 f(z) \sum_{j=1}^n (1 - |z_j|^2)^2 \frac{\partial^2 f(z)}{\partial z_j \partial \bar{z}_j} = \\ &= 4 \sum_{j=1}^n (1 - |z_j|^2)^2 \frac{\partial f(z)}{\partial z_j} \cdot \frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}_j}.\end{aligned}$$

По условию теоремы $\Delta f(z) = 2 \sum_{j=1}^n (1 - |z_j|^2)^2 \frac{\partial^2 f(z)}{\partial z_j \partial \bar{z}_j} = 0$ и если $f(z)$ -

вещественная функция, то $\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}_j} = \overline{\frac{\partial f(z)}{\partial z_j}}$. Из следующих двух равенств

$$\tilde{\Delta} f^2(z) = 4 \sum_{j=1}^n (1 - |z_j|^2)^2 \frac{\partial f(z)}{\partial z_j} \cdot \frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}_j} = 4 \sum_{j=1}^n (1 - |z_j|^2)^2 \left| \frac{\partial f(z)}{\partial z_j} \right|^2$$

вытекает, что

для $\forall z_j \in U^n \quad (j = 1, \dots, n)$ при $1 - |z_j|^2 > 0$ и $\left| \frac{\partial f(z)}{\partial z_j} \right|^2 \geq 0$, то $\tilde{\Delta} f^2(z) \geq 0$.

Значит, функция $f^2(z)$ - M -субгармоническая функция.

Теорема 2.2. Если для функции $f(z): U^n \rightarrow [0, \infty)$ выполняются $\tilde{\Delta} f(z) = \tilde{\Delta} f^\alpha(z) = 0 \quad (\alpha \neq 0, \alpha \neq 1, \alpha \in \mathbb{R})$ в $U^n \subset \mathbb{C}^n$, то функция $f(z)$ является n -гармонической функцией в U^n .

Доказательство. Для функции $f^\alpha(z)$ инвариант оператора Лапласа имеет вид:

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta} f^\alpha(z) &= 2 \sum_{j=1}^n \left(1 - |z_j|^2\right)^2 \frac{\partial^2 f^\alpha(z)}{\partial z_j \partial \bar{z}_j} = \\ &= 2 \sum_{j=1}^n \left(1 - |z_j|^2\right)^2 \left(\alpha(\alpha-1) f^{\alpha-2}(z) \frac{\partial f(z)}{\partial z_j} \cdot \frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}_j} + \alpha f^{\alpha-1}(z) \frac{\partial^2 f(z)}{\partial z_j \partial \bar{z}_j} \right) = \\ &= 2\alpha(\alpha-1) f^{\alpha-2}(z) \sum_{j=1}^n \left(1 - |z_j|^2\right)^2 \frac{\partial f(z)}{\partial z_j} \cdot \frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}_j} + \\ &+ 2\alpha f^{\alpha-1}(z) \sum_{j=1}^n \left(1 - |z_j|^2\right)^2 \frac{\partial^2 f(z)}{\partial z_j \partial \bar{z}_j} = 0.\end{aligned}$$

Из условия теоремы $\Delta f(z) = 2 \sum_{j=1}^n \left(1 - |z_j|^2\right)^2 \frac{\partial^2 f(z)}{\partial z_j \partial \bar{z}_j} = 0$ и $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$,

$\alpha \in \mathbb{R}$ вытекает, что $f^{\alpha-2}(z) \sum_{j=1}^n \left(1 - |z_j|^2\right)^2 \frac{\partial f(z)}{\partial z_j} \cdot \frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}_j} = 0$. Отсюда

получаем $\sum_{j=1}^n \left(1 - |z_j|^2\right)^2 \frac{\partial f(z)}{\partial z_j} \cdot \frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}_j} = 0$ для функции $f(z) \neq 0$. Известно,

что если $f(z)$ - вещественная функция, то $\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}_j} = \overline{\frac{\partial f(z)}{\partial z_j}}$. Значит,

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^n \left(1 - |z_j|^2\right)^2 \frac{\partial f(z)}{\partial z_j} \cdot \frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}_j} = \\ &= \sum_{j=1}^n \left(1 - |z_j|^2\right)^2 \frac{\partial f(z)}{\partial z_j} \cdot \overline{\frac{\partial f(z)}{\partial z_j}} = \sum_{j=1}^n \left(1 - |z_j|^2\right)^2 \left| \frac{\partial f(z)}{\partial z_j} \right|^2 = 0.\end{aligned}$$

Для $\forall z_j \in U^n \ (j = 1, \dots, n) \ 1 - |z_j|^2 > 0$. Тогда $\left| \frac{\partial f(z)}{\partial z_j} \right|^2 = \frac{\partial f(z)}{\partial z_j} \cdot \frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}_j} = 0$.

Отсюда вытекает, что $\frac{\partial f(z)}{\partial z_j} = 0$ или $\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}_j} = 0$. Тогда, $\frac{\partial^2 f(z)}{\partial z_j \partial \bar{z}_j} = 0$. Значит, функция $f(z)$ является n -гармоничной.

Литература

- [1] Шабат Б.В. «Введение в комплексный анализ» Ч. 2. М. Наука. 1976.-321 с.
- [2] Рудин У. Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$. // М. Мир. 1984.-457 с.
- [3] Rudin Walter. Pluriharmonic function in balls // Proceedings of the American Mathematical Society. 1977, V.62, №1, pp. 44-46.
- [4] Stoll M., Invariant potential theory in the unit ball of $\mathbb{C}^n$, London Mathematical Society Lecture Note Series, 199. Cambridge University Press, Cambridge. 2003.-181.
- [5] Hong Oh Kim M -harmonic functions with M -harmonic square Austral. Math. Soc Vol 53(1996) [123-129].
- [6] Madrakhimov R.M., Vaisova M.D. Criteria n -harmonicity and pluriharmonicity of harmonic functions // УзМЖ. – Ташкент, 2009. – №1. – С.107-111
- [7] Мадраҳимов Р.М., Омонов О.И. Плюригармоничность M -гармонических функций, // Илм сарчашмалари – Урганч-2018-12, ст. 12-14.