

Differential game of two pursuers and one evader on a truncated tetrahedron

Ibragimov Gafurjan Ismailovich
V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences,
100174, Tashkent, Uzbekistan
Call number: +998941534666 E-mail address: *ibragimov.math@gmail.com*

Xasanjonova Nozimaxon Umidjon qizi
Andijan state university
Call number: +998997863033 E-mail address: *nozimaxonkhasanjonova@gmail.com*

Abstract. In this paper, we consider a differential game of two pursuers and one evader on a truncated tetrahedron. The maximum speed of a pursuer and an evader is $\rho_1=1$ and the maximum speed of the second pursuer is $1/2 \leq \rho_2 \leq 1$. If the state of a pursuer coincides with the state of evader, the evader is considered captured. It is proved that pursuers can capture the evader from any initial states of the players on the edges of truncated tetrahedron. In addition, pursuit strategies that guarantee the completion of pursuit are constructed.

Key words: Edge graph of polyhedron, differential game, pursuer, evader, strategy.

Дифференциальная игра двух преследователей и одного убегающего на усеченном тетраэдре

Ибрагимов Гафуржан Исмаилович
Институт математики имени В.И.Романовского Академии наук Узбекистана,
100174, г. Ташкент, Узбекистан
Тел: +998941534666 E-mail address: *ibragimov.math@gmail.com*

Хасанджонова Нозимахон Умиджон қизи
Андижанского государственного университета
Тел: +998997863033 E-mail address: *nozimaxonkhasanjonova@gmail.com*

Аннотация. В настоящей статье мы рассмотрим дифференциальную игру двух преследователей и одного убегающего на реберном графе усеченного

тетраэдра. Максимальная скорость одного преследователя и убегающего равна $\rho_1=1$, а максимальная скорость второго преследователя равна $1/2 \leq \rho_2 \leq 1$. Если геометрические состояния одного преследователя и убегающего совпадают, то убегающий считается пойманным. Доказано, что для любых начальных состояний игроков преследующие могут поймать убегающего в игре на ребрах усеченного тетраэдра. Кроме того, для преследующих построены стратегии гарантирующие поимку.

Ключевые слова: Реберный граф многогранника, дифференциальная игра, преследующий, убегающий, стратегия.

Kesik tetraedrda ikki quvlovchi va bir qochuvchining differensial o'yini

Ibragimov Gafurjan Ismailovich
Fiz.-mat. f.d. Professor, V.I.Romanovskiy Nomidagi Matematika Instituti
Tel: +998941534666 E-mail address: *ibragimov.math@gmail.com*

Xasanjonova Nozimaxon Umidjon qizi
Andijon Davlat Universiteti
Tel: +998997863033 E-mail address: *nozimaxonkhasanjonova@gmail.com*

Annatatsiya. Ushbu maqolada kesik tetraedr qirralari bo'ylab harakatlanuvchi ikki quvlovchi va bir qochuvchining quvlash differensial o'yinini o'rganilgan. Qochuvchining va bir quvlovchining maksimal tezligi $\rho_1=1$ ga, ikkinchi quvlovchining maksimal tezligi esa $1/2 \leq \rho_2 \leq 1$ ga teng. Agar biror quvlovchi va qochuvchining geometrik holatlari ustma-ust tushsa, qochuvchi tutilgan hisoblanadi. O'yinchilarning kesik tetraedr qirralaridagi ixtiyoriy boshlang'ich holatlari uchun qochuvchini tutish mumkinligi isbotlangan. Bundan tashqari, quvlovchilar uchun tutish strategiyalari ham qurilgan.

Kalitso'zlar: Ko'pyoq grafi, differensial o'yin, quvlovchi, qochuvchi, strategiya.

Kirish

Differensial o'yin tushunchasi birinchi bo'lib amerikalik matematik Rufus Isaacs tomonidan [1] kiritilgan. Pontryagin [2] va Krasovskii [3] lar differensial o'yinlar nazariyasining formalizatsiyasini yaratishga fundamental hissa qo'shishgan. Bu nazariya Azamov [4], Chikrii [5], Fleming [6], Friedman [7], Petrosyan [8], Satimov [9] kabi tadqiqodchilar tomonidan chuqur natijalar olinib rivojlantirildi.

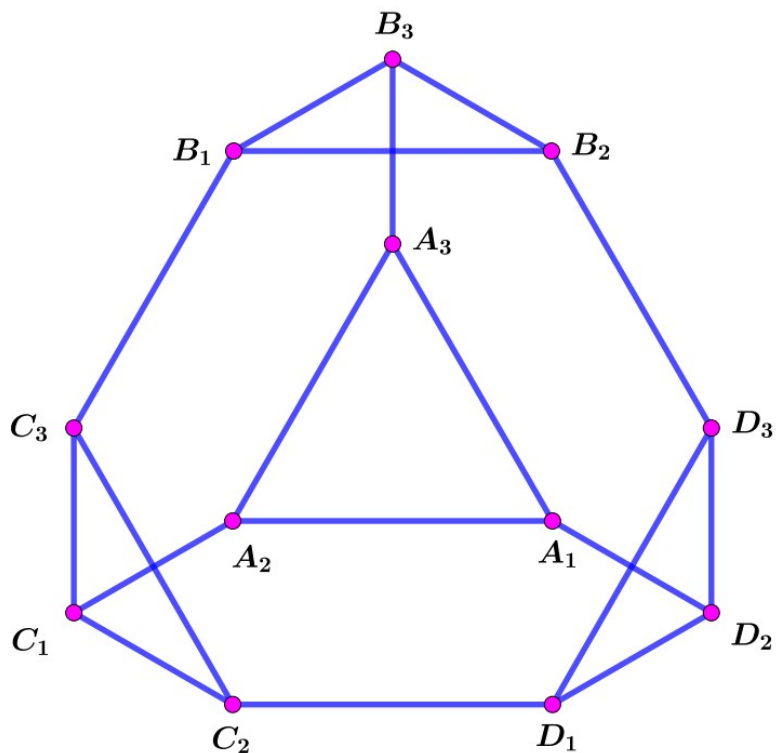
Hozirgi vaqtda differensial o'yinlar sohasida qizg'in muhokama qilinayotgan eng dolzarb masalalardan biri ko'p quvlovchili differensial o'yinlarga oid masalalardir. Bunday differensial o'yinlarga bag'ishlangan Chernousko [10], Pshenichni [11] kabi ishlardan ko'p quvlovchili differensial o'yinlar o'zining dastlabki etaplaridayoq tez rivojlanganini kuzatish mumkin.

Oxirgi yillarda ko'pquvlovchili differensial o'yinlarga qiziqish yanada ortib borayotganini, masalan, quyidagi maqolalardan ham ko'rish mumkin: Patsko v.b. [12], Ibragimov v.b. [13], Ibragimov va Salleh [14], Blagodtskix va Petrov [15], Azamov v.b. [16], Ramana va Mangal [17], Sun va Tsiotras [18], Ibragimov v.b. [19], Ibragimov [20], Garcia v.b. [21].

Ushbu [7] maqolada qaralgan differensial o'yinlarda hujumchi va himoya qiluvchilar guruhidan tashqari hujumchi nishonga oladigan maydon ham bo'ladi. Hujumchining maqsadi himoya qiluvchilar guruhiga tutilmay o'sha maydonga yetib borishdan iboratdir. Himoya qiluvchilar guruhining maqsadi esa hujumchini u maydonga kiritmaslik, yoki kirishiga imkon boricha halaqit berishdir.

Ushbu [20] maqolada R^n da ko'p quvlovchili va bir qochuvchili differensial o'yin qaralgan. Quvlovchilarning tezliklari qochuvchining tezligidan kichik. Quvlovchilarning soni nechta (chekli) bo'lishiga qaramay va ular qochuvchini o'rab turganmi yoki yo'qligiga qaramay, qochuvchi uchun quvlovchilarga tutilmay qochib ketish strategiyasi qurilgan.

Differensial o'yinlarning yana bir turi bu graflardagi differensial o'yinlardir. Bunday differensial o'yinlarda o'yinchilar grafning qirralari bo'ylab harakat qilishadi. Bunday o'yinlar, masalan, [22], [23] maqolalarda qaralgan.



1-rasm. K kesik tetraedr.

Ushbu [23] maqolada $d+1$ -o'lchamli kokubning qirralaridagi quvlash va qochib ketish differensial o'yinlari o'rganilgan va qochuvchini tutish uchun quvlovchilarning optimal soni topilgan.

Joriy maqolada kesik tetraedr K (1-rasm) qirralari bo'ylab quvlash differensial o'yinini o'rganiladi. Barcha o'yinchilar kesik tetraedrning qirralari bo'ylab harakat qilishadi. Ixtiyoriy boshlang'ich holatdan o'yinni tugatish uchun quvlovchilarning tezliklariga shart olingan. Bundan tashqari, quvlovchilar uchun tutish strategiyalari ham qurilgan.

Masalaning qo'yilishi

Quyidagi

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= u_i, & x_i(0) &= x_{i0}, i=1,2, \\ \dot{y} &= v, & y(0) &= y_0,\end{aligned}\tag{1}$$

Tenglamalar bilan beriladigan ikkita x_1, x_2 quvlovchilar va bitta y qochuvchining differensial o'yinini qaraymiz, bunda $x_{i0}, y_0 \in K, x_{i0} \neq y_0, i=1,2$; u_i – i -quvlovchining, v esa qochuvchining boshqaruv parametri. Barcha o'yinchilar kesik tetraedr K ning qirralari bo'ylab harakatlanadi, x_1, x_2 quvlovchilarning maksimal tezliklari, mos ravishda, ρ_1, ρ_2 larga, y qochuvchining maksimal tezligi esa σ ga teng, ya'ni $|u_i| \leq \rho_i, i=1,2, |v| \leq \sigma$.

Ta'rif 1. Agar ushbu

$$\dot{x}_i = u_i, x_i(0) = x_{i0},$$

Koshi masalasining $x_i(\cdot)$ yechimi $x_i(t) \in K, t \geq 0$, shartni qanoatlantirsa, $u_i(\cdot), u_i: \dot{t} \rightarrow B(\rho_i)$, funksiya $x_i, i \in \{1,2\}$, quvlovchining joiz boshqaruvi deyiladi.

Ta'rif 2. Agar ushbu

$$\dot{y} = v, y(0) = y_0,$$

Koshi masalasining $y(\cdot)$ yechimi $y(t) \in K, t \geq 0$, shartni qanoatlantirsa, $v(\cdot), v: \dot{t} \rightarrow B(\sigma)$ funksiya y qochuvchining joiz boshqaruvi deyiladi.

Biz quvlash differensial o'yinini qaraymiz. Bunday differensial o'yinlarda quvlovchilar biror strategiyalarni qo'llaydi, qochuvchi esa ixtiyoriy joiz boshqaruvni qo'llaydi.

Endi quvlovchilarning strategiyalariga ta'rif beramiz.

Ta'rif 3. Agar $u_i = U_i(t, x_1, x_2, y, v), i=1,2$, funksiyalar va qochuvchining ixtiyoriy $v = v(t)$ joiz boshqaruvi uchun (1) Koshi masalasi yagona $x_1(t), x_2(t), y(t) \in K$,

$t \geq 0$, yechimga ega bo'lsa, $(t, x_1, x_2, y, v) \rightarrow U_i(t, x_1, x_2, y, v)$, $i=1,2$, funksiyalar mos ravishda x_i , $i=1,2$, quvlovchilarning strategiyalari deyiladi.

Ta'rif 4. Agar o'yinchilarning ixtiyoriy boshlang'ich holatlari uchun quvlovchilarning shunday strategiyalari topilib, biror $\tau \geq 0$ va $i \in \{1,2\}$ da $x_i(\tau) = y(\tau)$ bo'lsa, u holda quvlash tugadi yoki qochuvchi tutildi deb aytamiz.

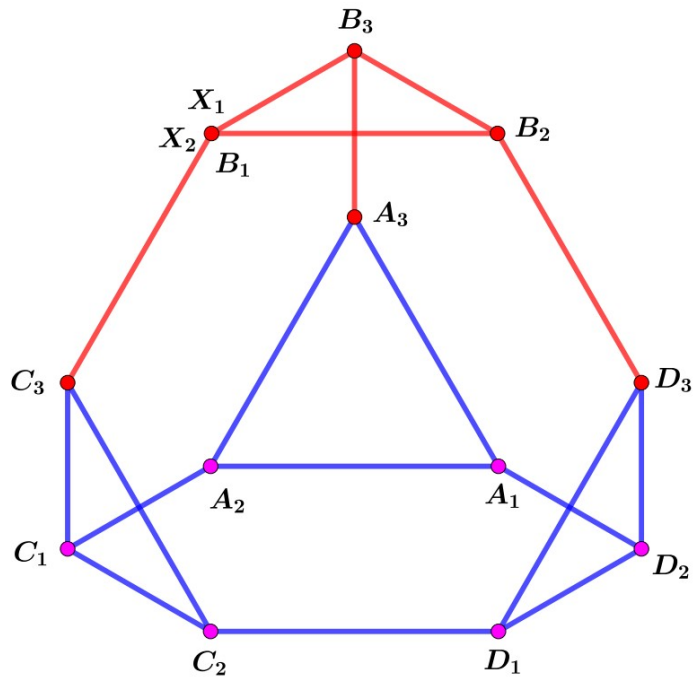
Quvlovchilar mumkin qadar o'yinni tez tugallashga harakat qilishadi. Qochuvchi esa iloji boricha o'yinda quvlash tugashini kechiktirishga harakat qiladi.

Masala quvlovchilarga quvlashni tugatishni kafolatlaydigan strategiyalar qurishdan iborat.

Asosiy natija

Teorema 1. Agar $\rho_1 = 1$ va $1/2 \leq \rho_1 \leq 1$ bo'lsa, u holda kesik tetraedr K ning qirralari ustida qaralayotgan o'yinda quvlashni tugatish mumkin.

Isbot. Quvlovchilar geometrik holatlarini X_1 , X_2 , qochuvchi vaziyatini esa Y bilan belgilaylik. Teoremani isbotlash uchun X_1 quvlovchining maksimal tezligi 1 ga, X_2 quvlovchining maksimal tezligi tezligi 1/2 teng bo'lgan holni qarashimiz yetarli.



2-rasm X_1 va X_2 quvlovchilar B_1 uchda.

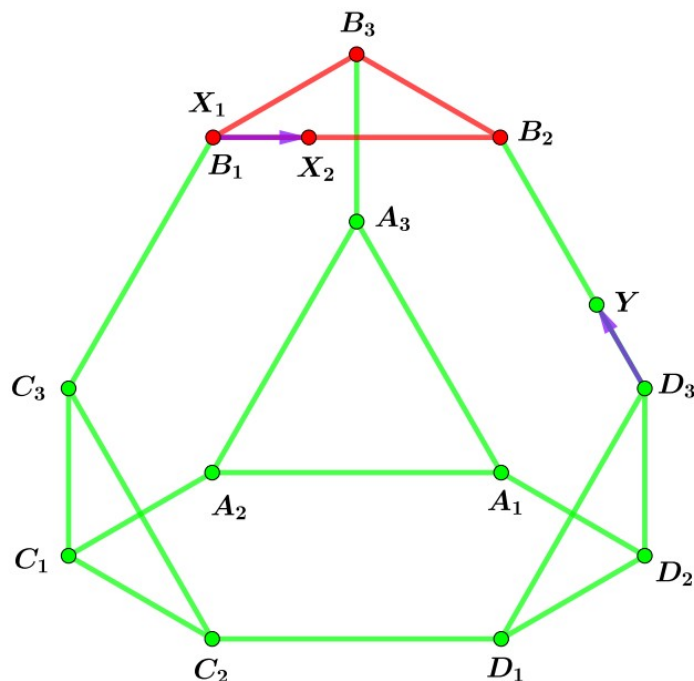
Endi quvlovchilarga qochuvchini tutish uchun strategiyalar quramiz.

A. Dastlab X_1 va X_2 quvlovchilar qochuvchini K kesik tetraedrning 2-rasmda qizil rangda ko'rsatilgan $B_1B_2B_3$ uchburchagi va B_1C_3 , B_2D_3 , B_3A_3 qirralaridan chiqarib yuboradi. Buning uchun quvlovchilar biror t_1 vaqtda kesik tetraedrning B_1 uchiga kelishsin va X_1 quvlovchi shu uchda vaqtincha harakatlanmay tursin.

Agar qochuvchi t_1 vaqtda B_1C_3 qirrada bo'lsa, X_2 quvlovchi bu qirra bo'ylab C_3 ga harakat qilib qochuvchini tutadi, yoki uni bu qirradan chiqarib yuboradi. Agar qochuvchi t_1 vaqtda B_1C_3 qirrada bo'lmasa, X_2 quvlovchi $B_1B_2B_3$ uchburchak bo'ylab soat strelkasi yo'nalishiga qarama-qarshi yo'nalishda aylansin.

Agar X_2 quvlovchi B_2 uchga kelganda qochuvchi B_2D_3 qirrada bo'lsa, X_2 quvlovchi D_3 uch tomon yuradi va qochuvchini B_2D_3 qirradan chiqarib yuboradi. Agar X_2 quvlovchi B_3 uchga kelganda qochuvchi B_3B_1 qirrada bo'lsa, u holda qochuvchi X_1 va X_2 ga qamalib qolgan bo'ladi va X_2 quvlovchi B_1 tomon harakat qilib qochuvchini tutadi.

Agar X_2 quvlovchi B_3 uchga kelganda qochuvchi B_3A_3 qirrada bo'lsa, X_2 quvlovchi A_3 uch tomon yuradi va qochuvchini B_3A_3 qirradan chiqarib yuboradi. Demak quvlovchilar qochuvchini biror t_2 vaqtda $B_1B_2B_3$ uchburchak va B_1C_3 , B_2D_3 , B_3A_3 qirralaridan chiqarib yubora oladi ekan.



3-rasm. X_1 quvlovchi $B_1X_1=D_3Y$ tenglikni saqlab harakatlanyapti.

B_1 uchdagi X_1 quvlovchi t_2 vaqtdan boshlab qochuvchini $B_1B_2B_3$ uchburchakka keltirmay yura oladi. Chindan ham qochuvchi B_1, B_2, B_3 uchlarga faqat C_3, D_3, A_3 uchlar orqali kela oladi. Agar biror vaqtda qochuvchi D_3 ga kelib B_2 uch tomon harakat qilsa, X_1 quvlovchi shu vaqtdan boshlab $B_1X_1=D_3Y$ tenglikni saqlagan holda B_1B_2 qirrada harakat qiladi (3-rasm). Agar qochuvchi B_2D_3 qirra bo'ylab D_3 ga kelsa, $B_1X_1=D_3Y$ tenglikka ko'ra X_1 quvlovchi B_1 ga keladi; endi agar qochuvchi B_2D_3 qirradan chiqib ketsa, X_1 quvlovchi B_1 da yana harakatlanmay turadi.

Agar biror vaqtda qochuvchi A_3 ga kelib B_3 uch tomon harakat qilsa, X_1 quvlovchi shu vaqtdan boshlab $B_1X_1=B_3Y$ tenglikni saqlagan holda B_1B_3 qirrada harakat qiladi. Agar qochuvchi A_3B_3 qirradan chiqib ketsa, X_1 quvlovchi B_1 da yana

B. C_3C_1 , C_3C_2 , C_3B_1 qirralardan tuzilgan uch-yulduzni $S(C_3)$ bilan, D_3D_1 , D_3D_2 , D_3B_2 qirralardan tuzilgan uch-yulduzni $S(D_3)$ bilan, A_3A_1 , A_3A_2 , A_3B_3 qirralardan tuzilgan uch-yulduzni $S(A_3)$ bilan belgilaylik.

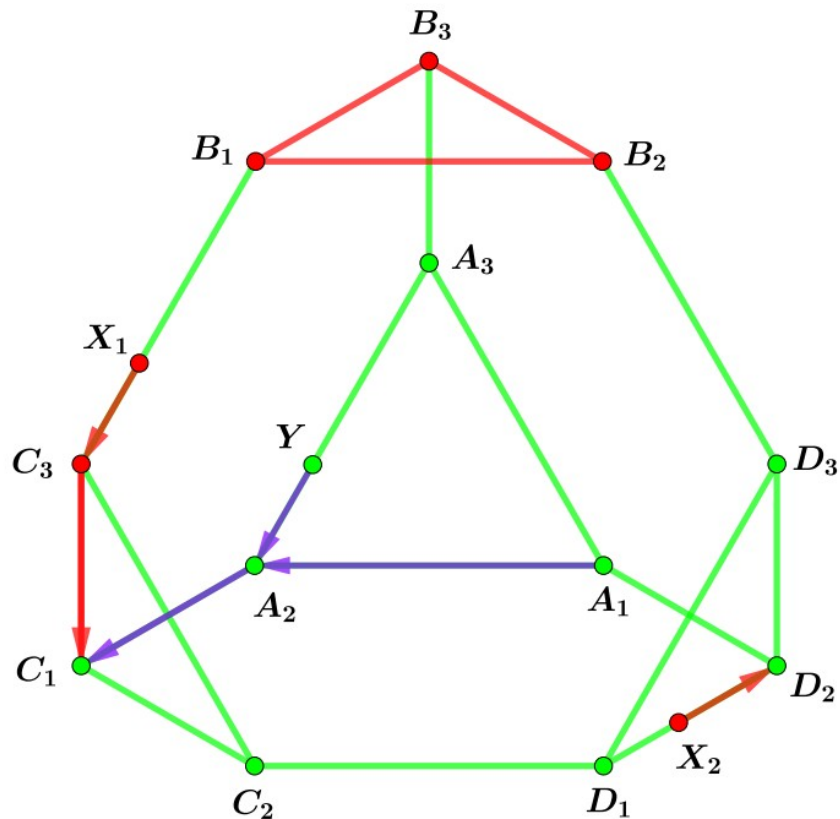


X_2 quvlovchi C_1C_2 qirra bo'ylab harakatlanayotganida qochuvchi $S(C_3)$ uch-yulduzda chiqib ketmasa, ravshanki biror t_4 vaqtda X_2 quvlovchi Y qochuvchining C_1C_2 qirradagi Y' proyeksiyasi ustiga keladi (4-rasm). Shu vaqtdan boshlab X_2 quvlovchi C_1C_2 qirra bo'ylab Y' proyeksiyasi ustida, ya'ni $X_2=Y'$ tenglikni saqlagan

holda harakatlansin. Bunda X_2 quvlovchi qochuvchini C_1 va C_2 uchlarga keltirmaydi, chunki qochuvchi C_1 yoki C_2 uchga kelganida X_2 quvlovchi ham o'sha uchda bo'ladi.

Agar t_4 vaqtdan boshlab X_1 quvlovchi B_1C_3 qirra orqali Y tomon yursa, Y qochuvchi $S(C_3)$ uch-yulduzda qamalib qolgani uchun biror vaqtda tutiladi.

Huddi shuningdek agar X_2 quvlovchi D_1D_2 qirra bo'ylab harakatlanayotganida qochuvchi $S(D_3)$ uch-yulduzdan chiqib ketmasa, yoki X_2 quvlovchi A_1A_2 qirra bo'ylab harakatlanayotganida qochuvchi $S(A_3)$ uch-yulduzdan chiqib ketmasa, u albatta tutilishini ko'rsatish mumkin.



5-rasm. K kesik tetraedr.

Agar X_2 quvlovchi C_1C_2 , D_1D_2 , A_1A_2 qirralar bo'ylab harakatlanayotganida qochuvchi mos ravishda $S(C_3)$, $S(D_3)$, $S(A_3)$ uch-yulduzlarda qolib ketmasa, u holda qochuvchi biror vaqtda A_1 orqali o'tib C_1 uchga kelishga majbur.

C_1 uchga esa A_1 uch orqali, yoki A_3 uch orqali o'tib kelishi mumkin xolos. Qochuvchi biron t_5 vaqtdan boshlab, A_1 yoki A_3 nuqtalardan C_1 uch tomonga $S(A_2)$ uch-yulduz bo'yab harakatlana boshlasin. U holda t_5 vaqtdan boshlab B_1 uchdagi X_1 quvlovchi $X_1 C_1 = Y C_1$ tenglikni saqlagan holda harakatlanadi (5-rasm). Bunda agar qochuvchi C_1 nuqtaga kelsa, X_1 quvlovchi ham qochuvchi bilan bir vaqtda C_1 nuqtaga keladi va qochuvchi tutiladi. Agar qochuvchi biror vaqtda $S(A_2)$ uch-yulduzni A_1 va A_3 nuqtalariga kelsa, $X_1 C_1 = Y C_1$ tenglikka ko'ra quvlovchi bu vaqtda B_1 ga keladi.

Agar qochuvchi $S(A_2)$ uch-yulduzning tashqarisida harakat qilsa, X_1 quvlovchi quyidagicha harakat qiladi. Agar qochuvchi $A_3 B_3$ qirra bo'ylab harakat qilsa, quvlovchi $B_3 X_1 = B_3 Y$ tenglikni, agar qochuvchi $D_3 B_2$ qirra bo'ylab harakat qilsa, quvlovchi $B_2 X_1 = B_2 Y$ tenglikni saqlagan holda harakat qiladi.

Agar qochuvchi $S(A_2)$ uch-yulduzda ham, $A_3 B_3$ va $D_3 B_2$ qirralarda ham bo'lmasa, u holda X_1 quvlovchi B_1 nuqtada turaveradi. X_1 quvlovchi t_5 vaqtdan boshlab qochuvchini $B_1 B_2 B_3$ uchburchakka ham keltirmaydi, hamda C_1 uchdan ham o'tkazmaydi

Qochuvchi $S(A_3)$ uch-yulduzda qolib ketmaydigan holni qarayotganimiz uchun u $A_2 C_1$ qirraga keladi. Ma'lum vaqtdan keyin X_2 ham bu qirraga yetib keladi va qochuvchini tutadi. Teorema isbotlandi.

HULOSA

Ushbu maqolada kesik tetraedr qirralari bo'ylab harakatlanuvchi ikki quvlovchi va bir qochuvchining quvlash differensial o'yinini o'rgandik. Kesik tetraedr – Arximed jismlari turkumiga kiradi. Ushbu maqola Arximed jismlari qirralari ustidagi differensial o'yinlarga bag'ishlangan dastlabki maqoladir.

Maqolada ikkita quvlovchi maksimal tezligi 1 ga teng bo'lgan bitta qochuvchini tutishi uchun ularning tezliklariga yetarli shart topilgan. Shu bilan birga bu quvlovchilarning hech biri yolg'iz harakat qilib qochuvchini tuta olmaydi. Shu ma'noda aytganda qochuvchini tutish uchun eng kam quvlovchilar soni 2 ta ekan.

Maqolada o'yinchilarning kesik tetraedr qirralaridagi ixtiyoriy boshlang'ich holatlari uchun qochuvchini tutish mumkinligi isbotlangan. Bundan tashqari, quvlovchilar uchun tutish strategiyalari ham qurilgan.

Maqola boshqa Arximed jismlari qirralarida differensial o'yinlarni tadqiq qilish uchun asos bo'lib hizmat qiladi va ularga keng yo'l ochadi.

ADABIYOTLAR

- [1] Isaacs R. (1965). Differential games. John Wiley & Sons, New York, NY, USA.
- [2] Pontryagin L.S. (1988). Selected works. Nauka, Moscow.
- [3] Krasovskii N.N., Subbotin A.I. (1988). Game-Theoretical Control Problems. Springer, New York.
- [4] Azamov A.A. (1983). On Pontryagin's second method in linear differential games of pursuit. Mat. Sb. (N.S.), 118(160):3(7) (1982), 422–430; Math. USSR-Sb., 46:3, 429–437.
- [5] Chikrii A.A. (1997). Conflict-Controlled Processes. Kluwer, Dordrecht.
- [6] Fleming W.H. (1961). The convergence problem for differential games. Journal of Mathematical Analysis and Applications. **3**, 102–116.
- [7] Friedman A. (1971). Differential Games. John Wiley and Sons, New York.

- [8] Petrosyan L.A. (1993). Differential Games of Pursuit. World Scientific, Singapore, London.
- [9] Satimov N.Y., Rikhsiev B.B. (2000). Methods of Solving of Evasion Problems in Mathematical Control Theory, Fan, Tashkent, Uzbekistan.
- [10] Chernous'ko F.L. (1976). A Problem of Evasion of Several Pursuers. Prikl. Mat. Mekh., 40(1): 14–24.
- [11] Pshenichnii B.N. (1976). Simple pursuit by several objects. Cybernetics and Systems Analysis, 12(3):145–146.
- [12] Kumkov S.S., Le Ménec S., Patsko V.S. Zero-sum pursuit-evasion differential games with many objects: Survey of publications. Dynamic games and applications. 7: 609–633, Doi 10.1007/s13235-016-0209-z.
- [13] Ibragimov G.I., Ferrara M., Ruziboev M., Pansera B.A. (2021). Linear evasion differential game of one evader and several pursuers with integral constraints. International Journal of Game Theory. doi.org/10.1007/s00182-021-00760-6
- [14] Ibragimov G.I., Salleh Y. (2012). Simple motion evasion differential game of many pursuers and one evader with integral constraints on control functions of players. Journal of Applied Mathematics, 2012, Article ID 748096, doi:10.1155/2012/748096.
- [15] Blagodatskikh A.I., Petrov N.N. (2019). Simultaneous Multiple Capture of Rigidly Coordinated Evaders. Dynamic Games and Applications (2019) 9:594–613, <https://doi.org/10.1007/s13235-019-00300-8>.
- [16] Azamov A.A., Kuchkarov A.Sh., Holboyev A.G. (2019). The pursuit-evasion game on the 1-skeleton graph of the regular polyhedron. III. Mat. Teor. IgrPril., 11:4 (2019), 5–23.

- [17] Ramana M.V., and Kothari M. (2017) Pursuit strategy to capture high-speed evaders using multiple pursuers. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 40(1): 139-149, <https://doi.org/10.2514/1.G000584>.
- [18] Sun W., Tsiotras P. (2014) An optimal evader strategy in a two-pursuer one-evader problem, *Proc. 53rd IEEE Conf. Decision and Control*, Los Angeles, CA, 4266–4271.
- [19] Ibragimov G.I., Ferrara M., Kuchkarov A.Sh., and Pansera B.A. (2018). Simple motion evasion differential game of many pursuers and evaders with integral constraints. *Dynamic Games and Applications*. 8: 352–378. <https://doi.org/10.1007/s13235-017-0226-6>.
- [20] Ibragimov G.I. (2023). Evasion differential game of one evader and many slow pursuers. *Dynamic Games and Applications*. <https://doi.org/10.1007/s13235-023-00501-2>.
- [21] Garcia E., Casbeer D.W., Pachter M. (2020). Optimal strategies for a class of multi-player reach-avoid differential games in 3D space. *IEEE Rob. Autom. Lett.*, 5, 4257–4264, <https://doi.org/10.1109/LRA.2020.2994023>
- [22] Azamov A., Ibaydullaev T. (2020). A pursuit-evasion differential game with slow pursuers on the edge graph of simplexes I. *Mathematical Game Theory and Applications*. 12(4): 7–23. https://doi.org/10.17076/mgta_2020_4_23
- [23] Azamov A.A., Ibragimov G.I., Ibaydullaev T., Alias I.A. (2021) Optimal number of pursuers in the differential games on the 1-skeleton of orthoplex. *Symmetry (Game Theoretical Symmetry Dynamic Processes)*. 10.3390/sym13112170.