

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО СИНГУЛЯРНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Тулакова Зиёдахон Ривожидиновна, ст.преподаватель, E-mail:

ziyodacoders@gmail.com, Ферганский филиал ТУИТ

Аннотация: Как известно, при исследовании краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений важную роль играют фундаментальные решения уравнения, которые, в свою очередь, выражаются через гипергеометрические функции от одного или более переменных в зависимости от числа сингулярных коэффициентов эллиптического уравнения. Недавно, в научной литературе появились работы, в которых фундаментальные решения многомерных эллиптических уравнений с несколькими сингулярными коэффициентами найдены в явных формах. В настоящей работе используя известное фундаментальное решение трехмерного эллиптического уравнения с одним сингулярным коэффициентом исследована смешанная задача в полушарии, в которой след искомого решения задается на основании полушария (в круге), а конормальная производная решения – на полусфере. Единственность решения поставленной задачи доказывается методом интегралов энергии. Решение смешанной задачи строится в явном виде.

Ключевые слова: гипергеометрическая функция Гаусса, фундаментальное решение, вырождающиеся уравнения в частных производных, трехмерные сингулярные эллиптические уравнения, функция Грина, смешанная задача.

Annotatsiya: Ma'lumki, buziladigan elliptik tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni o'rganishda tenglamaning fundamental yechimlari muhim ahamiyatga bo'lib, bu yechimlar, o'z navbatida, bitta yoki bir necha o'zgaruvchili gipergeometrik funksiyalar yordamida ifodalanadi. Gipergeometrik funksiyalarning o'zgaruvchilari soni elliptik tenglamaning singulyar

koeffitsiyentlariga yoki buzilish tartibiga bog'liq. Bir necha singulyar koeffitsiyentli elliptik tenglamalar fundamental yechimlarining oshkor ko'rinishlarda topilganiga uncha ko'p vaqt bo'lmadi. Mazkur ishda uch o'lchovli bitta singulyar koeffitsiyentli elliptik tenglamaning ma'lum yechimidan foydalanib, bu tenglama uchun yarim sharda aralash masala, ya'ni yarim sharning asosi (doira)da izlanayotgan yechimning qiymati, yarim sfera ustida esa izlanayotgan yechimning konormal hosilasi berilgandagi masala o'rganilgan. Qo'yilgan masala yechimining yagonaligi energiya integrallari usuli bilan isbotlangan, yechimi esa Grin funksiyasi usulida oshkor ko'rinishda topilgan.

Kalit so'zlar: Gauss gipergeometrik funksiyasi, fundamental yechim, xususiy hosilali buziladigan tenglamalar, uch o'lchovli singulyar elliptik tenglamalar, Grin funksiyasi, aralash masala.

Abstract: As is known, in the study of boundary value problems for degenerate elliptic equations, fundamental solutions of the equation are played an important role, which, in turn, are expressed in terms of hypergeometric functions of one or more variables depending on the number of singular coefficients of the elliptic equation. Recently, works have appeared in the scientific literature in which fundamental solutions of multidimensional elliptic equations with several singular coefficients are found in explicit forms. In this paper, using the well-known fundamental solution of a three-dimensional elliptic equation with one singular coefficient, we study a mixed problem in the hemisphere, in which the trace of the desired solution is given on the basis of the hemisphere (in the circle), and the conormal derivative of the solution is given on the hemisphere. The uniqueness of the solution of the stated problem is proved by the method of energy integrals. The solution of the mixed problem is constructed explicitly.

Keywords: Gaussian hypergeometric function, fundamental solution, degenerate partial differential equations, three-dimensional singular elliptic equations, Green's function, mixed problem.

1. Введение

Гипергеометрические функции играют первостепенную роль как в анализе, так и в решении краевых задач для уравнений с частными производными, потому что важные атрибуты при решении краевых задач такие, как фундаментальные решения и функция Грина выписываются через гипергеометрические функции. Многочисленные приложения гипергеометрических функций можно найти в механике, гидромеханике, динамике упругости, электромагнетизме и акустике. Результаты теории гипергеометрических функций позволяют представить решение краевых задач в явных формах или в форме интегрального уравнения с известным ядром. Для задач с известными функциями Грина, выраженными гипергеометрическими функциями, формулировка интегрального уравнения приводит к мощным схемам численной аппроксимации.

Различные интересные задачи для уравнения

$$u_{xx} + u_{yy} + \frac{2\beta}{y}u_y = 0, \quad 0 < 2\beta < 1, \quad y > 0 \quad (1)$$

исследованы многими авторами [1-4]. Более того, в работах [5-8] авторы построили теорию двойного потенциала для обобщенного двuosесимметрического эллиптического уравнения

$$u_{xx} + u_{yy} + \frac{2\alpha}{x}u_x + \frac{2\beta}{y}u_y = 0, \quad 0 < 2\alpha, 2\beta < 1 \quad (2)$$

в области, ограниченной в первой четверти плоскости области полуплоскости xOy .

При построении явных решений краевых задач фундаментальные решения играют важную роль. В недавно опубликованной работе [9] автору удалось найти в явных формах фундаментальные решения обобщенного уравнения Гельмгольца с несколькими сингулярными коэффициентами

$$\sum_{i=1}^m u_{x_i x_i} + \sum_{i=1}^n \frac{2\alpha_i}{x_i} u_{x_i} + \lambda u = 0, \quad (3)$$

где m - размерность эллиптического уравнения, n - число сингулярных коэффициентов $m \geq 2, 1 \leq n \leq m$; α_i и λ - действительные числа и $0 < 2\alpha_i < 1$ ($i = 1, \dots, n$), $-\infty < \lambda < \infty$.

Было проведено множество успешных исследований по построению фундаментальных решений уравнения (3) в различных его частных случаях, в том числе, для уравнений (1) и (2) [10-19]. Очевидно, что работа [9] обобщает все известные результаты по нахождению фундаментальных решений уравнения (3).

Используя найденные, например, в [19], фундаментальные решения и их свойства, в работах [21-23] успешно решены задачи Дирихле и Хольмгрена, а также обобщенная задача Хольмгрена для уравнения (3) при отсутствии параметра λ , причем единственные решения названных задач получены в явных и удобных для дальнейших исследований формах. Исследованию смешанной задачи для уравнений вида (1)-(3) посвящены сравнительно мало работ. Отметим, лишь книгу [4, гл.2], в которой построена теория потенциала смешанной задачи для уравнения (1).

В настоящей работе исследуется смешанная задача для уравнения

$$E(u) = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \frac{2\alpha}{x} u_x = 0, \quad 0 < 2\alpha < 1 \quad (4)$$

в полусфере $R_3^+ = \{(x, y, z): x > 0\}$ трехмерного евклидова пространства.

Отметим, что в недавней [24] работе исследованы вопросы теории потенциала для уравнения (4).

2. Постановка смешанной задачи для уравнения (4).

Пусть $D \subset R_3^+$ - область, ограниченная полусферой

$$\Gamma = \{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x > 0\}$$

и кругом $X = \{(y, z): y^2 + z^2 < a^2\}$ на плоскости yOz .

Смешанная задача. Найти в области D решение $u \in C(\bar{D}) \cap C^2(D)$ уравнения (1), непрерывное в замкнутой области $\bar{D}$, имеющее непрерывные частные производные u_x и u_y в $D + \Gamma$ и удовлетворяющее краевым условиям

$$B_n^\alpha[u] \Big|_\Gamma = \varphi(s, t) \quad (s, t) \in \Gamma,$$

$$u|_{x=0} = \tau(y, z), \quad (y, z) \in \bar{X},$$

где $\varphi(s, t)$ и $\tau(y, z)$ - заданные функции, n - внешняя нормаль к полусфере Γ , а

$$B_n^\alpha[u] = x^{2\alpha} \left(\cos(n, x) \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \cos(n, y) \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \cos(n, z) \cdot \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

3. Фундаментальные решения уравнения (4)

При наличии только одного коэффициента фундаментальные решения уравнения (4) представляются гипергеометрической функцией Гаусса [23]:

$$F(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} z^n$$

где $(k)_\nu$ обозначает общий знак Похгаммера или сдвинутый (shifted) факториал, поскольку $(1)_n = n!$ ($n \in N_0$): $N_0 := N \cup \{0\}$; $N := \{1, 2, 3, \dots\}$, которая определяется в терминах известной гамма-функции,

$$(k)_\nu := \frac{\Gamma(k + \nu)}{\Gamma(k)} = \begin{cases} 1 & (\nu = 0; k \in C \setminus \{0\}) \\ k(k+1)\dots(k+n-1) & (\nu = n \in N; k \in C), \end{cases}$$

условно понимается, что $(0)_0 := 1$, и, конечно, предполагается существование Γ -функции.

Одно из фундаментальных решений уравнения (4) имеет вид [10, 11, 15, 19]:

$$q_2(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi} r^{2\alpha-3} x^{1-2\alpha} \xi^{1-2\alpha} F\left(\frac{3}{2} - \alpha, 1 - \alpha; 2 - 2\alpha; \sigma\right) \quad (5)$$

где

$$\sigma = 1 - \frac{r_1^2}{r^2}; \frac{r_1^2}{r^2} \left\} = (x \pm \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2. \quad x > 0, \xi > 0.$$

По переменным (x, y, z) функция (5) являются решением уравнения (4)

и имеют особенность порядка $\frac{1}{r}$ при $r \rightarrow 0$, а потому она являются фактически фундаментальным решением уравнения (4).

Легко видеть, что

$$q_2(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) \Big|_{x=0} = 0 \quad (6)$$

для всех y и z .

4. Формула Грина

Рассмотрим тождество

$$\begin{aligned} x^{2\alpha} [uE(v) - vE(u)] &= \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[x^{2\alpha} (v_x u - v u_x) \right] + x^{2\alpha} \frac{\partial}{\partial y} (v_y u - v u_y) + x^{2\alpha} \frac{\partial}{\partial z} (v_z u - v u_z) \end{aligned} \quad (7)$$

Интегрируя обе части тождества (7) в области D , расположенной и ограниченной в полупространстве $(x > 0)$, и используя формулу Гаусса-Остроградского, получаем

$$\iiint_D x^{2\alpha} [uE(v) - vE(u)] dx dy dz = \iint_S (uB_n^\alpha[v] - vB_n^\alpha[u]) dS. \quad (8)$$

Здесь S — граница D , n — внешняя нормаль поверхности S , а

$$B_n^\alpha[\] = x^{2\alpha} \left(\cos(n, x) \frac{\partial}{\partial x} + \cos(n, y) \frac{\partial}{\partial y} + \cos(n, z) \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Формула Грина (8) получена на основе следующих предположений: $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, функции и их частные производные первого порядка непрерывны в замкнутой области $\bar{D}$, частные производные второго порядка непрерывны в D , интегралы D , содержащие $E(u)$ и $E(v)$, имеют смысл. Если $E(u)$ и $E(v)$ имеют непрерывности до S , они являются несобственными интегралами и

получаются как Если эти области D_k наклонены к D , ограничения для любой последовательности областей D_k , содержащихся в D , таковы, что любая точка в D_k входит в области областей D , начиная с некоторого номера.

Если u и v являются решениями уравнения (4), то получаем из формулы (8):

$$\iint_S (u B_n^\alpha[v] - v B_n^\alpha[u]) dS = 0. \quad (9)$$

Полагая $v = 1$ в (8) и заменяя u на u^2 , получаем

$$\iiint_D x^{2\alpha} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz = \iint_S u B_n^\alpha[u] dS, \quad (10)$$

где $u(x, y, z)$ — решение уравнения (4). Частный случай (9) при $v=1$ сводится к следующему виду:

$$\iint_S B_n^\alpha[u] dS = 0 \quad (11)$$

Из (11) следует, что интеграл по поверхности S , являющейся границей области D от конормальной производной решения уравнения (4) равен нулю.

5. Единственность и существование решения смешанной задачи

Единственность решения смешанной задачи непосредственно следует из формулы (10).

Существование решения поставленной задачи докажем методом функции Грина.

Назовем $G_3(x, y, z; x_0, y_0, z_0)$ функцией Грина смешанной задачи для уравнения (4), если выполняются следующие условия:

(i) эта функция является регулярным решением уравнения (4) в поле D , за исключением точки (x_0, y_0, z_0) , которая является любой неподвижной точкой D ,

(ii) она удовлетворяет граничным условиям:

$$G_3(0, y, z; x_0, y_0, z_0) = 0, \quad B_n^\alpha \left[G_3(x, y, z; x_0, y_0, z_0) \right] \Big|_\Gamma = 0, \quad (x_0, y_0, z_0) \in D$$

(iii) может быть выражено как:

$$G_3(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = q_2(x, y, z; x_0, y_0, z_0) + v_3(x, y, z; x_0, y_0, z_0),$$

где

$$q_2(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2\pi} r^{2\alpha-3} x^{1-2\alpha} x_0^{1-2\alpha} F\left(\frac{3}{2} - \alpha, 1 - \alpha; 2 - 2\alpha; \sigma\right)$$

— фундаментальное решение уравнения, $v_3(x, y, z; x_0, y_0, z_0)$ — регулярное решение уравнения (4) в области D;

$$\sigma = 1 - \frac{r_1^2}{r^2}; \quad r_1^2 = (x \pm x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2.$$

Построение функции Грина сводится к нахождению ее регулярной части $v_3(x, y, z; x_0, y_0, z_0)$, которая должна удовлетворять граничным условиям

$$B_n^\alpha \left[v_3(x, y, z; x_0, y_0, z_0) \right] \Big|_\Gamma = - B_n^\alpha \left[q_2(x, y, z; x_0, y_0, z_0) \right],$$

$$v_3(0, y, z; x_0, y_0, z_0) = 0 \quad (x_0 > 0).$$

Для сферы D_0 , ограниченной окружностью $y^2 + z^2 \leq a^2$ в плоскости yOz и полусферой $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ ($x \geq 0$), функция Грина задачи Дирихле для уравнения (4), в силу условия (6), выражается формулой:

$$G_{02}(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = q_2(x, y, z; x_0, y_0, z_0) - \left(\frac{a}{R}\right)^{3-2\alpha} q_2(x, y, z; \bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0), \quad (12)$$

где

$$a^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad R^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2, \quad \bar{x}_0 = \frac{a^2}{R^2} x_0, \quad \bar{y}_0 = \frac{a^2}{R^2} y_0, \quad \bar{z}_0 = \frac{a^2}{R^2} z_0.$$

Далее, следуя работе [4, гл.2] нетрудно получить решение смешанной задачи в явном виде:

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1-2\alpha}{2\pi} x_0^{1-2\alpha} \int_{-a}^a dy \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \tau_1(y, x) \left\{ \left[x_0^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \right]^{\alpha - \frac{3}{2}} - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \left[\left(b - \frac{yy_0}{b} \right)^2 + \left(b - \frac{zz_0}{b} \right)^2 + \frac{1}{b^2} (x_0^2 y^2 + y^2 z_0^2 + x_0^2 z^2 + y_0^2 z^2) - b^2 \right]^{-\alpha - \frac{3}{2}} dz + \\
& + \iint_{\Gamma} \varphi(\theta, \vartheta) G_{02}(\xi, \eta, \zeta; x_0, y_0, z_0) d\theta d\vartheta,
\end{aligned} \tag{13}$$

где $b^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Здесь $G_{02}(\xi, \eta, \zeta; x_0, y_0, z_0)$ — функция Грина смешанной задачи для уравнения (4), определенная формулой (12).

Таким образом, доказана следующая

Теорема. Единственное решение смешанной задачи для уравнения (4) представляется формулой (13).

Литература

- [1] S. Gellerstedt, Sur un probleme aux limites pour l'equation $y^{2s} z_{xx} + z_{yy} = 0$. Arkiv Mat., Ast. och Fysik, 1935, 25A(10), pp. 1-12.
- [2] A. Huber, On the uniqueness of generalized axisymmetric potentials. Ann. Math, 1954, 60, pp. 351--358.
- [3] R.P.Gilbert, Composition Formulas in Generalized Axially Symmetric Potential Theory. J. Math. Mech., 1964, 13, pp.577—588.
- [4] М.М.Смирнов, Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. М.: Наука, 1966.
- [5] Н.М. Srivastava, A.Hasanov and J.Choi, Double-layer potentials for a generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation, Sohag Journal of Mathematics, 2015, 2(1), pp. 1--10.
- [6] Berdyshev A.S., Hasanov A., Ergashev T.G. Double-Layer Potentials for a generalized Bi-Axially Symmetric Helmholtz Equation.II. *Complex Variables and Elliptic Equations*. 2020, Volume 65, Issue 2. P.316-332. <https://doi.org/10.1080/17476933.2019.1583219>

- [7] Эргашев Т.Г. Третий потенциал двойного слоя для обобщенного двuosесимметрического уравнения Гельмгольца//*Уфимский математический журнал*, 2018, том 10, выпуск 4, 111-122.
- [8] Эргашев Т.Г. Четвертый потенциал двойного слоя для обобщенного двuosесимметрического уравнения Гельмгольца//*Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2017, № 50, 45-56. DOI 10.17223/19988621/50/4
- [9] Ergashev T.G. Fundamental solutions of the generalized Helmholtz equation with several singular coefficients and confluent hypergeometric functions of many variables // *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2020, Vol. 41, №1. Pages 15-26. DOI: 10.1134/S1995080220010047
- [10] Уринов А.К. Фундаментальные решения для некоторых уравнений эллиптического типа с сингулярными коэффициентами// *Научный вестник Ферганского госуниверситета*. 2006, 1, С. 5-11.
- [11] Салахитдинов М.С., Хасанов А. К теории многомерного уравнения Геллерстедта. // *Узбекский математический журнал*, 2007, 3, с. 95 - 109.
- [12] Hasanov A. Fundamental solutions bi-axially symmetric Helmholtz equation// *Complex Variables and Elliptic Equations*. 2007, v. 52, No. 8. P. 673 - 683.
- [13] Hasanov A., Karimov E.T. Fundamental solutions for a class of three-dimensional elliptic equations with singular coefficients// *Appl. Math. Lett.* 2009, No.22. P.1828-1832.
- [14] Urinov A.K., Karimov E.T., On fundamental solutions for 3D singular elliptic equations with a parameter// *Applied Mathematics Letters*, 2011, 24, 314-319.
- [15] Mavlyaviev R.M., Garipov I.B. Fundamental solution of multidimensional axisymmetric Helmholtz equation// *Complex variables and elliptic equations*, 2016, No.62. P.287-296.
- [16] Ergashev T.G., Hasanov A. Fundamental solutions of the bi-axially symmetric Helmholtz equation// *Uzbek Mathematical Journal*. Tashkent, 2018. № 1. С. 55 - 64.
- [17] Уринов А.К., Эргашев Т.Г. Конфлюэнтные гипергеометрические

функции многих переменных и их применение к нахождению фундаментальных решений обобщенного уравнения Гельмгольца с сингулярными коэффициентами //Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 55. С. 45 - 56.

[18] Ergashev T.G. On fundamental solutions for multidimensional Helmholtz equation with three singular coefficients //Computers and Mathematics with Applications. – Elsevier, 2019. V. 77. Issue 1. pp. 69 - 76.

[19] Ergashev T.G. Fundamental Solutions for a Class of Multidimensional Elliptic Equations with Several Singular Coefficients//Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. 2020. V.13, No. 1. pp. 48 - 57.

[20] Hasanov A., Ruzhansky M. Hypergeometric expansions of solutions of the degenerating model parabolic equations of the third order. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2020, Vol. 41, №1. Pages 27-31.

[21] Ergashev T.G. The Dirichlet problem for with several singular coefficients. *Electronic Journal of Analysis and Applied Mathematics*, 2018, № 1, p.81 - 99.

[22] Ergashev T. G., Hasanov A. Holmgren problem for elliptic equation with singular coefficients. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2020, № 32:3, P.159 - 175.

[23] Эргашев Т.Г. Обобщенная задача Хольмгрена для эллиптического уравнения с несколькими сингулярными коэффициентами //Дифференциальные уравнения. 2020. Т.56. № 7. С.872-886. DOI: 10.1134/S0374064120070043.

[24] Ergashev T.G. Potentials for three-dimensional singular elliptic equation and their application//*Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2020, Vol. 41, №6. Pages 1067-1077. DOI: 10.1134/S1995080220060086