

УДК 517.956.6

ЗАДАЧА ТРИКОМИ ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С РАЗРЫВНЫМИ УСЛОВИЯМИ СКЛЕИВАНИЯ В R^3

Иброхимов Хусниддин Комилжон ўғли.

Наманганский инженерно-строительный институт, учитель

E-mail: xusniddin571@mail.ru

Tel: +998945020595

Аннотация: В данной работе исследуется трехмерный аналог задачи Трикоми для смешанного параболо-гиперболического уравнения с разрывными условиями склеивания в R^3 . Доказана единственность и существование решения поставленной задачи.

Ключевые слова: Задача Трикоми, смешанного параболо-гиперболического уравнения, условия склеивания, единственность, существование, принцип максимума, преобразование Фурье, интегральное уравнение.

R^3 FAZOSIDA PARABOLO-GIPERBOLIK TENGLAMA UCHUN UZILISHLI ULANISH SHARTI BILAN QO‘YILGAN TRIKOMI MASALASI

Ibroximov Xusniddin Komiljon o‘g‘li

Namangan muhandislik-qurilish instituti, o‘qituvchi

E-mail: xusniddin571@mail.ru

Tel: +998945020595

Annotatsiya: Ushbu maqolada R^3 da uzilishli ulanish shartilari bilan aralash parabolo-giperbolik tenglama uchun Trikomi masalasining uch o‘lchovli

analogi o'rganilgan. Qo'yilgan masalaning yechimining yagonaligi va mavjudligi isbotlangan.

Kalit so'zlar: Triкоми masalasi, aralash parabolo-giperbolik tenglama, ulanish shartlari, yagonaligi, mavjudligi, maksimum prinsipi, Fure akslantirishi, integral tenglama.

THE TRICOIMI PROBLEM WITH DISCONTINUED CONNECTION CONDITION FOR A PARABOLO-HYPERBOLIC EQUATION IN R^3 SPACE

Ibrokhimov Khusniddin Komiljon ugli.

Namangan Engineering-Constraction Institute Teacher

E-mail: xusniddin571@mail.ru

Tel: +998945020595

Annotation: *In this paper, we will study the Tricoimi problem with discontinued connection condition for a parabolo-hyperbolic equation in R^3 space. The uniqueness and existence of the solution of the set task is proved.*

Key words: *Tricomi problem, connection conditions, mixed parabolo-hyperbolic equation, uniqueness and existence of solution, maximum principle, Fourier transform, integral equation.*

I. ВВЕДЕНИЕ

Задача Трикоми и другие задачи на сопряжения для уравнений параболо - гиперболического типа имеют многочисленные приложения. Первые результаты в этом направлении содержатся в работе М.И. Гельфанда [1], где рассмотрена задача о движении газа в канале, окруженном пористой средой. При этом в канале движение газа описывалось волновым уравнением, а вне его - уравнением диффузии. В работах [2-4] приведены некоторые другие приложения таких задач.

Задача Трикоми для эллиптического - гиперболического уравнения в трехмерном пространстве с помощью метода интегрального преобразования Фурье впервые исследована А.В.Бицадзе [5]. Затем появились ряд работ (см. [6-11]), где рассматривались краевые задачи для уравнений эллиптического - гиперболического типа в бесконечной цилиндрической области.

Краевые задачи для смешанных уравнений параболо - гиперболического типа в трехмерном пространстве, используя интегральные преобразования рассматривались в работах [12-19].

В этой работе исследуется трехмерный аналог задачи Трикоми для параболо - гиперболического уравнения с характеристической плоскости изменения типа.

II. Постановка задачи

В бесконечной призмаобразной области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, трехмерного евклидова пространстве переменных (x, y, z) , ограниченной поверхностью

$$S = \sum_{i=1}^5 S_i, \text{ где}$$

$$S_1: x=0, \quad 0 \leq y \leq h, \quad z \in R, \quad S_2: x=1, \quad 0 \leq y \leq h, \quad z \in R,$$

$$S_3: x+y=0, \quad 0 \leq x \leq 1/2, \quad z \in R, \quad S_4: x-y=1, \quad 1/2 \leq x \leq 1, \quad z \in R,$$

$$S_5: y=h, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad z \in R.$$

Рассмотрим уравнения

$$0 = \begin{cases} U_y - U_{xx} - U_{zz} + \mu_1^2 U, & \text{при } y > 0, \\ U_{yy} - U_{xx} - U_{zz} + \mu_2^2 U, & \text{при } y < 0, \end{cases} \quad \mu_i^2 = \text{const}, \quad i=1,2. \quad (1)$$

Пусть

$$I = \{(x, y, z): 0 < x < 1, y=0, z \in R\}, \quad \Omega_1 = \Omega \cap \{(x, y, z): x > 0, y > 0, z \in R\},$$

$$\begin{aligned}\Omega_2 &= \Omega \cap \{(x, y, z): x > 0, \quad y < 0, \quad z \in R\}, \quad D = \Omega \cap (z = 0), \\ D_k &= \Omega_k \cap (z = 0), \quad k = 1, 2, \quad \bar{I} = \bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2, \quad J = I \cap (z = 0), \\ \sigma_i &= S_i \cap (z = 0), \quad (i = \overline{1, 5}).\end{aligned}$$

Задача T_α . Найти регулярное решение $U(x, y, z)$ уравнения (1) в области $\Omega \setminus (y = 0)$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$1) \quad U(x, y, z) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap (C_{x, y, z}^{2,1,2}(\Omega_1) \cup C^2(\Omega_2))$$

2) граничные условия

$$U|_{S_1} = \Phi_1(y, z), \quad U|_{S_2} = \Phi_2(y, z), \quad U|_{S_4} = \Psi(x, z), \quad z \in R \quad (2)$$

$$\lim_{z \rightarrow \pm 0} U(x, y, z) = \lim_{z \rightarrow \pm 0} U_z(x, y, z) = 0. \quad (3)$$

3) функции $U(x, y, z)$ и $U_y(x, y, z)$ удовлетворяют условиям склеивания

$$\begin{aligned}U(x, -0, z) &= \alpha U(x, +0, z) \\ U_y(x, -0, z) &= \beta(x) U_y(x, +0, z) + \gamma(x) U(x, +0, z) + P(x, z), \\ \alpha &= \text{const}, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} P(x, z) = 0.\end{aligned} \quad (4)$$

Отметим, аналогичная задача при $\alpha = 1$, $\beta(x) = 1$, $\gamma(x) = 0$ и $P(x, z) = 0$ исследованы в работе [20].

Следуя идеи А.В.Бицадзе [1], решение поставленной задачи будем искать в классе интегралов Фурье, т.е. в виде

$$U(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, y, \lambda) e^{-i\lambda z} d\lambda. \quad (5)$$

Имеет место следующая лемма.

Лемма. Пусть функция $u(x, y, \lambda)$ в области D является решением уравнения

$$0 = \begin{cases} u_y - u_{xx} + (\lambda^2 + \mu_1^2)u, & y > 0, \\ u_{yy} - u_{xx} + (\lambda^2 + \mu_2^2)u, & y < 0, \end{cases} \quad (6)$$

таким, что интеграл (5) допускает дифференцирование указанное в уравнении (1) по каждом из параметров x, y, z , тогда функция $U(x, y, z)$, определяемая этим интегралом, является решением уравнения (1). Обратно, если $U(x, y, z)$ есть решение уравнения (1), представимое интегралом (5) и удовлетворяющее условиям (3), то $u(x, y, \lambda)$, определяемая по формуле

$$u(x, y, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, y, z) e^{i\lambda z} dz, \quad (7)$$

является решением уравнения (6).

Доказательство. Проводится по схеме работы [5]. Приведенная лемма позволяет задачу T_α свести к следующим эквивалентным плоским задачам.

Задача $T_{\alpha\lambda}$. Требуется определить регулярное решение уравнения (6) в области $D \setminus (y=0)$, обладающее следующими свойствами:

- 1) $u(x, y, \lambda) \in C(\bar{D}) \cap C^1(D) \cap (C_{x,y}^{2,1}(D_1) \cup C^2(D_2))$.
- 2) $u(x, y, \lambda)$ удовлетворяет условиям

$$u|_{\sigma_1} = \varphi_1(y, \lambda), \quad u|_{\sigma_2} = \varphi_2(y, \lambda), \quad u|_{\sigma_4} = \psi(x, \lambda), \quad \lambda \in R. \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_k(y, \lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_k(y, z) e^{i\lambda z} dz, \quad k=1,2, \\ \psi(x, \lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x, z) e^{i\lambda z} dz, \end{aligned} \quad (9)$$

- 3) функции $u(x, y, \lambda)$ и $u_y(x, y, \lambda)$ удовлетворяют условиям склеивания

$$\begin{aligned} u(x, -0, \lambda) &= \alpha u(x, +0, \lambda) \\ u_y(x, -0, \lambda) &= \beta(x)u_y(x, +0, \lambda) + \gamma(x)u(x, +0, \lambda) + \bar{P}(x, \lambda) \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\bar{P}(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x, z) e^{i\lambda z} dz,$$

здесь $\beta(x)$, $\gamma(x)$ и $\bar{P}(x, \lambda)$ непрерывны и

$$\begin{aligned} \alpha\beta(x) &> 0, \\ \alpha[\beta(x) + 4\gamma(x) - \alpha] &\leq 0, \quad \bar{P}(x, \lambda) \leq 0. \end{aligned}$$

функции $\varphi_k(y, \lambda)$, $k=1, 2$ непрерывны, а $\psi(x, \lambda)$ - непрерывно дифференцируемая функция по x до второго порядка включительно и $\alpha\varphi_2(0, \lambda) = \psi(1, \lambda)$. В дальнейшем на эти функции будут наложены дополнительные ограничения.

III. Априорная оценка и единственность решения

Докажем единственность решения задачи $T_{\alpha\lambda}$. Отметим, что для уравнения (6) при $y < 0$ известные условия Проттера [21] не выполняются. Поэтому доказать единственность решения задачи $T_{\alpha\lambda}$ с помощью принципа экстремума сразу не удастся. Несмотря на это, при помощи некоторого приема [7-8] можно получить оценку функции $u(x, y, \lambda)$, из которого следует единственность решения задачи $T_{\alpha\lambda}$.

Для этого введем новую неизвестную функцию $\vartheta(x, y, \lambda)$ по формуле

$$u(x, y, \lambda) = \vartheta(x, y, \lambda) e^{\frac{2\sqrt{1+4\lambda_i^2}xy}{4}}, \quad \lambda_i^2 = \lambda^2 + \mu_i^2, \quad i=1, 2. \quad (11)$$

Тогда функция $\vartheta(x, y, \lambda)$ будет решением уравнения

$$0 = \begin{cases} \vartheta_y - \vartheta_{xx} - \sqrt{1+4\mu_1^2} \vartheta_x, & y > 0, \\ \vartheta_{yy} - \vartheta_{xx} - \sqrt{1+4\mu_2^2} \vartheta_x + \frac{1}{2} \vartheta_y - \frac{3}{16} \vartheta, & y < 0. \end{cases} \quad (12)$$

коэффициенты которого в области D_2 удовлетворяют известным условиям Агмона, Ниренберга, Проттера [21]. Условия склеивания при этом имеют вид

$$\begin{aligned} \vartheta(x, -0, \lambda) &= \alpha \vartheta(x, +0, \lambda) \\ \vartheta_y(x, -0, \lambda) &= \beta(x) \vartheta_y(x, +0, \lambda) + \bar{j}(x) \vartheta(x, +0, \lambda) + \bar{P}_1(x, \lambda) \end{aligned}$$

где

$$\bar{j}(x) = \frac{1}{4} [\beta(x) + 4j(x) - \alpha], \quad \bar{P}_1(x, \lambda) = \bar{P}(x, \lambda) e^{-\frac{\sqrt{1+4\lambda_j^2} x}{2}}.$$

Если положим

$$w(x, y, \lambda) = \begin{cases} \alpha \vartheta(x, y, \lambda) = w^+(x, y, \lambda), & (x, y) \in D_1, \\ \vartheta(x, y, \lambda) = w^-(x, y, \lambda), & (x, y) \in D_2, \end{cases}$$

тогда функция $w(x, y, \lambda)$ будет решением уравнения

$$0 = \begin{cases} L_1[w], & y > 0, \\ L_2[w], & y < 0, \end{cases} \quad (13)$$

А условия склеивания

$$\begin{aligned} w(x, -0, \lambda) &= w(x, +0, \lambda) \\ w_y(x, -0, \lambda) &= \frac{\beta(x)}{\alpha} w_y(x, +0, \lambda) + \frac{\bar{j}(x)}{\alpha} w(x, +0, \lambda) + \bar{P}_1(x, \lambda). \end{aligned} \quad (14)$$

Теорема 1. (Принцип положительного максимума). Пусть $w(x, y, \lambda)$ обладает свойствами:

$$1) \quad w(x, y, \lambda) \in C(\bar{D}_k), \quad k = 1, 2,$$

- 2) выполняются условиям склеивания (14)
- 3) она является в области D_1 решением уравнения $L_1[w] = 0$, а в D_2 - решением неравенства $L_2[w] \geq 0$,
- 4) $w_y(y+1, y, \lambda) - w_x(y+1, y, \lambda) \geq 0, \quad -\frac{1}{2} \leq y \leq 0$, (15)

т.е. является не убывающей от y на характеристике σ_4 , тогда положительный максимум функции $w(x, y, \lambda)$ в $\bar{D}$ достигается на отрезках $\sigma_1 \cup \sigma_2$.

Доказательство. Пусть функция $w(x, y, \lambda)$, удовлетворяющую уравнению (13) и условиям теоремы, достигает в некоторой точке $(x_0, 0, \lambda) \in J$ положительного максимума. На основании теоремы Проттера [21] в точке $(x_0, 0, \lambda) \in J$ положительного максимума имеем

$$w_y(x_0, 0, \lambda) > 0.$$

Но, с другой стороны, из уравнения (13) при $y > 0$ получим [22] $w_y(x_0, 0, \lambda) \leq 0$, что противоречит предыдущему неравенству. Следовательно, $w(x, y, \lambda)$ внутри D не может достигать положительного максимума и если достигает, то только на отрезках $\sigma_1 \cup \sigma_2$.

В области D определим функцию $\bar{w}(x, y, \lambda)$ следующим образом

$$\bar{w}(x, y, \lambda) = \pm w(x, y, \lambda) + \rho(x, \lambda),$$

где $\bar{w}(x, y, \lambda)$ - регулярное решение уравнения (13), а $\rho(x, \lambda) = M \left[e^{-\sqrt{1+4\mu_1^2}x} - 2 \right]$, M - неотрицательное постоянное.

Заметим, что $L_1[\bar{w}(x, y, \lambda)] = 0$ и $L_2[\bar{w}(x, y, \lambda)] \geq 0$ в D_1 и D_2 соответственно.

Для того, чтобы функция $\bar{w}(x, y, \lambda)$ удовлетворяла условию (14), достаточно положить

$$M = e^{\sqrt{1+4\lambda_1^2}} \max_{\sigma_1} |w_y(y+1, y, \lambda) - w_x(y+1, y, \lambda)|. \quad (16)$$

При таком выборе M функция $\bar{w}(x, y, \lambda)$ достигает положительного максимума на $\sigma_1 \cup \sigma_2$, откуда следует, что

$$\bar{w}(x, y, \lambda) \leq \max_{\sigma_1 \cup \sigma_2} |\bar{w}(x, y, \lambda)|.$$

Переходя к функции $w(x, y, \lambda)$, имеем

$$|w(x, y, \lambda)| \leq \max_{\sigma_1} |w(x, y, \lambda)| + \max_{\sigma_2} |w(x, y, \lambda)| + 5M. \quad (17)$$

Так как

$$w(x, y, \lambda) = e^{-\frac{2\sqrt{1+4\lambda_1^2}x+y}{4}} \begin{cases} cu(x, y, \lambda), & (x, y) \in D_1, \\ u(x, y, \lambda), & (x, y) \in D_2. \end{cases}$$

Из (16) переходя к функции $u(x, y, \lambda)$, находим

$$M \leq e^{\frac{\sqrt{1+4\lambda_1^2}}{2}} \max |\psi'_x(x, \lambda)| + \frac{2\sqrt{1+4\lambda_1^2} - 1}{4} e^{\frac{\sqrt{1+4\lambda_1^2}}{2}} \max |\psi'(x, \lambda)|. \quad (18)$$

Теперь, из оценки (17) с учетом (18) имеем

$$|u(x, y, \lambda)| \leq K e^{\frac{2\sqrt{1+4\lambda_1^2} + b}{4}} \left[|\alpha| \max |\varphi_1(y, \lambda)| + |\alpha| e^{-\frac{\sqrt{1+4\lambda_1^2}}{2}} \max |\varphi_2(y, \lambda)| + \right. \\ \left. + \frac{5}{4} (2\sqrt{1+4\lambda_1^2} - 1) e^{\frac{\sqrt{1+4\lambda_1^2}}{2}} \max |\psi(x, \lambda)| + 5 e^{\frac{\sqrt{1+4\lambda_1^2}}{2}} \max |\psi'_x(x, \lambda)| \right], \quad (19)$$

где

$$K = \max \left(1, \frac{1}{|\alpha|} \right).$$

Из (19) следует единственность решений задачи $T_{a\lambda}$ и T_a . В самом деле, пусть $\Phi_k(y, z) = 0$, $k = 1, 2$, $\Psi(x, z) = 0$ по формулам (9) имеем $\varphi_k(y, \lambda) = 0$, $k = 1, 2$, $\psi(x, \lambda) = 0$. Тогда из оценки (19) следует, что $u(x, y, \lambda) \equiv 0$. Отсюда, в силу (4) получаем $U(x, y, z) \equiv 0$.

IV. Существование решения

Примем обозначения

$$u(x, +0, \lambda) = \tau_1(x, \lambda), \quad u_y(x, +0, \lambda) = \nu_1(x, \lambda), \\ u(x, -0, \lambda) = \tau_2(x, \lambda), \quad u_y(x, -0, \lambda) = \nu_2(x, \lambda). \quad (20)$$

Из уравнения (6) $y > 0$ получаем, что функции $\tau_1(x, \lambda)$ и $\nu_1(x, \lambda)$ на линии $y = 0$ связаны соотношением

$$\tau_1''(x, \lambda) - \lambda_1^2 \tau_1(x, \lambda) = \nu_1(x, \lambda). \quad (21)$$

Решение этого уравнения в промежутке $0 \leq x \leq 1$, удовлетворяющее краевым условиям

$$\tau_1(0, \lambda) = \varphi_1(0, \lambda), \quad \tau_1(1, \lambda) = \varphi_2(0, \lambda), \quad (22)$$

Решение уравнения (21) вид

$$\tau_1(x, \lambda) = a(x, \lambda) + \int_0^1 G(x, t, \lambda) v_1(t, \lambda) dt, \quad (23)$$

где

$$G(x, t, \lambda) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sh} \mu_1 (1-t) \operatorname{sh} \mu_1 x}{\mu_1 \operatorname{sh} \mu_1}, & 0 \leq x \leq t \leq 1, \\ \frac{\operatorname{sh} \mu_1 t \operatorname{sh} \mu_1 (1-x)}{\mu_1 \operatorname{sh} \mu_1}, & 0 \leq t \leq x \leq 1. \end{cases}$$

- функция Грина задачи (21-22) а $a(x, \lambda)$ известные функции

$$a(x, \lambda) = \varphi_1(0, \lambda) + x [\varphi_2(0, \lambda) - \varphi_1(0, \lambda)] + \\ + \lambda_1^2 \int_0^1 G(x, t, \lambda) [\varphi_1(0, \lambda) + t [\varphi_2(0, \lambda) - \varphi_1(0, \lambda)]] dt.$$

Чтобы получить второе соотношение функциями $\tau_2(x, \lambda)$ и $v_2(x, \lambda)$, рассмотрим решение уравнения (6) в области D_2 , удовлетворяющее условиям (20) [23]:

$$u(x, y, \lambda) = \frac{\tau_2(x+y, \lambda) + \tau_2(x-y, \lambda)}{2} - \frac{|\lambda| y^{x+y}}{2} \int_{x-y}^{x+y} \frac{I_1(|\lambda| \sqrt{(x-\xi)^2 - y^2})}{\sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}} \tau_2(\xi, \lambda) d\xi + \\ + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} I_0(|\lambda| \sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}) v_2(\xi, \lambda) d\xi, \quad (24)$$

где I_0 и I_1 - вещественные функции Бесселя мнимого аргумента нулевого и первого порядка соответственно.

Реализуя последнее условие из (8), получаем

$$\begin{aligned}
2\psi(x, \lambda) = & \tau_2(2x-1, \lambda) + \tau_2(1, \lambda) - \\
& - |\lambda|(x-1) \int_1^{2x-1} \frac{I_1(|\lambda|\sqrt{(1-\xi)(2x-1-\xi)})}{\sqrt{(1-\xi)(2x-1-\xi)}} \tau_2(\xi, \lambda) d\xi + \\
& + \int_1^{2x-1} I_0(|\lambda|\sqrt{(1-\xi)(2x-1-\xi)}) \nu_2(\xi, \lambda) d\xi.
\end{aligned}$$

С делая замена переменную $2x-1=z$, затем переходя на x , имеем:

$$\begin{aligned}
\tau_2(x, \lambda) + \int_x^1 \frac{(x-1)}{2(1-\xi)} \frac{\partial}{\partial x} I_0(|\lambda|\sqrt{(1-\xi)(x-\xi)}) \tau_2(\xi, \lambda) d\xi = & \psi_1(x, \lambda) + \\
& + \int_x^1 I_0(|\lambda|\sqrt{(1-\xi)(x-\xi)}) \nu_2(\xi, \lambda) d\xi.
\end{aligned} \tag{25}$$

где

$$\psi_1(x, \lambda) = 2\psi\left(\frac{x+1}{2}, \lambda\right) - \psi(1, \lambda),$$

Используясь формулой обращения [24], из (25) находим:

$$\begin{aligned}
\tau_1(x, \lambda) = & \psi_1(x, \lambda) + \int_x^1 I_0(|\lambda|\sqrt{(1-\xi)(x-\xi)}) \nu_2(\xi, \lambda) d\xi - \\
& - \int_x^1 \frac{\partial}{\partial \xi} I_0(|\lambda|\sqrt{(1-x)(x-\xi)}) \psi_1(\xi, \lambda) d\xi - \\
& - \int_x^1 \nu_2(t, \lambda) dt \int_x^t \frac{\partial}{\partial \xi} I_0(|\lambda|\sqrt{(1-x)(x-\xi)}) I_0(|\lambda|\sqrt{(1-t)(\xi-t)}) d\xi.
\end{aligned} \tag{26}$$

Применяя следующая формулу [25]

$$\begin{aligned}
\int_x^t I_0(|\lambda|\sqrt{(1-t)(\xi-t)}) \frac{\partial}{\partial \xi} I_0(|\lambda|\sqrt{(1-x)(x-\xi)}) d\xi = & I_0(|\lambda|\sqrt{(1-t)(x-t)}) - \\
& - I_0[|\lambda|(t-x)]
\end{aligned}$$

из (26) получим:

$$\tau_2(x, \lambda) = p(x, \lambda) + \int_x^1 \left[|\lambda|(\xi - x) \right] v_2(\xi, \lambda) d\xi. \quad (27)$$

где

$$p(x, \lambda) = \psi_1(x, \lambda) - \int_x^1 \frac{\partial}{\partial \xi} I_0 \left(|\lambda| \sqrt{(1-x)(x-\xi)} \right) \psi_1(\xi, \lambda) d\xi.$$

Исключая из (23) и (27) функции $\tau_1(x, \lambda)$, $\tau_2(x, \lambda)$ и $v_2(x, \lambda)$ с учетом условий склеивания (10), получаем

$$\begin{aligned} p(x, \lambda) + \int_x^1 \left[|\lambda|(\xi - x) \right] v_2(\xi, \lambda) d\xi = & \alpha a(x, \lambda) - \\ - \int_0^1 G(x, t, \lambda) \frac{\gamma(t) p(t, \lambda) + \alpha \bar{P}(t, \lambda)}{\beta(t)} dt + \int_0^1 & \left[\frac{\alpha G(x, \xi, \lambda)}{\beta(\xi)} - \right. \\ \left. - \int_0^\xi \frac{G(x, t, \lambda) \gamma(t)}{\beta(t)} I_0 \left[|\lambda|(\xi - t) \right] dt \right] & v_2(\xi, \lambda) d\xi. \end{aligned}$$

Дифференцируя полученное равенство по x и введя обозначение

$$A(x, \xi, \lambda) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \xi \leq x, \\ \left[|\lambda| I_1 \left[|\lambda|(\xi - x) \right] \right], & x \leq \xi \leq 1. \end{cases}$$

получаем интегральное уравнение

$$v_2(x, \lambda) + \int_0^1 K(x, \xi, \lambda) v_2(\xi, \lambda) d\xi = g(x, \lambda), \quad (28)$$

где $K(x, \xi, \lambda)$ и $g(x, \lambda)$ известные функции

$$\begin{aligned} K(x, \xi, \lambda) = & A(x, \xi, \lambda) + \frac{\alpha G_x(x, \xi, \lambda)}{\beta(\xi)} - \int_0^\xi \frac{G_x(x, t, \lambda) \gamma(t)}{\beta(t)} I_0 \left[|\lambda|(\xi - t) \right] dt, \\ g(x, \lambda) = & p_x(x, \lambda) - \alpha a_x(x, \lambda) - \int_0^1 G_x(x, t, \lambda) \frac{\gamma(t) p(t, \lambda) + \alpha \bar{P}(t, \lambda)}{\beta(t)} dt. \end{aligned}$$

На основании свойства функции $G(x, \xi, \lambda)$ и функций Бесселя I_n , $n=0,1$ заключаем:

- 1) $K(x, \xi, \lambda)$ в промежутках $0 \leq x \leq \xi$, $\xi < x \leq 1$ непрерывна и непрерывно дифференцируема по x ;
- 2) $g(x, \lambda)$ непрерывно дифференцируема в $0 \leq x \leq 1$.

Таким образом, если существует решение $v_2(x, \lambda)$ интегрального уравнения Фредгольма второго рода (28), то оно непрерывно дифференцируема в $0 \leq x \leq 1$. Из единственности решения задачи T_λ вытекает разрешимость интегрального уравнения (28).

После определения функций $v_i(x, \lambda)$ и $\tau_i(x, \lambda)$, $i=1,2$ решение задачи $T_{a\lambda}$ в области D_2 выписывается в виде (24), а в области D_1 находится из решения первой краевой задачи для уравнения (6) с условиями

$$u|_{\sigma_1} = \varphi_1(y, \lambda), \quad u|_{\sigma_2} = \varphi_2(y, \lambda), \quad u|_{y=0} = \tau_1(x, \lambda).$$

Оно имеет вид

$$\begin{aligned} g(x, y, \lambda) = & \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left[\int_0^y e^{-\lambda^2(y-\eta)} \varphi_1(\eta, \lambda) G_{\xi}^*(x, y; 0, \eta) d\eta - \right. \\ & \left. - \int_0^y e^{-\lambda^2(y-\eta)} \varphi_2(\eta, \lambda) G_{\xi}^*(x, y; 1, \eta) d\eta + \int_0^1 \tau_1(\xi, \lambda) G^*(x, y; \xi, 0) d\xi \right], \end{aligned}$$

где

$$G^*(x, y; \xi, \eta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [V(x, y; \xi + 2n, \eta) - V(x, y; -\xi + 2n, \eta)],$$

$$V(x, y; \xi, \eta) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{y-\eta}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}}, & y > \eta, \\ 0, & y \leq \eta \end{cases}$$

-функция Грина [26].

Учитывая оценку (19) функции $u(x, y, \lambda)$, можно на краевые функции $\Phi_k(y, z)$, $k=1, 2$, $\Psi(x, z)$ наложить условия, обеспечивающие существование интеграла (5). Для этого из оценки (19) при больших значениях параметра λ_i имеем

$$\begin{aligned} |u(x, y, \lambda)| &\leq Ke^{\frac{h}{4}} \left[|\alpha| e^{\frac{\sqrt{1+4\lambda_i^2}}{2}} \max |\varphi_1(y, \lambda)| + |\alpha| \max |\varphi_2(y, \lambda)| + \right. \\ &\quad \left. + \frac{5}{4} (2\sqrt{1+4\lambda_i^2} - 1) e^{\sqrt{1+4\lambda_i^2}} \max |\psi(x, \lambda)| + 5e^{\sqrt{1+4\lambda_i^2}} \max |\psi'_x(x, \lambda)| \right], \\ |u(x, y, \lambda)| &\leq Ke^{\frac{h}{4}} \left[|\alpha| e^{|\lambda_{3i}|} \max |\varphi_1(y, \lambda)| + |\alpha| \max |\varphi_2(y, \lambda)| + \right. \\ &\quad \left. + 5|\lambda_{3i}| e^{2|\lambda_{3i}|} \max |\psi(x, \lambda)| + 5e^{2|\lambda_{3i}|} \max |\psi'_x(x, \lambda)| \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

Пусть функции $\Phi_k(y, z)$, $k=1, 2$, $\Psi(x, z)$ таковы, что для функций $\varphi_k(y, \lambda)$, $k=1, 2$, $\psi(x, \lambda)$ имеют место оценки:

$$\begin{aligned} \varphi_1(y, \lambda) &= O\left(\frac{1}{|\lambda_{3i}|^\chi e^{|\lambda_{3i}|}}\right), \quad \varphi_2(y, \lambda) = O\left(\frac{1}{|\lambda_{3i}|^\chi}\right), \\ \psi(x, \lambda) &= O\left(\frac{1}{|\lambda_{3i}|^{\chi+1} e^{2|\lambda_{3i}|}}\right), \quad \psi'_x(x, \lambda) = O\left(\frac{1}{|\lambda_{3i}|^\chi e^{2|\lambda_{3i}|}}\right), \end{aligned}$$

Тогда из (27) получаем оценку

$$u(x, y, \lambda) = O\left(\frac{1}{|\lambda_{3i}|^\chi}\right), \quad \chi > 3.$$

которая обеспечивает существование интеграла (5), дающего решение задачи

T_α . Из указанных оценок также следует выполнение условий (3).

V. ВЫВООДЫ

В заключение можно сказать, что в данной статье четко найдено общее решение задачи и показан метод его нахождения, показано, что оно существует и единственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфанд И.М. Некоторые вопросы анализа и дифференциальных Уравнений //Успехи мат. наук. 1956.Т.14, вып. 3(87). С. 3-19.
2. Стиручина Г.М. Задача о сопряжении двух уравнений // Инж.-физ. журн. 1961. Т. 4. № 11. С. 99-104.
3. Уфлянд Я.С. К вопросу о распространении колебаний в составных электрических линиях // Инж.-физ. журн. 1964. Т. 7. № 1. С. 89-92.
4. Джураев Т.Д.,А.Сопуев, М.М.Мамажанов. Краевые задачи для уравнений параболо- гиперболического типа //Ташкент:Фан.1986.220 с.
5. Бицадзе А.В. Об одном трехмерном аналоге задачи Трикоми // Сибир. мат. журн. 1962.Т.3. С.642-644.
6. Нахушев А.М. Об одном трехмерном аналоге задачи Геллерстедта // Дифф. уравн. Минск. 1968. Т.4. № 1.С. 52-62.
7. Ежов А.М., Пулькин С.П. Оценка решения задачи Трикоми для одного класса уравнений смешанного типа // Докл. АН СССР. 1970. Т.193, №5, С. 978-980.
8. Ежов А.М. О решении пространственной задачи для уравнения смешанного типа с двумя плоскостями вырождения // Дифф. уравн. Труды пединститутов РСФСР. 1973. Вып. 2. С. 84-102.
9. Пономарев С.М. К теории краевых задач для уравнений смешанного типа в трехмерных областях // Докл. АН СССР. 1979. Т. 246, № 6, С. 1303-1306.

10. Салахиддинов М.С., Исломов Б. О трехмерном аналоге задачи Трикоми для уравнения смешанного типа // Докл. АН СССР. 1990. Т.311, № 4, С. 797-801.
11. Салахиддинов М.С., Исломов Б. Краевые задачи для уравнения смешанного эллиптического - гиперболического типа в пространстве // УзМЖ. 1993. № 3. С. 13-20.
12. Джураев Т.Д., Сопуев А. Об одной пространственной задаче для уравнения смешанного параболического - гиперболического типа // Дифф. уравн. Минск. 1981. Т.17. № 1. С. 50-57.
13. Сопуев А. Оценка решения одной задачи Геллерстедта для уравнения смешанного параболического - гиперболического типа // Докл. АН УзССР. 1982. № 7. С. 3-4.
14. Джураев Т.Д., Сопуев А., Апаков Ю.П. Краевые задачи для параболического - гиперболического уравнения с характеристической линией изменения типа // В кн. Уравнения смешанного типа и задачи со свободной границей. Институт математики АН УзССР. Ташкент: Фан. 1987. С.56-65.
15. Джураев Т.Д., Апаков Ю.П. Задача Трикоми для параболического - гиперболического уравнения с нехарактеристической линией изменения типа в трехмерном пространстве // Известия АН УзССР. Серия физ.-мат. наук. 1986, № 3. С.21-27.
16. Исломов Б. Об одной трехмерной задаче для уравнения смешанного параболического - гиперболического типа // Докл. АН УзССР. 1989. № 9. С.3-5.
17. Джураев Т.Д., Апаков Ю.П. Задача Геллерстедта для параболического - гиперболического уравнения в трехмерном пространстве // Дифф. уравн. Минск. 1990. Т.26. № 3. С. 438-448.

18. Апаков Ю.П. Трёхмерный аналог задачи Трикоми для параболо-гиперболического уравнения // Сибирский журнал индустриальной математики. Новосибирск, 2011. Том 14, № 2(46). С. 34-44.
19. Апаков Ю.П. Об одном трёхмерном аналоге задачи Трикоми с параллельными плоскостями вырождения // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. наук, 2018, выпуск 1, -С.6-20.
20. Апаков Ю.П., Иброхимов Х.К. Трёхмерный аналог задачи Трикоми для уравнения смешанного параболо-гиперболического уравнения // Вестник НамГУ, 2021. № 5. С. 39-48.
21. Agmon S., Nirenberg L., Protter M.H. A maximum principal for a class of hyperbolic equations and applications to equations of mixed elliptic-hyperbolic type // Communes Pure and Appl. Math. 1953. Vol.4. P. 455-470.
22. Ильин А.М., Калашников А.С., Олейник О.А. Линейные уравнения второго порядка параболического типа // Успехи матем. наук, Москва. 1962, т. 17. Вып.3.С. 21-73.
23. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1966. - 724 с.
24. Векуа И.Н. Новые методы решение эллиптического уравнений. –М.: Гостехиздат, 1948, 296 с.
25. Салахитдинов М.С., Уринов А.К. Краевые задачи для одного класса уравнений смешанного типа с негладкими линиями вырождения // В. Кн. Неклассические задачи математической физики. Ташкент: Фан, 1985,-С.25-47.
26. Трикоми Ф. Лекция по уравнениям частных производных. -М.: ИЛ., 1957, 444 с.