

**KARRALI XARAKTERISTIKALI BIR JINSLI BO‘LMAGAN
TO‘RTINCHI TARTIBLI TENGLAMA UCHUN IKKINCHI
CHEGARAVIY MASALANI YECHISH**

S.M.Mamajonov

O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasi V.I.Romanovski nomidagi

Matematika instituti PhD doktoranti

Gmail: sanjarbekmamajonov@gmail.com

E-mail: bek84-08@mail.ru

Tel: +998903031656

Annotatsiya. Ushbu maqolada o‘zgaruvchan koeffitsiyentli kichik hadlarga ega bo‘lgan to‘rtinchi tartibli tenglama uchun to‘rtburchak sohada bitta chegaraviy masala ko‘rib chiqilgan. Qo‘yilgan masala yechimining yagonaligi energiya integrallari usuli bilan isbotlangan. Yechim Grin funksiyasi yordamida yoziladi. Tekis yaqinlashishni isbotlashda “kichik maxraj” nolga teng bo‘lmasligi ko‘rsatiladi.

Kalit so‘zlar: to‘rtinchi tartibli tenglama, karrali xarakteristikalar, kichik hadlar, chegaraviy masala, yagonalik, mavjudlik, Grin funksiyasi.

**РЕШЕНИЕ ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО
УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ
ХАРАКТЕРИСТИКАМИ**

С.М.Мамажонов

PhD докторант института математики имени В.И. Романовского АН РУз.

Gmail: sanjarbekmamajonov@gmail.com

E-mail: bek84-08@mail.ru

Tel: +998903031656

Аннотация: В работе для неоднородного уравнения четвертого порядка с младшими членами с переменными коэффициентами рассмотрена

одна краевая задача в прямоугольной области. Единственность решения поставленной задачи доказана методом интегралов энергии. Решение выписано через построенную функцию Грина. При обосновании равномерной сходимости установлена отличность от нуля “малого знаменателя”.

Ключевые слова: уравнение четвертого порядка, кратные характеристики, младшие члены, краевая задача, единственность, существование, функция Грина.

SOLUTION OF THE SECOND BOUNDARY PROBLEM FOR A NONHOMOGENEOUS FOURTH ORDER EQUATION WITH MULTIPLE CHARACTERISTICS

S.M. Mamajonov

PhD doctoral student of the Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky

AS RUz.

Gmail: sanjarbekmamajonov@gmail.com

E-mail: bek84-08@mail.ru

Tel: +998903031656

Annotation: In this paper, for an inhomogeneous fourth-order equation with lower terms with variable coefficients, one boundary value problem in a rectangular domain is considered. The uniqueness of the solution of the stated problem is proved by the method of energy integrals. The solution is written with the help of the constructed Green's function. In substantiating the uniform convergence, the “small denominator” is established to be nonzero.

Keywords: fourth-order equation, multiple characteristics, lower terms, boundary value problem, uniqueness, existence, Green's function.

ВВЕДЕНИЕ.

В данной работе в области $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < p, 0 < y < q\}$ рассматривается уравнение четвертого порядка в виде

$$U_{xxxx} - U_{yy} + A_1(x)U_{xxx} + A_2(x)U_{xx} + A_3(x)U_x + A_4(x)U + A_5U_y = F(x, y),$$

где $p, q, A_5 \in R$ и $F(x, y), A_i(x), i = \overline{1, 4}$ – заданные достаточно гладкие функции.

Заменой

$$U(x, y) = u(x, y) \exp \left(-\frac{1}{4} \int_0^x A_1(\xi) d\xi + \frac{A_5}{2} y \right)$$

это уравнение можно привести к уравнению

$$L[u] = u_{xxxx} + a_1(x)u_{xx} + a_2(x)u_x + a_3(x)u - u_{yy} = f(x, y), \quad (1)$$

где $a_i(x), i = \overline{1, 3}$ выражается через $A_i(x), i = \overline{1, 4}$ и A_5 ,

$$f(x, y) = \exp \left[\frac{1}{4} \int_0^x A_1(\xi) d\xi - \frac{A_5}{2} y \right] F(x, y).$$

Уравнение (1), обычно называется уравнением четвертого порядка с кратными характеристиками, содержащее вторую производную по времени.

АНАЛИЗ ЛИТЕРАТУРЫ:

Изучение многих задач газовой динамике, теории упругости, теории пластин и оболочек приводится к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных высоких порядков. С точки зрения физических приложений представляют большой интерес и дифференциальные уравнения четвертого порядка (см. [1], [2], [3], [4]).

Монография Джураева Т.Д., Сопуева А. [5] посвящена классификаций дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка и решению краевых задач для таких уравнений. Согласно лемме 1.3 из [5], уравнение (1) относится к параболическому типу.

В работах [6], [7], [8], [9], [10], [11] изучены ряд корректных краевых задач для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками,

разработанную в этих работах методику применяем для уравнения четвертого порядка.

Аманов Д., Мурзамбетова М.Б. в работе [12] рассмотрели задачу с краевыми условиями для неоднородного уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками при $a_1 = a_2 = 0$.

Сабитов К. Б, Фадеева О. В. в работе [13] решили задачу с начальными и граничными условиями для вынужденных колебаний консольной балки.

Иргашев Б. Ю. в статье [14] изучал краевую задачу для уравнения высокого порядка с кратными характеристиками методом построения функции Грина.

Уринов А.К., Азизов М.С. в работе [15] исследовали задачу для уравнения четвертого порядка с неизвестной правой частью.

МЕТОДОЛОГИЯ ИССЛЕДОВАНИЯ.

Задача, изучаемая в данной статье, во многом отличается от упомянутых выше работ. Во-первых, в уравнение включены младшие члены. Во-вторых, в вышеупомянутых работах собственные функции найдены по переменной x , по y делают остальные выкладки. В нашей работе собственные функции находим по переменной y , а по x решаем задачу при помощи построения функции Грина и получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода, решая это уравнение находим решение поставленной задачи.

АНАЛИЗ И РЕЗУЛЬТАТЫ.

Для уравнения (1) в области Ω изучим следующую задачу.

Задача B_2 . Найти функцию $u(x, y)$ из класса $C_{x,y}^{4,2}(\Omega) \cap C_{x,y}^{3,1}(\bar{\Omega})$, удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω и следующим краевым условиям:

$$\begin{aligned} u_y(x, 0) &= 0, \quad u_y(x, q) = 0, \quad 0 \leq x \leq p, \\ u_x(0, y) &= \psi_1(y), \quad u_x(p, y) = \psi_2(y), \\ u_{xxx}(0, y) &= \psi_3(y), \quad u_{xxx}(p, y) = \psi_4(y), \quad 0 \leq y \leq q, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\psi_i(y)$, $i=\overline{1,4}$, $a_j(y)$, $j=\overline{1,3}$, $f(x,y)$ заданные достаточно гладкие функции.

Отметим, что в работе [12] рассмотрен случай $a_1=a_2=0$, $a_3 \neq 0$, а в работах [13], [15-17] исследованы краевые задачи для модельных уравнений четвертого порядка спектральном методом. В работе [18], метод Фурье используется для решения краевой задачи для модельного уравнения произвольного четного порядка. В работах [19], [20], исследованы краевые задачи для уравнения (1) когда все коэффициенты постоянные. В работах [21], [22] исследованы другие краевые задачи для уравнения (1).

Теорема 1. Если задача B_2 имеет решение, то при выполнении условий $a_1(x) \leq 0$, $a_3(x) > 0$, $2a_3(x) + a_1''(x) - a_2'(x) \geq 0$, $a_1'(0) - a_2(0) \geq 0$, $a_1'(p) - a_2(p) \leq 0$, оно единственно.

Доказательство. Предположим, обратное пусть задача B_2 имеет два решения $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$. Тогда функция $u(x,y) = u_1(x,y) - u_2(x,y)$ удовлетворяет однородному уравнению (1) и однородным краевым условиям. Докажем, что $u(x,y) \equiv 0$ в $\bar{\Omega}$.

В области Ω справедливо тождество

$$uL[u] = \frac{\partial}{\partial x} \left(uu_{xx} - u_x u_{xx} + a_1(x)uu_x - \frac{1}{2}a_1'(x)u^2 + \frac{1}{2}a_2(x)u^2 \right) - \frac{\partial}{\partial y} (uu_y) + \\ + u_{xx}^2 - a_1(x)u_x^2 + \frac{1}{2}(2a_3(x) + a_1''(x) - a_2'(x))u^2 + u_y^2 = 0 \quad (3)$$

Интегрируя тождество (3) по области Ω и учитывая однородные краевые условия, получим

$$\int_0^p \int_0^q u_{xx}^2(x,y) dx dy + \int_0^p \int_0^q u_y^2(x,y) dx dy - \int_0^p \int_0^q a_1(x)u_x^2(x,y) dy dx + \\ + \frac{1}{2} \int_0^p \int_0^q (2a_3(x) + a_1''(x) - a_2'(x))u^2(x,y) dy dx +$$

$$+\frac{1}{2} \int_0^q (a_1'(0) - a_2(0)) u^2(0, y) dy - \frac{1}{2} \int_0^q (a_1'(p) - a_2(p)) u^2(p, y) dy = 0,$$

При $a_1''(x) - a_2'(x) + 2a_3(x) > 0$, $a_1(x) \leq 0$ из четвертый интеграл имеем

$$u(x, y) = 0.$$

Если $a_1''(x) - a_2'(x) + 2a_3(x) = 0$, $a_1(x) = 0$ тогда из второй интеграл получим

$$u(x, y) = h(x),$$

а из первой интеграл

$$u(x, y) = x b_1(y) + b_2(y).$$

Отсюда вывод, что

$$u(x, y) = h(x) = x b_1 + b_2, \quad b_1, b_2 = \text{const.}$$

Учитывая $u_x(0, y) = 0$ имеем

$$u_x(0, y) = b_1 = 0 \Rightarrow u(x, y) = b_2.$$

Поставим это в однородное уравнение

$$a_3(x) b_2 = 0 \Rightarrow b_2 = 0.$$

Тогда получим

$$u(x, y) = 0.$$

Теорема 1 доказана.

Замечание. Отметим, что при нарушении условий теоремы 1, однородная задача B_2 для однородного уравнение (1) может иметь

нетривиальные решения. Например, легко можно убедиться, когда $a_1 = \left(\frac{\pi k}{p} \right)^2$,

$a_2 = 0$, $a_3 = - \left(\frac{\pi n}{q} \right)^2$ задача

$$\begin{cases} u_{xxxx}(x, y) + \left(\frac{\pi k}{p}\right)^2 u_{xx}(x, y) - \left(\frac{\pi n}{q}\right)^2 u(x, y) - u_{yy} = 0, \\ u_y(x, 0) = u_y(x, q) = 0, \\ u_x(0, y) = u_x(p, y) = u_{xxx}(0, y) = u_{xxx}(p, y) = 0, \end{cases}$$

имеет нетривиальное решение вида

$$u_{k,n} = \cos\left(\frac{\pi k}{p}x\right) \cos\left(\frac{\pi n}{q}y\right), \quad k, n = 0, 1, 2, \dots$$

Теорема 2. Если выполняются следующие условия:

$$1. \quad a_1'(0) - a_2(0) = 0, \quad a_1'(p) - a_2(p) = 0;$$

$$2. \quad D < \frac{\mu_1^3 (1 - e^{-2\mu_1 p})^2}{p(3 + 3\mu_1(1 + e^{-4\mu_1 p}) + 2\mu_1^2)};$$

$$3. \quad \psi_i'(0) = \psi_i'(q) = 0, \quad \psi_i(y) \in C^3[0, q], \quad i = \overline{1, 4};$$

$$4. \quad f_y(x, 0) = f_y(x, q) = 0, \quad 0 \leq x \leq p, \quad f_{xyy}(x, y) \in C(\bar{\Omega});$$

то решение задачи B_2 существует. Здесь

$$D = \max_{\xi \in [0, p]} \left\{ \left| a_i^{(j)}(\xi) \right|, \left| a_1''(\xi) \right|, i = \overline{1, 3}, j = 0, 1 \right\}, \quad \mu_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2q}}, \quad \alpha > 0.$$

Доказательство. Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases} Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, \\ Y'(0) = Y'(q) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Известно, что нетривиальное решение задачи (4), существует только при

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{q}\right)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Эти числа являются собственными значениями задачи (4), а соответствующие им собственные функции, которые образуют в $L_2[0, p]$ полную ортонормированную систему, имеют следующий вид:

$$Y_n(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{q}}, & n=0, \\ \sqrt{\frac{2}{q}} \cos\left(\frac{\pi n}{q} y\right), & n \in N. \end{cases}$$

Решение задачи B_2 ищем в виде

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) \cdot Y_n(y). \quad (5)$$

Формально считая, что (5) удовлетворяет уравнение (1), и подставляя (5) в (1), учитывая граничные условия (2), получим задачу:

$$\begin{cases} X_n^{(4)}(x) + a_1(x)X_n''(x) + a_2(x)X_n'(x) + a_3(x)X_n(x) + \lambda_n X_n(x) = f_n(x), \\ X_n'(0) = \psi'_{1n}, X_n'(p) = \psi'_{2n}, X_n'''(0) = \psi'_{3n}, X_n'''(p) = \psi'_{4n}, \end{cases} \quad (6)$$

где

$$\psi_{in} = \int_0^q \psi_i(\eta) Y_n(\eta) d\eta, \quad i = \overline{1, 4}, \quad f_n(x) = \int_0^q f(x, \eta) Y_n(\eta) d\eta, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Решаем задачу (6) с помощью функцию Грина. Для построения функции Грина сначала приводим краевые условия к нулю. Введем обозначение

$$V_n(x) = X_n(x) - \rho_n(x), \quad (7)$$

здесь $\rho_n(x)$ известная функция.

Вставим (7) в (6). Тогда получим задачу

$$\begin{cases} V_n^{(4)}(x) + \lambda_n V_n(x) = g_n(x) - a_1(x)V_n''(x) - a_2(x)V_n'(x) - a_3(x)V_n(x), \\ V_n'(0) = V_n'(p) = V_n'''(0) = V_n'''(p) = 0, \end{cases} \quad (8)$$

здесь $g_n(x)$ известная функция.

Сначала решаем задачу (8) при $n=0$, т.е. $\lambda_0=0$. В этом случае

$$u_0(x, y) = X_0(x)Y_0(y) = \frac{1}{\sqrt{q}} X_0(x) = u_0(x).$$

Задачу (8) запишем в следующем виде:

$$\begin{cases} V_0^{(4)}(x) + a_1(x)V_0''(x) + a_2(x)V_0'(x) + a_3(x)V_0(x) = g_0(x), \\ V_0'(0) = V_0'(p) = V_0'''(0) = V_0'''(p) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Согласно теореме 1, задача

$$\begin{cases} V_0^{(4)}(x) + a_1(x)V_0''(x) + a_2(x)V_0'(x) + a_3(x)V_0(x) = 0, \\ V_0'(0) = V_0'(p) = V_0'''(0) = V_0'''(p) = 0, \end{cases}$$

имеет только тривиальное решение и существует единственная функция Грина $G_0(x, \xi)$ для задачи (9). Решение задачи (9) имеет вид

$$V_0(x) = \int_0^p G_0(x, \xi) g_0(\xi) d\xi.$$

Тогда решение задачи B_2 , при $n=0$, имеет вид

$$u_0(x) = \frac{1}{\sqrt{q}}(V_0(x) + \rho_0(x)). \quad (10)$$

В дальнейшем максимальное значение всех найденных положительных известных чисел в оценках будем обозначать через M .

Находим оценки для (10) и $u_0^{(4)}(x)$ в следующем виде:

$$|u_0(x)| \leq M, \quad |u_0^{(4)}(x)| \leq M.$$

При $n \in N$, решение задачи (8) ищем в виде

$$\begin{aligned} V_n(x) = & \int_0^p G_n(x, \xi) g_n(\xi) d\xi - \\ & - \int_0^p G_n(x, \xi) (a_1(\xi)V_n''(\xi) + a_2(\xi)V_n'(\xi) + a_3(\xi)V_n(\xi)) d\xi, \end{aligned} \quad (11)$$

где $G_n(x, \xi)$ функция Грина задачи

$$\begin{cases} V_n^{(4)}(x) + \lambda_n V_n(x) = 0, \\ V_n'(0) = V_n'(p) = V_n'''(0) = V_n'''(p) = 0, \end{cases}$$

которая имеет вид

$$G_n(x, \xi) = \begin{cases} G_n^1(x, \xi), & 0 \leq x < \xi, \\ G_n^2(x, \xi), & \xi < x \leq p, \end{cases}$$

здесь

$$\begin{aligned} G_n^1(x, \xi) = & \frac{1}{2\mu_n^3 \Delta} \left\{ \left[\cos(\mu_n p) \operatorname{sh}(\mu_n p) (\sin(\mu_n (\xi - p)) \operatorname{sh}(\mu_n (\xi - p))) - \right. \right. \\ & - \cos(\mu_n (\xi - p)) \operatorname{ch}(\mu_n (\xi - p))] - \\ & - \sin(\mu_n p) \operatorname{ch}(\mu_n p) (\sin(\mu_n (\xi - p)) \operatorname{sh}(\mu_n (\xi - p)) + \\ & + \cos(\mu_n (\xi - p)) \operatorname{ch}(\mu_n (\xi - p))) \Big] \cos(\mu_n x) \operatorname{ch}(\mu_n x) + \\ & + \sin(\mu_n p) \operatorname{ch}(\mu_n p) (\sin(\mu_n (\xi - p)) \operatorname{sh}(\mu_n (\xi - p)) - \\ & - \cos(\mu_n (\xi - p)) \operatorname{ch}(\mu_n (\xi - p))) + \\ & + \cos(\mu_n p) \operatorname{sh}(\mu_n p) (\sin(\mu_n (\xi - p)) \operatorname{sh}(\mu_n (\xi - p)) + \\ & + \cos(\mu_n (\xi - p)) \operatorname{ch}(\mu_n (\xi - p))) \Big] \sin(\mu_n x) \operatorname{sh}(\mu_n x) \Big\}, \\ G_n^2(x, \xi) = & \frac{1}{2\mu_n^3 \Delta} \left\{ \left[\cos(\mu_n p) \operatorname{sh}(\mu_n p) (\sin(\mu_n \xi) \operatorname{sh}(\mu_n \xi)) - \right. \right. \\ & - \cos(\mu_n \xi) \operatorname{ch}(\mu_n \xi)) - \sin(\mu_n p) \operatorname{ch}(\mu_n p) (\sin(\mu_n \xi) \operatorname{sh}(\mu_n \xi) + \\ & + (\cos(\mu_n \xi) \operatorname{ch}(\mu_n \xi))) \Big] \cos(\mu_n (x - p)) \operatorname{ch}(\mu_n (x - p)) + \\ & + \left[\sin(\mu_n p) \operatorname{ch}(\mu_n p) (\sin(\mu_n \xi) \operatorname{sh}(\mu_n \xi)) - \right. \\ & - \cos(\mu_n \xi) \operatorname{ch}(\mu_n \xi)) + \cos(\mu_n p) \operatorname{sh}(\mu_n p) (\sin(\mu_n \xi) \operatorname{sh}(\mu_n \xi) + \\ & + \cos(\mu_n \xi) \operatorname{ch}(\mu_n \xi))] \sin(\mu_n (x - p)) \operatorname{sh}(\mu_n (x - p)) \Big\}, \end{aligned}$$

где

$$\Delta = -e^{2\mu_n p} \bar{\Delta}, \quad \bar{\Delta} = \frac{1 + e^{-4\mu_n p}}{2} - \cos(2\mu_n p) e^{-2\mu_n p}, \quad \mu_n = \sqrt{\frac{\pi n}{2q}}.$$

Предположим, $\bar{\Delta} = 0$, тогда

$$2 \cos(2\mu_n p) = e^{2\mu_n p} + e^{-2\mu_n p}.$$

Учитывая $\mu_n > 0$, имеем систему неравенств

$$\begin{cases} e^{2\mu_n p} + e^{-2\mu_n p} > 2, \\ 2 \cos(2\mu_n p) \leq 2, \end{cases}$$

который не имеет решение. Значит,

$$\bar{\Delta} > 0.$$

И так $\Delta \neq 0$.

Чтобы оценить $\bar{\Delta}$ снизу будем считать, что $\cos(2\mu_n p) = 1$, тогда имеем

$$\bar{\Delta} \geq \frac{1}{2}(1 - e^{-2\mu_n p})^2.$$

Правая сторона этого неравенства при дискретных значениях n возрастает, поэтому при $n=1$ принимает минимальное значение и получим

$$\bar{\Delta} \geq \frac{1}{2}(1 - e^{-2\mu_1 p})^2 = \delta > 0.$$

Это доказывает отсутствие «малого знаменателя».

Учитывая условие 1 теоремы 2, интегрируя по частям второй интеграл в равенстве (11) и введя обозначения

$$\beta_n(x) = \int_0^p G_n(x, \xi) g_n(\xi) d\xi,$$

$$\bar{G}_n(x, \xi) = (a_2'(\xi) - a_1''(\xi) - a_3(\xi))G_n + (a_2(\xi) - 2a_1'(\xi))G_{n\xi} - a_1(\xi)G_{n\xi\xi},$$

получим

$$V_n(x) = \beta_n(x) + \int_0^p \bar{G}_n(x, \xi) V_n(\xi) d\xi, \quad (12)$$

являющееся интегральным уравнением Фредгольма второго рода. Запишем решение (12) с помощью резольвенты

$$V_n(x) = \beta_n(x) + \int_0^p R_n(x, \xi) \beta_n(\xi) d\xi, \quad (13)$$

где

$$R_n(x, \xi) = \bar{G}_{0n}(x, \xi) + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{G}_{mn}(x, \xi),$$

называется резольвентой,

$$\bar{G}_{mn}(x, \xi) = \int_0^p \bar{G}_n(x, s) \bar{G}_{(m-1)n}(s, \xi) ds, \quad \bar{G}_{0n}(x, \xi) = \bar{G}_n(x, \xi), \quad m, n \in N.$$

В силу (5), (7), (10) и (13) решение задачи B_2 имеет вид

$$u(x, y) = u_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (V_n(x) + \rho_n(x)) Y_n(y), \quad (14)$$

Проверим (14) на сходимость. Для оценки резольвенты мажорирующий ряд имеет вид

$$\frac{1}{p} \sum_{m=1}^{\infty} (Jp)^m, \quad (15)$$

где

$$J = \left(\frac{3}{\mu_1^3} + \frac{3}{\mu_1^2} (1 + e^{-4\mu_1 p}) + \frac{2}{\mu_1} \right) (1 - e^{-2\mu_1 p})^{-2} D.$$

Условие 2 теоремы 2 можно записать в виде

$$\left(\frac{3}{\mu_1^3} + \frac{3}{\mu_1^2} (1 + e^{-4\mu_1 p}) + \frac{2}{\mu_1} \right) (1 - e^{-2\mu_1 p})^{-2} Dp < 1,$$

отсюда

$$Jp < 1,$$

тогда мажорирующий ряд (15) является бесконечно убывающей геометрической прогрессией. В этом случае резольвента равномерно сходится, и его оценка имеет вид

$$|R_n(x, \xi)| \leq \frac{J}{1 - Jp} \leq M. \quad (16)$$

Теперь оценим $\beta_n(x)$. Сначала, учитывая условия 3, 4 теоремы 2, интегрируем по частям ψ_{in} три раза, а $f_n(x)$ два раза и получим следующие оценки:

$$|\psi_{in}| \leq \frac{M}{n^3} |\Psi_{in}|, \quad i = \overline{1,4}, \quad |f_n(x)| \leq \frac{M}{n^2} |\Phi_n(x)|, \quad n \in N. \quad (17)$$

где

$$\Psi_{in} = \sqrt{\frac{2}{q}} \int_0^q \psi_i'''(\eta) \sin\left(\frac{\pi n}{q} \eta\right) d\eta, \quad i = \overline{1,4}, \quad \Phi_n(x) = \int_0^q f_{\eta\eta}(x, \eta) Y_n(\eta) d\eta.$$

Учитывая (17), находим

$$|\beta_n(x)| \leq \frac{M}{n^3} \sum_{i=1}^4 |\Psi_{in}| + \frac{M}{n^4} (1 + |\Phi_n(x)| + |\Phi_n(p)| + |\Phi_n(0)|), \quad (18)$$

Согласно (16), (18) имеем

$$|V_n(x)| = \frac{M}{n^3} \sum_{i=1}^4 |\Psi_{in}| + \frac{M}{n^4} (1 + |\Phi_n(x)| + |\Phi_n(p)| + |\Phi_n(0)|). \quad (19)$$

Учитывая (19) и оценку

$$|\rho_n(x)| \leq \frac{M}{n^3} (|\Psi_{1n}| + |\Psi_{2n}| + |\Psi_{3n}| + |\Psi_{4n}|),$$

получим

$$|u(x, y)| \leq M + M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^4 |\Psi_{in}| + M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} (1 + |\Phi_n(x)| + |\Phi_n(p)| + |\Phi_n(0)|) < \infty.$$

После некоторых вычислений и введя обозначение

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) = & \frac{M}{n^2} \left[\sum_{i=1}^4 |\Psi_{in}| + (1 + |\Phi_n(x)| + |\Phi_n(0)| + |\Phi_n(p)|) \right] + \\ & + \frac{M}{n^3} \left[\sum_{i=1}^4 |\Psi_{in}| + (1 + |\Phi_n(x)| + |\Phi_n(0)| + |\Phi_n(p)|) \right] + \\ & + \frac{M}{n^{\frac{7}{2}}} (1 + |\Phi_n(x)| + |\Phi_n(0)| + |\Phi_n(p)|) + \\ & + \frac{M}{n^{\frac{5}{2}}} \sum_{i=1}^4 |\Psi_{in}| + \frac{M}{n^4} (1 + |\Phi_n(x)| + |\Phi_n(0)| + |\Phi_n(p)|) = O(n^{-2}), \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

находим оценку для $u_{xxxx}(x, y)$ в следующем виде:

$$|u_{xxxx}(x, y)| \leq M + M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (|\Psi_{1n}| + |\Psi_{2n}| + |\Psi_{3n}| + |\Psi_{4n}|) + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x),$$

где второй ряд сходится абсолютно и равномерно. Чтобы доказать абсолютную и равномерную сходимость первого ряда, мы используем неравенства Коши-Буняковского и Бесселя

$$\begin{aligned} & M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (|\Psi_{1n}| + |\Psi_{2n}| + |\Psi_{3n}| + |\Psi_{4n}|) \leq \\ & \leq M \left(\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\Psi_{1n}|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\Psi_{2n}|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\Psi_{3n}|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\Psi_{4n}|^2} \right) \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} \leq \\ & \leq M (\|\psi_1'''(y)\| + \|\psi_2'''(y)\| + \|\psi_3'''(y)\| + \|\psi_4'''(y)\|) \sqrt{\frac{\pi^2}{6}} < \infty, \end{aligned}$$

здесь

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\Psi_{in}|^2 \leq \|\psi_i'''(y)\|_{L_2(0,q)}^2, \quad i = \overline{1,4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Учитывая уравнение (1), заключаем, что и u_{yy} тоже сходится. Теорема 2 доказана.

Выражаю глубокие благодарности своему научному руководителю Апакову Юсупжону Пулатовичу, доктору физика-математических наук, ведущему научному сотруднику института математики имени В.И.Романовского, за постановку задачи и постоянное внимание к его реализации.

Заключение

Рассмотрена новая корректная краевая задача в прямоугольной области для неоднородного уравнение четвертого порядка с кратными характеристиками, когда все коэффициенты переменные. Единственность решения поставленной задачи доказана методом интегралов энергии с необходимыми и достаточными условиями. При нарушении необходимых и достаточных условий задача может не иметь единственного решения. На это приведено контрпример в виде замечание.

Для того чтобы доказать существование решения задачи, сначала методом Фурье были разделены переменные. Затем были найдены

собственные значения и собственные функции по переменной y . Решение задачи, образованной по переменной x , искали с помощью функции Грина и приходили к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода относительно неизвестной функции. Решение этой интегральной уравнения найдено с помощью резольвенты, а решение поставленной задачи найдено в виде ряда и доказана сходимость решения и его производных, входящих в уравнение.

Литература

1. Турбин М.В. Исследование начально-краевой задачи для модели движения жидкости Гершел - Балкли // Вест. Воронеж. Гос. Ун-та. Сер. Физ. Мат. 2013. № 2. - С. 246-257.
2. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны.-М.: Мир,1977.
3. Шабров С.А. Об оценках функций влияния одной математической модели четвертого порядка // Вест. Воронеж. Гос. Ун-та. Сер. Физ. Мат. 2015. № 2. - С. 168-179.
4. Benney D.J., Luke J.C. Interactions of permanent waves of finite amplitude // J. Math. Phys. 1964. 43. P.309-313.
5. Джураев Т.Д., Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. –Ташкент: Фан, 2000.-144 с.
6. Джураев Т.Д, Апаков Ю.П. К теории уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, содержащего вторую производную по времени // Украинский математический журнал. – Киев, 2010, том 62. № 1.- С. 40-51.
7. Apakov Yu.P., Rutkauskas S. On a boundary problem to third order PDE with multiple characteristics // Nonlinear Analysis: Modeling and Control. - Vilnius, 2011. -Vol. 16. - № 3.- pp. 255-269.
8. Apakov Yu.P. On the solution of a boundary-value problem for a third-order equation with multiple characteristics // Ukrainian Mathematical Journal. Springer, New York, June, 2012 –Vol. 64, № 1. –P. 1-11.

9. Apakov Yu.P. Irgashev B.Yu. Boundary-value problem for a degenerate high-odd-order equation // Ukrainian Mathematical Journal. Springer, New York, June, 2015 -Vol. 66, № 10. -P. 1475-1488.
10. Apakov Yu.P., A. Kh. Zhuraev. Third boundary-value problem for a third-order differential equation with multiple characteristics // Ukrainian Mathematical Journal. Springer, New York, February, 2019 -Vol. 70, № 9. - P. 1467-1476.
11. Apakov Yu.P. On Unique Solvability of Boundary-Value Problem for a Viscous Transonic Equation // Lobachevski Journal of Mathematics. 2020 Vol, 41, № 9, -pp. 1754-1761.
12. Аманов Д., Мурзамбетова М. Б. Краевая задача для уравнения четвертого порядка с младшим членом, Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки, 2013, выпуск 1, 3–10.
13. Сабитов К. Б., Фадеева О. В. Начально-граничная задача для уравнения вынужденных колебаний консольной балки // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 25:1 (2021), 51–66.
14. Иргашев Б. Ю. Краевая задача для одного вырождающегося уравнения высокого порядка с младшими членами // Бюллетень Института математики 2019, №6, стр.23-30.
15. Urinov A.K., Azizov M.S. Boundary Value Problems for a Fourth Order partial Equation with an Unknown Right – hand Part // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2021, Vol. 42 №3 pp.632-640.
16. Аманов Д., Бекиев А.Б., Отарова Ж.А. Об одной краевой задаче для уравнения четвертого порядка // УзМЖ. 2015. -№4. -с.11-18.
17. Сабитов К. Б. Обратные задачи для уравнения колебаний балки по определению правой части и начальных условий // Дифференциальные уравнения, 2020, том 56, №6, с. 761 – 774.
18. Иргашев Б. Ю. Краевая задача для уравнения высокого четного порядка, Вестн. Волгогр. гос. ун-та. Сер. 1, Мат. Физ., 2016, выпуск 3(33), 6–18.

19. Y.P. Apakov and S.M. Mamajonov: A boundary-value problem for the fourth order equation with multiple characteristics in a rectangular domain. Nonlinear Oscillations. Published in vol. 24 (2021), No. 3, pp. 291-305.
20. Mamajonov S.M. The third boundary problem for a fourth-order non-homogeneous equation with constant coefficients. Bull. Inst. Math., 2022, Vol. 5, No. 6, pp. 100-109.
21. Ю.П. Апаков, С.М. Мамажонов. Краевая задача для неоднородного уравнения четвертого порядка с переменными коэффициентами. Доклады Академии наук Республики Узбекистан (ДАН), №4, 2022 г.
22. Ю.П. Апаков, С.М. Мамажонов. Краевая задача для неоднородного уравнения четвертого порядка с младшими членами. Дифференциальные уравнения, 2023, том 59, № 2, с. 183-192.