

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА, ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ВНУТРИ И НА ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ

Усмонов Дониёр Абдумутолиб угли
исследователь Ферганского государственного университета
usmonov-doniyor@inbox.ru

Аннотация. В данной статье для одного уравнения смешанного типа четвертого порядка, вырождающегося внутри и на границе области, прямоугольной области сформулирована и исследована нелокальная начально – граничная задача. Применяя метод разделения переменных к изучаемой задаче, получена спектральная задача для обыкновенного дифференциального уравнения. Доказана существование собственных значений и система собственных функций спектральной задачи. Доказана теорема разложения заданной функции в равномерно сходящийся ряд по системе собственных функций. Решение изучаемой задачи выписано в виде суммы ряда Фурье

е по системе собственных функций спектральной задачи. Получена оценка для решения задачи, откуда следует его непрерывная зависимость от заданных функций.

Ключевые слова: вырождающееся уравнение четвертого порядка, начально-граничная задача, метод разделения переменных, спектральная задача, функция Грина, интегральное уравнение, существование, единственность и устойчивость решения.

ON A NONLOCAL PROBLEM FOR A MIXED-TYPE FOURTH-ORDER EQUATION DEGENERATED INSIDE AND ON THE BOUNDARY OF THE DOMAIN

Usmonov Doniyor Abdumutolib ugli
researcher of Fergana State University
usmonov-doniyor@inbox.ru

Abstract. You shouldn't use formulas and citations in the abstract. In this article, for an equation of mixed type of the fourth order, degenerating inside and on the border of the domain, in a rectangular domain, a non-local initial boundary value problem has been formulated and investigated. Applying the method of separation variables to the considered problem a spectral problem for an ordinary differential equation has been obtained. The existence of eigenvalues and the system of eigenfunctions of the spectral problem were proved. A theorem is proved for expanding a given function into a uniformly convergent series with respect to the system of eigenfunctions. The solution of the considered problem is written as the sum of the Fourier series with respect to the system of eigenfunctions of spectral problem. An estimate for solution of the problem is obtained, from which follows its continuous dependence on the given functions.

Keywords: degenerate fourth-order equation, initial-boundary problem, separation method, spectral problem, Green's function, integral equation, existence, uniqueness and stability of the solution.

SOHA ICHIDA VA CHEGARASIDA BUZILADIGAN ARALASH TIPDAGI TO`RTINCHI TARTIBLI XUSUSIY HOSILALI DIFFERENSIAL TENGLAMA UCHUN NOLOKAL CHEGARAVIY MASALA

Usmonov Doniyor Abdumutolib o`g`li
Fargʻona davlat universiteti tadqiqotchi
usmonov-doniyor@inbox.ru

Annotatsiya. Ushbu maqolada soha ichida va chegarasida buziladigan aralash tipdagi to`rtinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglama uchun nolokal chegaraviy masala bayon

qilingan va tadqiq etilgan. O'rganilayotgan masalaga o'zgaruvchilarni ajratish usulini qo'llash orqali oddiy differensial tenglama uchun spektral masala hosil qilingan. Spektral masalaning xos qiymatlari va xos funksiyalari sistemasinig mavjudligi isbotlangan. Berilgan funktsiyani xos funksiyalar sistemi orqali tekis yaqinlashuvchi qatorga yoyish haqidagi teorema isbotlangan. O'rganilayotgan masalaning yechimi spektral masalaning xos funksiyalar sistemi orqali Furye qatorining yig'indisi sifatida yoziladi. Masalaning yechimi uchun baho olingan, undan yechimning berilgan funktsiyalarga uzluksiz bog'liq ekanligi kelib chiqadi.

Kalit so'zlar: *buziladigan to'rtinchi tartibli tenglama, boshlang'ich chegaraviy masala, o'zgaruvchilarni ajratish usuli, spektral masala, Grin funktsiyasi, integral tenglama, yechimning mavjudligi, yagonaligi va turg'unligi.*

Введение. Постановка задачи

В связи с развитием дробного (дифференциального и интегрального) анализа, начиная с конца двадцатого века, исследователи начали заниматься дифференциальными уравнениями, содержащими дробные производные. При развитии этого направления существенную роль сыграли работы [1] - [4]. Ниже приведем краткий обзор исследований (близких тематике настоящей статьи) по дифференциальным уравнениям в частных производных четвертого порядка, содержащих дробную производную от неизвестной функции по временной переменной.

В работах [5] - [7] изучены начально-граничные задачи для одномерного и двумерного уравнения четвертого порядка, содержащие оператор дробного дифференцирования Капуто по временной переменной, причем в [7] рассмотрена и обратная задача. Начально-граничные задачи также изучены для уравнений четвертого порядка с оператором дробного дифференцирования Хильфера, Джрбашяна-Нерсисяна и Римана-Лиувилля соответственно в работах [8], [9] и [10]. Прямая и обратная задача для уравнения четвертого порядка смешанного типа с оператором Хильфера изучены соответственно в работах [11] и [12]. В этом направлении отметим также работы [13] и [14], где исследованы обратные задачи по определению порядка дробной производной в смысле соответственно Римана-Лиувилля и Капуто в уравнении субдиффузии и волновом уравнении с произвольным положительным оператором, имеющим дискретный спектр.

В перечисленных выше работах рассмотрены только невырождающиеся уравнения. Но как локальные, как и нелокальные краевые задачи для вырождающихся дифференциальных уравнений с частными производными, содержащих дробные производные от неизвестной функции остаются неизученными. Изучение краевых задач для таких уравнений имеет большое значение не только с теоретической точки зрения, но и с практической, ибо такие уравнения и задачи для них возникают при математическом моделировании многих задач теории газа и гидродинамики, теории малых изгибов поверхностей, математической биологии и других разделов науки.

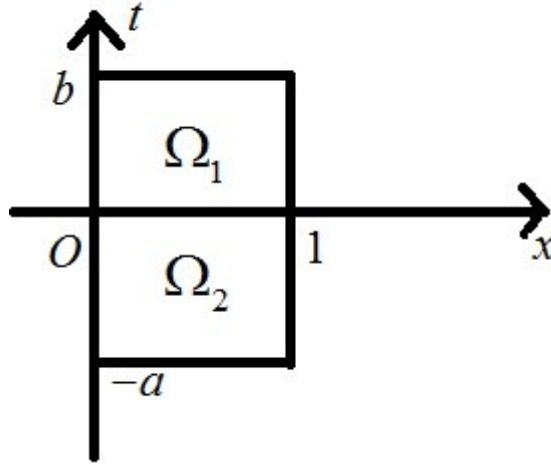
Начально-граничные задачи для вырождающихся уравнений с частными производными четвертого порядка, содержащие первые и вторые производные по временной переменной ранее изучались в работах [15]-[17].

В данной работе исследуем одну нелокальную задачу для уравнения смешанного типа четвертого порядка с оператором Капуто, вырождающегося внутри и на обеих боковых сторонах четырехугольника.

Рассмотрим следующее вырождающееся уравнение четвертого порядка

$$0 = \begin{cases} t^{\gamma} {}_C D_{0t}^{\delta_1} u(x, t) + \left[x^{\alpha} (1-x)^{\beta} u_{xx} \right]_{xx}, & (x, t) \in \Omega_1 = \Omega \cap \{t > 0\}, \\ {}_C D_{0t}^{\delta_2} u(x, t) + \left[x^{\alpha} (1-x)^{\beta} u_{xx} \right]_{xx}, & (x, t) \in \Omega_2 = \Omega \cap \{t < 0\}, \end{cases} \quad (1)$$

в прямоугольнике $\Omega = \{(x, t): 0 < x < 1; -a < t < b\}$, где $u(x, t)$ - неизвестная функция,



$${}_C D_{0t}^{\delta_1} u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \delta_1)} \int_0^t \frac{(\partial / \partial z) u(x, z)}{(t - z)^{\delta_1}} dz, \quad {}_C D_{t0}^{\delta_2} u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(2 - \delta_2)} \int_t^0 \frac{(\partial^2 / \partial z^2) u(x, z)}{(z - t)^{\delta_2 - 1}} dz -$$

производные дробного порядка в смысле – Капуто [18] от функции $u(x, t)$ по аргументу t , $\Gamma(z)$ - гамма - функция Эйлера [19], а $a, b, \alpha, \beta, \gamma, \delta_1, \delta_2$ - заданные действительные числа, причем $a > 0, b > 0, 0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1, 0 < \delta_1 < 1, 1 < \delta_2 < 2$.

Очевидно, что уравнение (1) вдоль линий $x = 0, x = 1$ и $t = 0$ вырождается.

Исследуем следующую краевую задачу для уравнения (1) в области Ω :

Задача $A_{p_1 q_1}^{p_2 q_2}$. Найти функцию $u(x, t)$, обладающую следующими свойствами:

$$1) \quad u(x, t), \quad u_x(x, t), \quad x^{\alpha} (1-x)^{\beta} u_{xx}, \quad \left[x^{\alpha} (1-x)^{\beta} u_{xx} \right]_x \in C(\bar{\Omega}); \quad t^{\gamma} {}_C D_{0t}^{\delta_1} u(x, t) \in C(\Omega_1), \\ {}_C D_{t0}^{\delta_2} u(x, t) \in C(\Omega_2), \quad \left[x^{\alpha} (1-x)^{\beta} u_{xx} \right]_{xx} \in C(\Omega_1 \cup \Omega_2).$$

2) в области $\Omega_1 \cup \Omega_2$ удовлетворяет уравнению (1).

3) на границе области Ω выполняются следующие краевые условия:

$$p_1 u(0, t) = q_1 u(1, t), \quad t \in [-a, b]; \quad (2)$$

$$p_2 u_x(0, t) = q_2 u_x(1, t), \quad t \in [-a, b]; \quad (3)$$

$$q_2 \left[x^{\alpha} (1-x)^{\beta} u_{xx}(x, t) \right]_{x=0} = p_2 \left[x^{\alpha} (1-x)^{\beta} u_{xx}(x, t) \right]_{x=1}, \quad t \in [-a, b]; \quad (4)$$

$$q_1 \left[x^{\alpha} (1-x)^{\beta} u_{xx}(x, t) \right]_{x|x=0} = p_1 \left[x^{\alpha} (1-x)^{\beta} u_{xx}(x, t) \right]_{x|x=1}, \quad t \in [-a, b]; \quad (5)$$

$$u(x, b) + \varphi(x) = u(x, -a), \quad x \in [0, 1]; \quad (6)$$

4) удовлетворяет следующие условия склеивания:

$$u(x, +0) = u(x, -0), \quad x \in [0, 1] \quad \lim_{t \rightarrow +0} t^{\gamma} {}_C D_{0t}^{\delta_1} u(x, t) = u_t(x, -0), \quad x \in (0, 1), \quad (7)$$

где $\varphi(x)$ - заданная функция, $p_1, q_1, p_2, q_2 \in \mathbb{R}$ заданные числа, причем $p_1^2 + q_1^2 \neq 0$, $p_2^2 + q_2^2 \neq 0$.

Исследование спектральной задачи

При применении метода Фурье к поставленной задаче $A_{p_1, q_1}^{p_2, q_2}$ возникает следующая спектральная задача: найти те значения параметра λ , при которых существуют нетривиальные решения уравнения

$$Mv \equiv \left[x^\alpha (1-x)^\beta v''(x) \right]' = \lambda v(x), \quad 0 < x < 1, \quad (8)$$

удовлетворяющие следующим условиям:

$$\left. \begin{aligned} &v(x), v'(x), x^\alpha (1-x)^\beta v''(x), \left[x^\alpha (1-x)^\beta v''(x) \right]' \in C[0,1]; \\ &p_1 v(0) = q_1 v(1), \quad q_2 \left[x^\alpha (1-x)^\beta v''(x) \right] \Big|_{x=0} = p_2 \left[x^\alpha (1-x)^\beta v''(x) \right] \Big|_{x=1}, \\ &p_2 v'(0) = q_2 v'(1), \quad q_1 \left[x^\alpha (1-x)^\beta v''(x) \right] \Big|_{x=0}' = p_1 \left[x^\alpha (1-x)^\beta v''(x) \right] \Big|_{x=1}'. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Лемма 1. Если $p_1 \neq q_1$ и $p_2 \neq q_2$, то задача $\{(5), (6)\}$ имеет счетное число собственных значений $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k < \dots$, $\lambda_k \rightarrow +\infty$, а соответствующие им собственные функции $v_1(x), v_2(x), \dots, v_k(x), \dots$ образуют ортонормированную систему в пространстве $L_2(0,1)$.

Доказательство. Умножим обе части уравнения (8) на функцию $v(x)$ и проинтегрируем по x на сегменте $[0,1]$. Затем, применяя правило интегрирования по частям дважды к интегралу, стоящему в левой части, и учитывая условия (9), имеем

$$\int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta \left[v''(x) \right]^2 dx = \lambda \int_0^1 v^2(x) dx.$$

Отсюда, при $v(x) \neq 0$ следует $\lambda \geq 0$. Если $\lambda = 0$, то из последнего равенства следует $v''(x) = 0$, $0 < x < 1$. Тогда $v(x) = C_0 x + C_1$, $x \in (0,1)$, откуда, в силу условия $p_1 v(0) = q_1 v(1)$, $p_2 v'(0) = q_2 v'(1)$, $p_1 \neq q_1$, $p_2 \neq q_2$, получим $v(x) \equiv 0$, $0 \leq x \leq 1$. Следовательно, задача $\{(8), (9)\}$ может иметь нетривиальные решения только при $\lambda > 0$.

Существование собственных значений задачи $\{(8), (9)\}$ докажем методом функций Грина. Здесь функция Грина $G(x, s)$ должна обладать следующими свойствами:

1) $G(x, s)$, $G_x(x, s)$, $x^\alpha (1-x)^\beta G_{xx}(x, s)$ непрерывны для всех $x, s \in [0,1]$;

2) в каждом из интервалов $[0, s]$ и $(s, 1]$ существует непрерывная производная

$\left[x^\alpha (1-x)^\beta G_{xx}(x, s) \right]_x$, а при $x = s$ имеет скачок 1, т.е.

$$\left[x^\alpha (1-x)^\beta G_{xx}(x, s) \right]_x \Big|_{x=s+0} - \left[x^\alpha (1-x)^\beta G_{xx}(x, s) \right]_x \Big|_{x=s-0} = 1;$$

3) в интервалах $(0, s)$ и $(s, 1)$ функция $G(x, s)$, рассматриваемая как функция от x , удовлетворяет уравнению $MG(x, s) = 0$.

4) функция $G(x, s)$ по аргументу x при $s \in (0, 1)$ удовлетворяет краевым условиям $p_1 G(0, s) = q_1 G(1, s)$, $p_2 G_x(0, s) = q_2 G_x(1, s)$, $q_2 \left[x^\alpha (1-x)^\beta G_{xx}(x, s) \right] \Big|_{x=0} = p_2 \left[x^\alpha (1-x)^\beta G_{xx}(x, s) \right] \Big|_{x=1}$, $q_1 \left[x^\alpha (1-x)^\beta G_{xx}(x, s) \right] \Big|_{x=0} = p_1 \left[x^\alpha (1-x)^\beta G_{xx}(x, s) \right] \Big|_{x=1}$.

Пользуясь представлениями общего решения уравнения $MG(x, s) = 0$ в промежутках $(0, s)$ и $(s, 1)$, нетрудно убедиться, что функция $G(x, s)$, обладающая перечисленными выше свойствами, существует, единственна и имеет вид

$$G(x, s) = \begin{cases} -\frac{p_1}{p_1 - q_1} \int_0^x \frac{z(x-z)dz}{z^\alpha (1-z)^\beta} - \frac{q_1}{p_1 - q_1} \int_0^s \frac{z(s-z)dz}{z^\alpha (1-z)^\beta} + \\ + \frac{p_2}{p_2 - q_2} \int_0^x \frac{s(x-z)dz}{z^\alpha (1-z)^\beta} + \frac{q_2}{p_2 - q_2} \int_0^s \frac{x(s-z)dz}{z^\alpha (1-z)^\beta} + g(x, s), & x < s, \\ -\frac{p_1}{p_1 - q_1} \int_0^s \frac{z(s-z)dz}{z^\alpha (1-z)^\beta} - \frac{q_1}{p_1 - q_1} \int_0^x \frac{z(x-z)dz}{z^\alpha (1-z)^\beta} + \\ + \frac{p_2}{p_2 - q_2} \int_0^s \frac{x(s-z)dz}{z^\alpha (1-z)^\beta} + \frac{q_2}{p_2 - q_2} \int_0^x \frac{s(x-z)dz}{z^\alpha (1-z)^\beta} + g(x, s), & x > s. \end{cases} \quad (10)$$

где

$$g(x, s) = \frac{p_2 q_1}{(p_1 - q_1)(p_2 - q_2)} \left[\int_0^x \frac{(x-z)dz}{z^\alpha (1-z)^\beta} + \int_0^s \frac{(s-z)dz}{z^\alpha (1-z)^\beta} \right] + \frac{q_2^2 k_1 x s}{(p_2 - q_2)^2} - \frac{q_1 q_2 k_2 (x+s)}{(p_1 - q_1)(p_2 - q_2)} + \\ + \frac{p_2 q_2 q_1 k_1 (x+s)}{(p_1 - q_1)(p_2 - q_2)^2} + \frac{q_1^2 k_3}{(p_1 - q_1)^2} - \frac{2 p_2 q_1^2 k_2}{(p_1 - q_1)^2 (p_2 - q_2)} + \frac{p_2^2 q_1^2 k_1}{(p_1 - q_1)^2 (p_2 - q_2)^2},$$

$k_1 = B(1-\alpha, 1-\beta)$, $k_2 = B(2-\alpha, 1-\beta)$, $k_3 = B(3-\alpha, 1-\beta)$, $B(a, b)$ - бета - функция Эйлера.

Очевидно, что $G(x, s) = G(s, x)$.

Методом, примененным в [20], легко убедиться, что задача $\{(8), (9)\}$ эквивалентна следующему интегральному уравнению с симметричным ядром $G(x, s)$:

$$v(x) = \lambda \int_0^1 G(x, s) v(s) ds. \quad (11)$$

Так как ядро $G(x, s)$ непрерывно, симметрично и положительно (т.е. $\lambda > 0$), то в силу эквивалентности уравнения (11) и задачи $\{(8), (9)\}$, согласно теории интегральных уравнений [21], справедливо утверждение леммы 1.

Лемма 2. Пусть функция $h(x)$ удовлетворяет условиям:

$$h(x), h'(x) \in C[0, 1], \quad (12)$$

$$x^\alpha (1-x)^\beta h''(x), \left[x^\alpha (1-x)^\beta h''(x) \right]' \in C[0,1], \quad (13)$$

$$p_1 h(0) = q_1 h(1), \quad p_2 h'(0) = q_2 h'(1), \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} q_2 \left[x^\alpha (1-x)^\beta h''(x) \right] \Big|_{x=0} &= p_2 \left[x^\alpha (1-x)^\beta h''(x) \right] \Big|_{x=1}, \\ q_1 \left[x^\alpha (1-x)^\beta h''(x) \right]' \Big|_{x=0} &= q_2 \left[x^\alpha (1-x)^\beta h''(x) \right]' \Big|_{x=1}, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$Mh(x) \in L_2(0,1)$. Тогда, ее можно разложить на отрезке $[0,1]$ в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по системе собственных функций $\{v_k(x)\}_{k=1}^\infty$, задачи $\{(8), (9)\}$.

Доказательство. В силу свойства функций $G(x, s)$ и $h(x)$, справедливо равенство

$$\begin{aligned} \int_0^1 G(x, s) Mh(s) ds &= \int_0^1 G(x, s) \left[s^\alpha (1-s)^\beta h''(s) \right]'' ds = \\ &= \left[s^\alpha (1-s)^\beta h''(s) \right]' G(x, s) \Big|_{s=0}^{s=1} - s^\alpha (1-s)^\beta h''(s) G_s(x, s) \Big|_{s=0}^{s=1} + s^\alpha (1-s)^\beta h'(s) G_{ss}(x, s) \Big|_{s=0}^{s=1} - \\ &- h(s) \left[s^\alpha (1-s)^\beta G_{ss}(x, s) \right] \Big|_{s=0}^{s=x+0} - h(s) \left[s^\alpha (1-s)^\beta G_{ss}(x, s) \right] \Big|_{s=x+0}^{s=1} + \\ &+ \int_0^1 h(s) \left[s^\alpha (1-s)^\beta G_{ss}(x, s) \right]_{ss} ds = h(x). \end{aligned}$$

Следовательно, $h(x)$ - есть функция, представимая через ядро $G(x, s)$.

Кроме этого, в силу $G(x, s) \in C\{(x, s): 0 \leq x, s \leq 1\}$, имеет место неравенство

$$\int_0^1 G^2(x, s) ds = A(x) \leq C_2 = \text{const} < +\infty.$$

Тогда, согласно теореме Гильберта - Шмидта [21], справедливо утверждение леммы 2.

Вспомогательные леммы

В этом пункте предполагается, что $p_1 \neq q_1$, $p_2 \neq q_2$ и под λ_k и $v_k(x)$, $k \in N$ понимаются собственные значения и собственные функции задачи $\{(8), (9)\}$, а под h_k - коэффициент Фурье заданной функции $h(x)$ по системе собственных функций $\{v_k(x)\}_{k=1}^{+\infty}$, т.е. $h_k = \int_0^1 h(x) v_k(x) dx$.

Лемма 3. (О сходимости билинейных рядов). Следующие ряды сходятся равномерно на сегменте $[0,1]$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left[v_k^{(\mu)}(x) \right]^2 / \lambda_k, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \left\{ \left[x^\alpha (1-x)^\beta v_k''(x) \right]^{(\mu)} \right\}^2 / \lambda_k^2, \quad \mu = \overline{0,1}. \quad (16)$$

Доказательство. Так как ядро $G(x, s)$ интегрального уравнения (11) симметрично, положительно (т.е. $\lambda > 0$) и непрерывно в $\{(x, s): 0 \leq x, s \leq 1\}$, то на основании теоремы Мерсера [21], это ядро представлено абсолютно и равномерно сходящимся

билинейным рядом $G(x, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k(x)v_k(s)}{\lambda_k}$. Отсюда, в частности, при $x=s$ следует, что

$G(x, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k^2(x)}{\lambda_k} \leq C_3 = \text{const} < +\infty$, т.е. первый ряд в (16) равномерно сходится на отрезке $[0, 1]$.

В силу (11) и (8), имеют место равенства

$$v_k'(x) = \lambda_k \int_0^1 G_x(x, s) v_k(s) ds = \int_0^1 G_x(x, s) \left[s^\alpha (1-s)^\beta v_k''(s) \right]'' ds.$$

Отсюда, применяя правило интегрирования по частям два раза, а затем принимая во внимание условия $p_1 v_k(0) = q_1 v_k(1)$, $p_2 v_k'(0) = q_2 v_k'(1)$ и легко проверяемые равенства $p_1 G_x(x, 0) = q_1 G_x(x, 1)$, $p_2 G_{xss}(x, 0) = q_2 G_{xss}(x, 1)$, получим

$$v_k'(x) = \int_0^1 s^\alpha (1-s)^\beta G_{xss}(x, s) v_k''(s) ds.$$

Следовательно, справедливо равенство

$$\frac{v_k'(x)}{\sqrt{\lambda_k}} = \int_0^1 s^{\alpha/2} (1-s)^{\beta/2} G_{xss}(x, s) \left\{ \frac{s^{\alpha/2} (1-s)^{\beta/2} v_k''(s)}{\sqrt{\lambda_k}} \right\} ds. \quad (17)$$

Далее, с помощью правила интегрирования по частям и равенств (8), (9) нетрудно убедиться, что $\left\{ s^{\alpha/2} (1-s)^{\beta/2} v_k''(s) / \sqrt{\lambda_k} \right\}_{k=1}^{+\infty}$ - ортонормальная система.

Тогда из (17), следует, что $v_k'(x) / \sqrt{\lambda_k}$ - есть коэффициент Фурье функции $s^{\alpha/2} (1-s)^{\beta/2} G_{xss}(x, s)$ по ортонормальной системе $\left\{ s^{\alpha/2} (1-s)^{\beta/2} v_k''(s) / \sqrt{\lambda_k} \right\}_{k=1}^{+\infty}$.

Поэтому, согласно неравенству Бесселя [21], имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{[v_k'(x)]^2}{\lambda_k} \leq \int_0^1 s^\alpha (1-s)^\beta [G_{xss}(x, s)]^2 ds. \quad (18)$$

Пользуясь формулой (10), нетрудно убедиться, что интеграл в (18) равномерно ограничен. Поэтому ряд в (18), т.е. второй ряд в (16) сходится равномерно.

Аналогично доказывается сходимость остальных рядов. Лемма 3 доказана.

Ниже докажем ряд лемм о порядке коэффициентов Фурье.

Лемма 4. Если функция $h(x)$ удовлетворяет условиям (12), (14) $x^{\alpha/2} (1-x)^{\beta/2} h''(x) \in L_2(0, 1)$, то справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k h_k^2 \leq \int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta [h''(x)]^2 dx. \quad (19)$$

Доказательство. Из формулы коэффициента h_k , в силу уравнения (8), следует равенство

$$\lambda_k^{1/2} h_k = \lambda_k^{1/2} \int_0^1 h(x) v_k(x) dx = \lambda_k^{-1/2} \int_0^1 h(x) \left[x^{\alpha} (1-x)^{\beta} v_k''(x) \right]'' dx.$$

Применяя правило интегрирования по частям два раза и учитывая свойства функций $h(x)$ и $v_k(x)$, получим

$$\lambda_k^{1/2} h_k = \int_0^1 \left\{ x^{\alpha/2} (1-x)^{\beta/2} h''(x) \right\} \left\{ \lambda_k^{-1/2} x^{\alpha/2} (1-x)^{\beta/2} v_k''(x) \right\} dx.$$

Отсюда следует, что число $\lambda_k^{1/2} h_k$ - есть коэффициент Фурье функции $x^{\alpha/2} (1-x)^{\beta/2} h''(x)$ по ортонормированной системе функций $\left\{ x^{\alpha/2} (1-x)^{\beta/2} v_k''(x) / \sqrt{\lambda_k} \right\}_{k=1}^{+\infty}$. Тогда, согласно неравенству Бесселя [21], справедливо неравенство (19). Лемма 4 доказана.

Лемма 5. Если функция $h(x)$ удовлетворяет условиям леммы 2, то справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2 h_k^2 \leq \int_0^1 [Mh(x)]^2 dx. \quad (20)$$

Доказательство. Из формулы коэффициента h_k , в силу уравнений (8) и (11), справедливо равенство

$$\lambda_k h_k = \lambda_k \int_0^1 h(x) v_k(x) dx = \int_0^1 h(x) M v_k(x) dx = \int_0^1 h(x) \left[x^{\alpha} (1-x)^{\beta} v_k''(x) \right]'' dx.$$

Применяя правило интегрирования по частям четыре раза и учитывая свойства функций $h(x)$ и $v_k(x)$, получим

$$\lambda_k h_k = \int_0^1 \left[x^{\alpha} (1-x)^{\beta} h''(x) \right]'' v_k(x) dx = \int_0^1 [Mh(x)] v_k(x) dx.$$

Отсюда следует, что число $\lambda_k h_k$ - есть коэффициент Фурье функции $Mh(x)$ по ортонормированной системе функций $\{v_k(x)\}_{k=1}^{+\infty}$. Тогда, согласно неравенству Бесселя, справедливо неравенство (20). Лемма 5 доказана.

Аналогично леммам 4 и 5, доказываются следующие леммы.

Лемма 6. Если функция $h(x)$ удовлетворяет условиям (12) – (15), а функция $Mh(x)$ удовлетворяет условиям (12), (14) и $x^{\alpha/2} (1-x)^{\beta/2} [Mh(x)]'' \in L_2(0,1)$, то справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^3 h_k^2 \leq \int_0^1 x^{\alpha} (1-x)^{\beta} \left\{ [Mh(x)]'' \right\}^2 dx. \quad (21)$$

Лемма 7. Если функции $h(x)$, $Mh(x)$ удовлетворяют условиям (12) – (15), а функция $M^2 h(x)$ удовлетворяет условиям (12), (14), $x^{\alpha/2} (1-x)^{\beta/2} [M^2 h(x)]'' \in L_2(0,1)$, где $M^2 h(x) = M[Mh(x)]$, то справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^5 h_k^2 \leq \int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta \left\{ \left[M^2 h(x) \right]'' \right\}^2 dx.$$

Существование, единственность и устойчивость решения задачи $A_{p_1 q_1}^{p_2 q_2}$

Решение задачи $A_{p_1 q_1}^{p_2 q_2}$ формально ищем в виде

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t) v_k(x), \quad (22)$$

где $v_k(x)$, $k \in N$ - собственные функции задачи $\{(8), (9)\}$, а $u_k(t)$, $k \in N$ - коэффициенты Фурье неизвестной функции $u(x, t)$, которые подлежат определению.

Подставляя (22) в (1), (6) и (7), относительно $u_k(t)$, $k \in N$, получим следующую задачу:

$$\begin{cases} t^\gamma {}_C D_{0t}^{\delta_1} u_k(t) = -\lambda_k u_k(t), & t > 0, \\ {}_C D_{t0}^{\delta_2} u_k(t) = -\lambda_k u_k(t), & t < 0; \end{cases} \quad (23)$$

$$u_k(b) + \varphi_k = u_k(-a), \quad u_k(+0) = u_k(-0), \quad \lim_{t \rightarrow +0} t^\gamma {}_C D_{0t}^{\delta_1} u_k(t) = u_k'(-0), \quad (24)$$

где $\varphi_k = \int_0^1 \varphi(x) v_k(x) dx$. Если $0 \leq \gamma < \delta_1$, то, в силу $0 < \delta_1 < 1$, $1 < \delta_2 < 2$, общее решение уравнения (23) определяется в виде [18]

$$u_k(t) = \begin{cases} A_k E_{\delta_1, 1-\gamma/\delta_1, -\gamma/\delta_1} \left[-\lambda_k t^{\delta_1-\gamma} \right], & t > 0; \\ B_k E_{\delta_2, 1} \left[-\lambda_k (-t)^{\delta_2} \right] - t Y_k E_{\delta_2, 2} \left[-\lambda_k (-t)^{\delta_2} \right], & t < 0, \end{cases} \quad (25)$$

где A_k, B_k, Y_k -- произвольные постоянные, а $E_{\xi, \eta}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n / \Gamma(\xi n + \eta)$ - функция Миттага

-- Леффлера, а $E_{\delta_1, 1-\gamma/\delta_1, -\gamma/\delta_1} \left[-\lambda_k t^{\delta_1-\gamma} \right]$ - функция Килбаса - Сайго, $E_{\delta_1, 1-\gamma/\delta_1, -\gamma/\delta_1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$,

$$c_0 = 1, \quad c_n = \prod_{j=0}^{n-1} \Gamma(\delta_1 j - \gamma j - \gamma + 1) / \Gamma(\delta_1 j - \gamma j + \delta_1 - \gamma + 1).$$

Далее, удовлетворяя функцию (25) условиям (24), для нахождения постоянных A_k, B_k, Y_k получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} A_k - B_k = 0, \quad \lambda_k A_k - Y_k = 0, \\ B_k E_{\delta_2, 1} \left[-\lambda_k a^{\delta_2} \right] + a Y_k E_{\delta_2, 2} \left[-\lambda_k a^{\delta_2} \right] - A_k E_{\delta_1, 1-\gamma/\delta_1, -\gamma/\delta_1} \left[-\lambda_k b^{\delta_1-\gamma} \right] = \varphi_k. \end{cases} \quad (26)$$

Если для всех $k = 1, 2, 3, \dots$ имеет место неравенство

$$\Delta(k) = E_{\delta_2, 1} \left[-\lambda_k a^{\delta_2} \right] + a \lambda_k E_{\delta_2, 2} \left[-\lambda_k a^{\delta_2} \right] - E_{\delta_1, 1-\gamma/\delta_1, -\gamma/\delta_1} \left[-\lambda_k b^{\delta_1-\gamma} \right] \neq 0, \quad (27)$$

то система (26) имеет единственное решение

$$A_k = \frac{\varphi_k}{\Delta(k)}, \quad B_k = \frac{\varphi_k}{\Delta(k)}, \quad Y_k = \frac{\lambda_k \varphi_k}{\Delta(k)}.$$

Подставляя эти значения A_k, B_k и Y_k в (25), определяем $u_k(t)$ в следующем виде:

$$u_k(t) = \begin{cases} \frac{\varphi_k}{\Delta(k)} E_{\delta_1, 1-\gamma/\delta_1, -\gamma/\delta_1} \left[-\lambda_k t^{\delta_1-\gamma} \right], & t > 0; \\ \frac{\varphi_k}{\Delta(k)} E_{\delta_2, 1} \left[-\lambda_k (-t)^{\delta_2} \right] - \frac{\lambda_k \varphi_k}{\Delta(k)} t E_{\delta_2, 2} \left[-\lambda_k (-t)^{\delta_2} \right], & t < 0. \end{cases} \quad (28)$$

Подставляя (28) в (22), находим формальное решение задачи $A_{p_1 q_1}^{p_2 q_2}$:

$$u(x, t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\varphi_k}{\Delta(k)} E_{\delta_1, 1-\gamma/\delta_1, -\gamma/\delta_1} \left[-\lambda_k t^{\delta_1-\gamma} \right] v_k(x), & (x, t) \in \Omega_1; \\ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\varphi_k}{\Delta(k)} \left(E_{\delta_2, 1} \left[-\lambda_k (-t)^{\delta_2} \right] - t \lambda_k E_{\delta_2, 2} \left[-\lambda_k (-t)^{\delta_2} \right] \right) v_k(x), & (x, t) \in \Omega_2. \end{cases} \quad (29)$$

Согласно асимптотическим разложениям функции $E_{\xi, \eta}(z)$ и $E_{\delta_1, 1-\gamma/\delta_1, -\gamma/\delta_1}(z)$ при $\lambda_k \rightarrow +\infty$ [22], имеем

$$E_{\delta_2, j} \left[-\lambda_k a^{\delta_2} \right] = \frac{1}{\lambda_k a^{\delta_2} \Gamma(j - \delta_2)} + O(\lambda_k^{-2}), \quad j = \overline{1, 2},$$

$$E_{\delta_1, 1-\gamma/\delta_1, -\gamma/\delta_1} \left[-\lambda_k b^{\delta_1-\gamma} \right] = \frac{1}{\lambda_k b^{\delta_1-\gamma} \Gamma(1 - \delta_1)} + O(\lambda_k^{-2}).$$

Учитывая это и обозначение $\Delta(k)$, при $k \rightarrow +\infty$ получим $\lim_{k \rightarrow +\infty} \Delta(k) = 1 / [a^{\delta_2-1} \Gamma(2 - \delta_2)]$.

Отсюда следует, что начиная с некоторого $k_0 \in N$ справедливо неравенство $|\Delta(k)| > 0$.

Теорема 1. Если $p_1 \neq q_1$, $p_2 \neq q_2$, $0 \leq \gamma < \delta_1$ и $\Delta(k) \neq 0$ для всех $k = 1, 2, 3, \dots$, а функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям леммы 7, то сумма ряда (29) определяет единственное решение задачи $A_{p_1 q_1}^{p_2 q_2}$.

Доказательство. Для доказательства существования решения задачи достаточно доказать, что ряд (29) и ряды, соответствующие функциям $u_x(x, t)$, $x^\alpha (1-x)^\beta u_{xx}(x, t)$, $\left[x^\alpha (1-x)^\beta u_{xx}(x, t) \right]_x$, сходятся равномерно в $\bar{\Omega}$, а ряды $t_C^\gamma D_{0t}^{\delta_1} u(x, t)$, $\left[x^\alpha (1-x)^\beta u_{xx}(x, t) \right]_{xx}$ сходятся равномерно на любом компакте $D_1 \subset \Omega_1$ и ряды ${}_C D_{0t}^{\delta_2} u(x, t)$, $\left[x^\alpha (1-x)^\beta u_{xx}(x, t) \right]_{xx}$ сходятся равномерно на любом компакте $D_2 \subset \Omega_2$.

Сначала рассмотрим ряд (29). Так как

$$|u_k(t)| \leq \begin{cases} C_4 |\varphi_k|, & t > 0; \\ C_5 (|\varphi_k| + \lambda_k |\varphi_k|), & t < 0, \end{cases} \quad (30)$$

где C_4 и C_5 - некоторые положительные числа, то справедливы неравенства

$$|u(x, t)| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |u_k(t)| |v_k(x)| \leq \begin{cases} C_4 \sum_{k=1}^{+\infty} |\varphi_k| |v_k(x)|, & t < 0; \\ C_5 \sum_{k=1}^{+\infty} (|\varphi_k| + \lambda_k |\varphi_k|) |v_k(x)|, & t < 0. \end{cases} \quad (31)$$

На основании неравенства Коши - Буняковского, имеем

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\varphi_k| |v_k(x)| = \sum_{k=1}^{+\infty} \left| \sqrt{\lambda_k} \varphi_k \right| \left| \frac{v_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}} \right| \leq \left[\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \varphi_k^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{v_k^2(x)}{\lambda_k} \right]^{1/2}, \quad (32)$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k |\varphi_k| |v_k(x)| = \sum_{k=1}^{+\infty} \left| \lambda_k^{3/2} \varphi_k \right| \left| \frac{v_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}} \right| \leq \left[\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^3 \varphi_k^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{v_k^2(x)}{\lambda_k} \right]^{1/2}. \quad (33)$$

Первые ряды, стоящие в правой части, сходятся в силу лемм 4 и 6, а вторые ряды сходятся равномерно по x на $[0,1]$, в силу леммы 3. Следовательно, ряды, стоящие в левой части, сходятся равномерно на $[0,1]$. Тогда и из (31) следует, что ряд (29) сходится абсолютно и равномерно в $\bar{\Omega}$.

Рассмотрим ряд, соответствующий функции $\left[x^\alpha (1-x)^\beta u_{xx}(x,t) \right]_{xx}$. В силу (30), из (29) следует неравенство

$$\left| \left[x^\alpha (1-x)^\beta u_{xx} \right]_{xx} \right| \leq \begin{cases} C_4 \sum_{k=1}^{+\infty} |\varphi_k| \left| \left[x^\alpha (1-x)^\beta v_k''(x) \right]'' \right|, t > 0; \\ C_5 \sum_{k=1}^{+\infty} (|\varphi_k| + \lambda_k |\varphi_k|) \left| \left[x^\alpha (1-x)^\beta v_k''(x) \right]'' \right|, t < 0. \end{cases}$$

Отсюда, на основании уравнения (8), на любом компакте $D_j (\subset \Omega_j)$, $j = \overline{1,2}$, имеем

$$\left| \left[x^\alpha (1-x)^\beta u_{xx} \right]_{xx} \right| \leq \begin{cases} C_5 \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k |\varphi_k| |v_k(x)|, t > 0; \\ C_6 \sum_{k=1}^{+\infty} (\lambda_k |\varphi_k| + \lambda_k^2 |\varphi_k|) |v_k(x)|, t < 0. \end{cases}$$

Очевидно, что

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left| \lambda_k^2 \varphi_k v_k(x) \right| = \sum_{k=1}^{+\infty} \left| \lambda_k^{5/2} \varphi_k \right| \left| \frac{v_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}} \right| \leq \left[\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^5 \varphi_k^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{v_k^2(x)}{\lambda_k} \right]^{1/2}.$$

Здесь, первый ряд, стоящий в правой части, сходится в силу леммы 7, а второй ряд сходится равномерно по x на $[0,1]$, в силу леммы 3. Тогда, равномерно по x на $[0,1]$ сходится ряд, стоящий в левой части. Следовательно, ряды в (34) сходятся абсолютно и равномерно на компакте $D_j (j = \overline{1,2})$. Аналогично доказывается сходимост и остальных рядов.

Пусть $\Delta(k) \neq 0$ для всех $k \in N$, функция $u_0(x,t)$ - есть решение задачи $A_{p_1 q_1}^{p_2 q_2}$ с однородными условиями (2) – (5) и $u(x,b) = u(x,-a)$, $x \in [0,1]$. Рассмотрим его коэффициенты Фурье по системе собственных функций задачи $\{(8), (9)\}$:

$$u_{0k}(t) = \int_0^1 u_0(x,t) v_k(x) dx.$$

Тогда, в силу формулы (25) и $\varphi_k = 0$, $k = 1, 2, 3, \dots$ имеем $u_{0k}(t) = 0, k \in N$.

Согласно свойствам функции Грина и теореме Мерсера, имеют место следующие равенства:

$$u_0(x, t) = \int_0^1 G(x, s) \left[s^\alpha (1-s)^\beta u_{0ss}(s, t) \right]_{ss} ds = \\ = \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k(x) v_k(s)}{\lambda_k} \left[s^\alpha (1-s)^\beta u_{0ss}(s, t) \right]_{ss} ds = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k(x)}{\lambda_k} \int_0^1 v_k(s) \left[s^\alpha (1-s)^\beta u_{0ss}(s, t) \right]_{ss} ds.$$

Отсюда, применяя правило интегрирования по частям четыре раза и учитывая свойства функций $u_0(s, t)$, $v_k(x)$ и уравнение (8), получим

$$u_0(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k(x)}{\lambda_k} \int_0^1 u_0(s, t) \left[s^\alpha (1-s)^\alpha v_k''(s) \right]'' ds = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x) \int_0^1 u_0(s, t) v_k(s) ds = \sum_{k=1}^{\infty} u_{0k}(t) v_k(x) = 0,$$

поскольку $u_{0k}(t) = 0$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Следовательно $u_0(x, t) \equiv 0$, $(x, t) \in \bar{\Omega}$. Отсюда следует единственность решения задачи $A_{p_1 q_1}^{p_2 q_2}$. Теорема 1 доказана.

Замечания. Если $\Delta(k) = 0$ при некоторых значениях $k = k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$, то из (25) следует, что для разрешимости задачи $A_{p_1 q_1}^{p_2 q_2}$ должны выполняться следующие условия ортогональности:

$$\varphi_k = \int_0^1 \varphi(x) v_k(x) dx = 0, k = k_1, k_2, k_3, \dots, k_n.$$

В этом случае, решение задачи $A_{p_1 q_1}^{p_2 q_2}$ определяется в виде суммы ряда

$$u(x, t) = \left(\sum_{k=1}^{k_1-1} + \sum_{k=k_1+1}^{k_2-1} + \dots + \sum_{k=k_n+1}^{+\infty} \right) u_k(t) v_k(x) + \sum_n \bar{E}_n u_n(x, t),$$

где в последней сумме n принимает значения $k = k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$, а $\bar{E}_n$ - произвольные постоянные,

$$u_n(x, t) = \begin{cases} E_{\delta_1, 1-\gamma' \delta_1, -\gamma' \delta_1} \left[-\lambda_k t^{\delta_1-\gamma'} \right] v_k(x), & t > 0; \\ \left\{ E_{\delta_2, 1} \left[-\lambda_k (-t)^{\delta_2} \right] - \lambda_k t E_{\delta_2, 2} \left[-\lambda_k (-t)^{\delta_2} \right] \right\} v_k(x), & t < 0, \end{cases} \quad k = k_1, k_2, k_3, \dots, k_n.$$

Пусть $\|f(x)\|_{C[0,1]} = \sup_{[0,1]} |f(x)|$, $\|V(x, t)\|_{C(\bar{\Omega})} = \sup_{\bar{\Omega}} |V(x, t)|$, и

$$\|f(x)\|_{L_{2,r}(0,1)} = \left[\int_0^1 r(x) [f(x)]^2 dx \right]^{1/2}, \quad r(x) = x^\alpha (1-x)^\beta. \text{ Очевидно, что справедливо}$$

неравенство

$$\|u(x, t)\|_{C(\bar{\Omega})} \leq \|u(x, t)\|_{C(\bar{\Omega}_1)} + \|u(x, t)\|_{C(\bar{\Omega}_2)}. \quad (35)$$

Теорема 2. Пусть функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Тогда для решения задачи $A_{p_1 q_1}^{p_2 q_2}$ справедлива следующая оценка:

$$\|u(x, t)\|_{C(\bar{\Omega})} \leq C_0 \left\{ \|\varphi''(x)\|_{L_{2,r}(0,1)} + \left\| [M\varphi(x)]'' \right\|_{L_{2,r}(0,1)} \right\}, \quad C_0 = \text{const} > 0. \quad (36)$$

Доказательство. В силу неравенств (31), (33) и (34) справедливо следующее неравенство:

$$|u(x, t)| \leq \begin{cases} C_4 \left[\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \varphi_k^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{v_k^2(x)}{\lambda_k} \right]^{1/2}, & t \geq 0, \\ C_5 \left[\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \varphi_k^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{v_k^2(x)}{\lambda_k} \right]^{1/2} + C_5 \left[\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^3 \varphi_k^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{v_k^2(x)}{\lambda_k} \right]^{1/2}, & t \leq 0. \end{cases}$$

Отсюда, учитывая неравенства (20), (21) и $\sum_{k=1}^{\infty} v_k^2(x) / \lambda_k = G(x, x) < C_3$, имеем

$$|u(x, t)| \leq \begin{cases} C_4 \sqrt{C_3} \left[\int_0^1 x^{\alpha} (1-x)^{\beta} [\varphi''(x)]^2 dx \right]^{1/2}, & t \geq 0, \\ C_5 \sqrt{C_3} \sum_{j=0}^1 \left[\int_0^1 x^{\alpha} (1-x)^{\beta} \{M^j \varphi(x)\}''^2 dx \right]^{1/2}, & t \leq 0. \end{cases}$$

Откуда, в силу введенных обозначений и (35), следует неравенство (36). Теорема 2 доказана.

Использованные литературы

- [1]. Джрбашян М.М., Нерсисян А.Б. Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка // Изв. АН АрмССР. Mat. 1968. Т. 3. № 1. С. 3-29.
- [2]. Псху А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М. : Наука, 2005. 199 с.
- [3]. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. - Москва: Физматлит, 2003. - 272 с.
- [4]. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
- [5]. A.S. Berdyshev, A. Cabada, B.J. Kadirkulov. The Samarskii–Ionkin type problem for the fourth order parabolic equation with fractional differential operator. Computers and Mathematics with Applications. 2011. N62. pp.3884-3893.
- [6]. A. S. Berdyshev, B. J. Kadirkulov. A Samarskii–Ionkin problem for two dimensional parabolic equation with the caputo fractional differential operator. International Journal of Pure and Applied Mathematics. Volume 113 No. 4 2017, pp. 53-64.
- [7]. S. Kerbal, B. J. Kadirkulov, M. Kirane. Direct and inverse problems for a Samarskii–Ionkin type problem for a two dimensional fractional parabolic equation. 2018. No. 3. pp. 147-160.
- [8]. S. Aziz and S. A. Malik, “Identification of an unknown source term for a time fractional fourth-order parabolic equation,” Electron. J. Differ. Equat. 2016 (293), 1–20 (2016).
- [9]. А. С. Бердышев, Б. Ж. Кадиркулов. Об одной нелокальной задаче для параболического уравнения четвертого порядка с дробным оператором Джрбашяна–Нерсисяна. Дифференциальные уравнения. 2016, том 52, № 1, с. 123–127.
- [10]. Л.Л. Карашева. Задача в полуполосе для параболического уравнения четвертого порядка с оператором Римана – Лиувилля по временной переменной. Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН 2019. № 5 (91). стр. 21-29.
- [11]. Т. К. Yuldashev, B. J. Kadirkulov. Nonlocal problem for a mixed type fourth-order differential equation with hilfer fractional operator. Ural mathematical journal, Vol. 6, No. 1, 2020, pp. 153–167 DOI: 10.15826/umj.2020.1.013.

[12]. T. K. Yuldashev. B.J.Kadirkulov. Inverse boundary value problem for a fractional differential equations of mixed type with integral rede?nition conditions . Lobachevskii Journal of Mathematics, 2021, Vol. 42, No. 3, pp. 649–662.

[13]. Ashurov R., Umarov S. Determination of the order of fractional derivative for subdiffusion equations. Fract. Calc. Appl. Anal., Vol. 23, No 6 (2020), pp. 1647–1662, DOI: 10.1515/fca-2020-0081.

[14]. Ashurov, R.; Fayziev, Y. Inverse Problem for Finding the Order of the Fractional Derivative in the Wave Equation. Mathematical Notes, 2021, Vol. 110, No. 6, pp. 842–852.

[15]. Каримов Д. Х., Касимова М. Смешанная задача для линейного уравнения четвертого порядка, вырождающегося на границе области. - Изв. АН УзССР, сер. физ. - мат. наук, 1968, N 2, с.27-31.

[16]. Байкузиев К.Б., Касимова М. Смешанная задача уравнения четвертого порядка, вырождающегося на границе области. - Изв. АН УзССР, сер. физ. -мат. наук, 1968, N 5, с.7-12.

[17]. Касимова М. Смешанная задача для линейного уравнения четвертого порядка, вырождающегося на границе области. - Изв. АН УзССР, сер. физ. -мат. наук, 1968, N 5, с.35-39.

[18]. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: North-Holland. Mathematics Studies 204, Elsevier, 2006.

[19]. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.1. -Москва: Наука, 1965. -296 с.

[20]. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. - Москва: Наука, 1969. 528 с.

[21]. Михлин С. Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. - Москва: Физматлит, 1959. 232 с.

[22]. Boudabsa, L. Simon, T. Some Properties of the Kilbas-Saigo Function. Mathematics 2021, 9, 217. <https://doi.org/10.3390/math9030217>.