

О КОРРЕКТНОСТИ ОДНОЙ НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВЫСОКОГО ЧЕТНОГО ПОРЯДКА

Орипов Дастонбек Дилшодбек угли

базовый докторант Ферганского государственного университета

dastonbekoripov94@gmail.com

Аннотация. В данной работе сформулирована и исследована начально-граничная задача для одного вырождающегося дифференциального уравнения в частных производных высокого четного порядка в прямоугольнике. Применяя метод Фурье, получена спектральная задача для обыкновенного дифференциального уравнения. Методом Грина последняя задача эквивалентно сведена к интегральному уравнению Фредгольма второго рода с симметричным ядром, откуда следует существование собственных значений и система собственных функций спектральной задачи. С помощью найденного интегрального уравнения и теоремы Мерсера доказана равномерная сходимость некоторых билинейных рядов, зависящих от найденных собственных функций. Решение изучаемой задачи выписано в виде суммы ряда Фурье по системе собственных функций спектральной задачи. Методом интегралов энергии доказана единственность решения задачи. Получена оценка для решения задачи.

Ключевые слова: вырождающееся уравнение, начально-граничная задача, метод разделения переменных, спектральная задача, метод функции Грина, интегральное уравнение, ряд Фурье.

ON THE CORRECTNESS OF AN INITIAL-BOUNDARY PROBLEM FOR A DEGENERATE HIGH EVEN ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION

Oripov Dostonbek Dilshodbek ugli

PhD student of Fergana State University

dastonbekoripov94@gmail.com

Abstract. In the present paper, an initial-boundary problem for a degenerate high even-order partial differential equation in a rectangle has been formulated and studied. By applying the Fourier method, a spectral problem for an ordinary differential equation was obtained. Using Green's method, the latter problem was equivalently reduced to a Fredholm integral equation of the second kind with a symmetric kernel, from which the existence of eigenvalues and a system of

eigenfunctions for the spectral problem follows. With the help of the obtained integral equation and Mercer's theorem, the uniform convergence of certain bilinear series depending on the found eigenfunctions has been proved. The solution to the studied problem was expressed as a Fourier series sum over the system of eigenfunctions of the spectral problem. The uniqueness of the solution was proved using the energy integrals method. Moreover, an estimate for the solution of the problem has been obtained.

Keywords: *degenerate equation, initial-boundary problem, method of separation of variables, spectral problem, Green's function method, integral equation, Fourier series.*

**BUZILADIGAN YUQORI JUFT TARTIBLI XUSUSIY HOSILALI
DIFFERENSIAL TENGLAMA UCHUN BIR BOSHLANG'ICH-
CHEGARAVIY MASALANING KORREKTLIGI HAQIDA**

Oripov Dostonbek Dilshodbek o'g'li

Farg'ona davlat universiteti tayanch doktoranti

dostonbekoripov94@gmail.com

Annotatsiya. *Ushbu ishda to'rtburchakda buziladigan yuqori juft tartibli xususiy hosilali differensial tenglama uchun boshlang'ich-chegaraviy masala bayon qilingan va tadqiq etilgan. Furiye usulini qo'llash orqali oddiy differensial tenglama uchun spektral masalaga keltirilgan. Grin usuli yordamida ushbu masala ekvivalent tarzda Fredgolmning simmetrik yadrolari bo'lgan ikkinchi tur integral tenglamasiga keltirilgan, shundan spektral masalaning xos sonlari va xos funksiyalari sistemasining mavjudligi kelib chiqadi. Olingan integral tenglama va Merzer teoremasi yordamida topilgan xos funksiyalarga bog'liq bo'lgan ba'zi bichiziqli qatorlarning tekis yaqinlashishi isbotlangan. O'rganilayotgan masalaning yechimi spektral masala xos funksiyalari sistemasi bo'yicha Furiye qatori yig'indisi sifatida yozilgan. Energiya integrallari usuli bilan masala yechimining yagonaligi isbotlangan. Masalaning yechimi uchun baho olingan.*

Kalit so'zlar: *buziladigan tenglama, boshlang'ich-chegaraviy masala, o'zgaruvchilarni ajratish usuli, spektral masala, Grin funksiyalari usuli, integral tenglama, Furiye qatori.*

I. Введение и постановка задачи

В связи с многочисленными приложениями [1,2], в настоящее время интенсивно изучаются начально-граничные задачи для вырождающихся дифференциальных уравнений в частных производных высокого четного порядка в четырехугольной области [3-8].

В данной работе в прямоугольнике $\Omega = \{(x,t): 0 < x < 1; 0 < t < T\}$ рассмотрим следующее вырождающееся уравнение высокого четного порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} \left(x^\alpha \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n}} \right) = f(x,t), \quad (1)$$

где $u = u(x,t)$ - неизвестная функция, $f(x,t)$ – заданная функция, а α – заданное действительное число, причем $0 < \alpha < 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Исследуем существование, единственность и устойчивость решения следующей начально-граничной задачи:

Задача С. Найти функцию $u(x,t)$, которая:

$$1) u_t, (\partial^j / \partial x^j) u, (\partial^j / \partial x^j) \left[x^\alpha (\partial^{2n} / \partial x^{2n}) u \right] \in C(\overline{\Omega}), j = \overline{0, 2n-1};$$

$$(\partial^{2n} / \partial x^{2n}) \left[x^\alpha (\partial^{2n} / \partial x^{2n}) u \right], u_{tt} \in C(\Omega);$$

2) в области Ω удовлетворяет уравнению (1);

3) выполняются следующие начальные условия

$$u(x,0) = \varphi_1(x), x \in [0,1], u_t(x,0) = \varphi_2(x), x \in [0,1] \quad (2)$$

и граничные условия

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^{2j}}{\partial x^{2j}} u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial^{2j}}{\partial x^j} \left(x^\alpha \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} u(x,t) \right) \Big|_{x=0} = 0, \quad j = \overline{0, n-1}, t \in [0, T]; \\ \frac{\partial^{2j+1}}{\partial x^{2j+1}} u(1,t) = 0, \quad \frac{\partial^{2j+1}}{\partial x^{2j+1}} \left(x^\alpha \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} u(x,t) \right) \Big|_{x=1} = 0, \quad j = \overline{0, n-1}, t \in [0, T], \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ – заданные непрерывные функции.

Отметим, что уравнение (1) при $n=1$, $\alpha=0$ совпадает с уравнением колебания балки [9]. Для этого частного случая уравнения (1) различные начально-граничные задачи сформулированы и изучены в работах [10,11]. В работах [12,13] задачи с условиями типа (3) при $\alpha=0$ изучены для уравнения $2n$ порядка по x .

II. Исследование спектральной задачи

При формальном применении метода Фурье к задаче С возникает следующая спектральная задача:

$$M[v] \equiv \left(x^\alpha v^{(2n)}(x) \right)^{(2n)} = \lambda v(x), \quad 0 < x < 1; \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} v^{(j)}(x), \left(x^\alpha v^{(2n)}(x) \right)^{(j)} &\in C[0,1], \quad j = \overline{0, 2n-1}; \\ v^{(2j)}(0) = 0, \left[x^\alpha v^{(2n)}(x) \right]^{(2j)} \Big|_{x=0} &= 0, \quad v^{(2j+1)}(1) = 0, \left[x^\alpha v^{(2n)}(x) \right]^{(2j+1)} \Big|_{x=1} = 0, \quad j = \overline{0, n-1}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Пусть $v(x)$ – функция, удовлетворяющая условиям $\{(4), (5)\}$. Тогда, умножая уравнение (4) на функцию $v(x)$ и интегрируя полученное равенство на отрезке $[0,1]$, а затем применяя правило интегрирования по частям и учитывая равенства (5), получим

$$\lambda \int_0^1 v^2(x) dx = \int_0^1 x^\alpha \left[v^{(2n)}(x) \right]^2 dx. \quad (6)$$

Отсюда следует, что $\lambda \geq 0$. Пусть $\lambda = 0$. Тогда из равенства (6) следует, что $v^{(2n)}(x) = 0$, $0 < x < 1$. Отсюда, в силу условий $v^{(2j)}(0) = 0$, $v^{(2j+1)}(1) = 0$, $j = \overline{0, n-1}$, имеем $v(x) \equiv 0$, $0 \leq x \leq 1$. Следовательно, задача $\{(4), (5)\}$ может иметь нетривиальные решения только при $\lambda > 0$.

Предполагая $\lambda > 0$, существование собственных значений задачи $\{(4), (5)\}$ докажем методом функции Грина. Функция Грина $G(x, s)$ этой задачи должна обладать следующими свойствами:

1) $(\partial^j / \partial x^j) G(x, s)$, $j = \overline{0, 2n-1}$ и $(\partial^j / \partial x^j) \left[x^\alpha (\partial^{2n} / \partial x^{2n}) G(x, s) \right]$, $j = \overline{0, 2n-2}$ непрерывны для всех $x, s \in [0, 1]$;

2) в каждом из интервалов $[0, s)$ и $(s, 1]$ существует непрерывная производная $(\partial^{2n-1} / \partial x^{2n-1}) \left[x^\alpha (\partial^{2n} / \partial x^{2n}) G(x, s) \right]$, а при $x = s$ имеет скачок:

$$(\partial^{2n-1} / \partial x^{2n-1}) \left[x^\alpha (\partial^{2n} / \partial x^{2n}) G(x, s) \right] \Big|_{x=s-0}^{x=s+0} = 1; \quad (7)$$

3) в интервалах $(0, s)$ и $(s, 1)$ по аргументу x существует непрерывная производная $MG(x, s)$ и выполняется равенство $MG(x, s) = 0$;

4) при $s \in (0, 1)$ по аргументу x удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial^{2j} G(0, s)}{\partial x^{2j}} = 0, \quad \frac{\partial^{2j}}{\partial x^{2j}} \left(x^\alpha \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} G(x, s) \right) \Big|_{x=0} = 0, \quad j = \overline{0, n-1}; \quad (8)$$

$$\frac{\partial^{2j+1} G(1, s)}{\partial x^{2j+1}} = 0, \quad \frac{\partial^{2j+1}}{\partial x^{2j+1}} \left(x^\alpha \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} G(x, s) \right) \Big|_{x=1} = 0, \quad j = \overline{0, n-1}. \quad (9)$$

Принимая во внимание вид общего решения уравнения $MG(x, s) = 0$ в промежутках $(0, s)$ и $(s, 1)$, функцию $G(x, s)$ ищем в виде

$$G(x,s) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{2n} \frac{a_j x^{4n-\alpha-j}}{(2n-j)!(2n-\alpha-j+1)_{2n}} + \sum_{j=1}^{2n} \frac{a_{2n+j} x^{2n-j}}{(2n-j)!}, & 0 \leq x \leq s, \\ \sum_{j=1}^{2n} \frac{b_j x^{4n-\alpha-j}}{(2n-j)!(2n-\alpha-j+1)_{2n}} + \sum_{j=1}^{2n} \frac{b_{2n+j} x^{2n-j}}{(2n-j)!}, & s \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (10)$$

где a_j и b_j , $j = \overline{1, 4n}$ – неизвестные функции переменной s , а $(z)_n = z(z+1)(z+2)\dots(z+n-1)$ – символ Похгаммера[14].

Удовлетворяя функцию (10) свойствам 1) и 2) функции Грина, получим следующую систему уравнений относительно $b_j - a_j$, $j = \overline{1, 4n}$:

$$\begin{cases} b_1 - a_1 = 1, \\ \sum_{j=1}^{m_1} \frac{s^{m_1-j}}{(m_1-j)!} (b_j - a_j) = 0, \quad m_1 = \overline{2, 2n}, \\ \sum_{j=1}^{2n} \frac{s^{2n-\alpha+m_2-j} (b_j - a_j)}{(2n-j)!(2n-\alpha-j+1)_{m_2}} + \sum_{j=1}^{m_2} \frac{s^{m_2-j} (b_{2n+j} - a_{2n+j})}{(m_2-j)!} = 0, \quad m_2 = \overline{1, 2n}. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение[8]:

$$b_j - a_j = \frac{(-1)^{j-1} s^{j-1}}{(j-1)!}, \quad b_{2n+j} - a_{2n+j} = \frac{(-1)^{j-1} s^{2n+j-1-\alpha}}{(j-1)!(j-\alpha)_{2n}}, \quad j = \overline{1, 2n}. \quad (11)$$

Подставляя (10) в условия (8), последовательно получим

$$a_{2j} = 0, \quad j = \overline{1, 2n}. \quad (12)$$

В силу этих равенств, из (11) следует, что

$$b_{2j} = -\frac{s^{2j-1}}{(2j-1)!}, \quad b_{2n+2j} = -\frac{s^{2n+2j-1-\alpha}}{(2j-1)!(2j-\alpha)_{2n}}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (13)$$

Теперь подставляя (10) в условия (9), находим

$$\begin{aligned} b_1 = 0, \quad b_{2m+1} &= -\sum_{j=1}^{2m-1} \frac{b_{1+j}}{(2m-j)!}, \quad m = \overline{1, n-1}; \quad b_{2n+1} = -\sum_{j=1}^{2n-1} \frac{b_{1+j}}{(2n-1-j)!(2n-j-\alpha)}, \\ b_{2n+2m+1} &= -\sum_{j=1}^{2n-1} \frac{b_{1+j}}{(2n-1-j)!(2n-j-\alpha)_{2m+1}} - \sum_{j=1}^{2m} \frac{b_{2n+j}}{(2m+1-j)!}, \quad m = \overline{1, n-1}. \end{aligned} \quad (14)$$

В силу этих равенств, из (11) следует, что

$$\begin{aligned} a_1 &= -1, \quad a_{2m+1} = b_{2m+1} - \frac{s^{2m}}{(2m)!}, \quad m = \overline{1, n-1}; \\ a_{2n+1} &= b_{2n+1} - \frac{s^{2n-\alpha}}{(1-\alpha)_{2n}}, \quad a_{2n+2m+1} = b_{2n+2m+1} - \frac{s^{2n+2m-\alpha}}{(2m)!(2m+1-\alpha)_{2n}}, \quad m = \overline{1, n-1}. \end{aligned} \quad (15)$$

Следовательно, функция Грина, удовлетворяющая условиям 1)-4) существует, единственна и она имеет вид (10), причем коэффициенты a_j и b_j , $j = \overline{1, 4n}$ определяются равенствами (12), (13), (14) и (15).

Теперь, докажем, что она симметрична относительно своих аргументов. Доказать этот факт с помощью формул (12), (13), (14) и (15) трудно. Поэтому мы воспользуемся условиями 1)-4).

Пусть $v(x), h(x) \in C^{2n-1}[0,1]$; $x^\alpha v^{(2n)}(x)$, $x^\alpha h^{(2n)}(x) \in C^{2n-1}[0,1] \cap C^{2n}(0,1)$. Введем обозначения:

$$M[v] \equiv (x^\alpha v^{(2n)}(x))^{(2n)} = f(x), \quad M[h] \equiv (x^\alpha h^{(2n)}(x))^{(2n)} = g(x).$$

Тогда справедливо равенство

$$\begin{aligned} hM[v] - vM[h] &= h(x)(x^\alpha v^{(2n)}(x))^{(2n)} - v(x)(x^\alpha h^{(2n)}(x))^{(2n)} = \\ &= \sum_{j=0}^{2n-1} \frac{d}{dx} \left\{ (-1)^j \left[h^{(j)}(x)(x^\alpha v^{(2n)}(x))^{(2n-1-j)} - v^{(j)}(x)(x^\alpha h^{(2n)}(x))^{(2n-1-j)} \right] \right\} = \\ &= f(x)h(x) - g(x)v(x), \quad 0 < x < 1. \end{aligned} \quad (16)$$

Если предположить $v(x) = G(x, s)$ и $h(x) = G(x, \xi)$, то во всех точках отрезка $(0,1)$, кроме точек, $x \neq \xi$, $x \neq s$, имеют место равенства $M[v] = 0$ и $M[h] = 0$. Тогда равенство (16) принимает вид

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{2n-1} \frac{d}{dx} \left\{ (-1)^j \left[\frac{d^j}{dx^j} G(x, \xi) \frac{d^{2n-1-j}}{dx^{2n-1-j}} \left(x^\alpha \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} G(x, s) \right) - \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{d^j}{dx^j} G(x, s) \frac{d^{2n-1-j}}{dx^{2n-1-j}} \left(x^\alpha \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} G(x, \xi) \right) \right] \right\} = 0, \quad x \in (0,1) \setminus \{s, \xi\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Не ограничивая общности, предположим, что $s < \xi$. Тогда отрезок $[0,1]$ разбивается на три отрезка: $[0, s]$, $[s, \xi]$, $[\xi, 1]$. Интегрируя по этим отрезкам равенство (17), получим

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{2n-1} \left\{ (-1)^j \left[\frac{d^j}{dx^j} G(x, \xi) \frac{d^{2n-1-j}}{dx^{2n-1-j}} \left(x^\alpha \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} G(x, s) \right) - \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{d^j}{dx^j} G(x, s) \frac{d^{2n-1-j}}{dx^{2n-1-j}} \left(x^\alpha \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} G(x, \xi) \right) \right] \right\} \Bigg|_{x=0}^{x=\xi} + \\ &\sum_{j=0}^{2n-1} \left\{ (-1)^j \left[\frac{d^j}{dx^j} G(x, \xi) \frac{d^{2n-1-j}}{dx^{2n-1-j}} \left(x^\alpha \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} G(x, s) \right) - \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{d^j}{dx^j} G(x, s) \frac{d^{2n-1-j}}{dx^{2n-1-j}} \left(x^\alpha \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} G(x, \xi) \right) \Bigg|_{x=s+0}^{x=\xi-0} + \\
& \sum_{j=0}^{2n-1} \left\{ (-1)^j \left[\frac{d^j}{dx^j} G(x, \xi) \frac{d^{2n-1-j}}{dx^{2n-1-j}} \left(x^\alpha \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} G(x, s) \right) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{d^j}{dx^j} G(x, s) \frac{d^{2n-1-j}}{dx^{2n-1-j}} \left(x^\alpha \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} G(x, \xi) \right) \right] \right\} \Bigg|_{x=\xi+0}^{x=1} = 0.
\end{aligned}$$

Если учесть свойства 1) и 4) функции Грина $G(x, s)$, то последнее равенство принимает вид

$$\begin{aligned}
& - \left[G(x, \xi) \frac{d^{2n-1}}{dx^{2n-1}} \left(x^\alpha \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} G(x, s) \right) \right] \Bigg|_{x=s-0}^{x=s+0} + \left[G(x, s) \frac{d^{2n-1}}{dx^{2n-1}} \left(x^\alpha \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} G(x, \xi) \right) \right] \Bigg|_{x=s-0}^{x=s+0} - \\
& - \left[G(x, \xi) \frac{d^{2n-1}}{dx^{2n-1}} \left(x^\alpha \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} G(x, s) \right) \right] \Bigg|_{x=\xi-0}^{x=\xi+0} + \left[G(x, s) \frac{d^{2n-1}}{dx^{2n-1}} \left(x^\alpha \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} G(x, \xi) \right) \right] \Bigg|_{x=\xi-0}^{x=\xi+0} = 0.
\end{aligned}$$

Согласно свойству 2) функции $G(x, \eta)$, производная $(\partial^{2n-1} / \partial x^{2n-1}) [x^\alpha (\partial^{2n} / \partial x^{2n}) G(x, s)]$ непрерывна при $x \neq \eta$. Если учесть это, то из последнего следует равенство

$$\begin{aligned}
& \left[G(x, \xi) \frac{d^{2n-1}}{dx^{2n-1}} \left(x^\alpha \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} G(x, s) \right) \right] \Bigg|_{x=s-0} - G(x, \xi) \frac{d^{2n-1}}{dx^{2n-1}} \left(x^\alpha \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} G(x, s) \right) \Bigg|_{x=s+0} \Bigg] + \\
& + \left[G(x, s) \frac{d^{2n-1}}{dx^{2n-1}} \left(x^\alpha \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} G(x, \xi) \right) \right] \Bigg|_{x=\xi+0} - G(x, s) \frac{d^{2n-1}}{dx^{2n-1}} \left(x^\alpha \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} G(x, \xi) \right) \Bigg|_{x=\xi-0} \Bigg] = 0.
\end{aligned}$$

Отсюда, в силу равенства (7), следует равенство $-G(s, \xi) + G(\xi, s) = 0$, что и требовалось доказать.

В частном случае, при $n=1$ функция Грина $G(x, s)$ имеет вид

$$G(x, s) = \begin{cases} -\frac{x^{3-\alpha}}{(2-\alpha)_2} + \frac{xs}{1-\alpha} - \frac{xs^{2-\alpha}}{(1-\alpha)_2}, & 0 \leq x \leq s, \\ -\frac{s^{3-\alpha}}{(2-\alpha)_2} + \frac{sx}{1-\alpha} - \frac{sx^{2-\alpha}}{(1-\alpha)_2}, & s \leq x \leq 1, \end{cases}$$

а при $n=2$ - в виде

$$G(x,s) = \begin{cases} -\frac{x^{7-\alpha}}{3!(4-\alpha)_4} + \frac{x^{5-\alpha}s}{(2-\alpha)_4} - \frac{x^{5-\alpha}s^2}{2!(2-\alpha)_4} - \frac{x^3s(4-\alpha)}{2 \cdot 3!(2-\alpha)_2} + \frac{x^3s^3}{3! \cdot 3!(1-\alpha)} - \frac{x^3s^{4-\alpha}}{3!(1-\alpha)_4} + \\ -\frac{xs(\alpha^3 - 13\alpha^2 + 54\alpha - 64)}{4(2-\alpha)_4} - \frac{xs^3(4-\alpha)}{2 \cdot 3!(2-\alpha)_2} + \frac{xs^{5-\alpha}}{(2-\alpha)_4} - \frac{xs^{6-\alpha}}{2!(3-\alpha)_4}, & 0 \leq x \leq s, \\ -\frac{s^{7-\alpha}}{3!(4-\alpha)_4} + \frac{s^{5-\alpha}x}{(2-\alpha)_4} - \frac{s^{5-\alpha}x^2}{2!(2-\alpha)_4} - \frac{s^3x(4-\alpha)}{2 \cdot 3!(2-\alpha)_2} + \frac{s^3x^3}{3! \cdot 3!(1-\alpha)} - \frac{s^3x^{4-\alpha}}{3!(1-\alpha)_4} + \\ -\frac{sx(\alpha^3 - 13\alpha^2 + 54\alpha - 64)}{4(2-\alpha)_4} - \frac{sx^3(4-\alpha)}{2 \cdot 3!(2-\alpha)_2} + \frac{sx^{5-\alpha}}{(2-\alpha)_4} - \frac{sx^{6-\alpha}}{2!(3-\alpha)_4}, & s \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Теперь, методом, примененным в [15], легко убедиться, что задача {(4), (5)} эквивалентна следующему интегральному уравнению

$$v(x) = \lambda \int_0^1 G(x,s)v(s)ds. \quad (18)$$

Так как ядро $G(x,s)$ непрерывно, симметрично и положительно ($\lambda > 0$), то интегральное уравнение (18), следовательно, задача {(4),(5)} имеет счетное число собственных значений $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_k < \dots$, $\lambda_k \rightarrow +\infty$, а соответствующие им собственные функции $v_1(x), v_2(x), v_3(x), \dots, v_k(x), \dots$ образуют ортонормированную систему в пространстве $L_2(0,1)$ [16].

Кроме того, непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что система функций $s^{\alpha/2}v_k^{(2n)}(s)/\sqrt{\lambda_k}$, $k=1,2,\dots$ также составляет ортонормальную систему.

Лемма 1. Пусть функция $g(x)$ удовлетворяет условиям (5) и $Mg(x) \in C(0,1) \cap L_2(0,1)$. Тогда, ее можно разложить на отрезке $[0,1]$ в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по системе собственных функций задачи {(4),(5)}.

Доказательство. Пользуясь правилом интегрирования по частям, свойствами функции Грина $G(x,s)$ и условиями, наложенными на функцию $g(x)$, нетрудно убедиться, что справедливо равенство

$$\int_0^1 G(x,s)Mg(s)ds = \int_0^1 G(x,s) \left[s^\alpha g^{(2n)}(s) \right]^{(2n)} ds = g(x).$$

Так как $Mg(x) \in L_2(0,1)$, то из последнего равенства следует, что $g(x)$ - есть функция, представимая через ядро $G(x,s)$. Кроме того, функция $G(x,s)$, т.е. ядро уравнения (18) непрерывно в $\overline{\Omega}$. Тогда, на основании теоремы 2, стр. 153, книги [16], справедливо утверждение леммы 1.

Лемма 2. Следующие ряды сходятся равномерно на сегменте $[0,1]$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{[v_k^{(j)}(x)]^2}{\lambda_k}, \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\left(\left[x^\alpha v_k^{(2n)}(x) \right]^{(j)} \right)^2}{\lambda_k^2}, j = \overline{0, 2n-1}. \quad (19)$$

Доказательство. Учитывая равенство (4) и свойства функции $G(x, s)$, из (18) при $v(x) \equiv v_k(x)$ получим

$$v_k^{(j)}(x) = \lambda_k \int_0^1 \frac{\partial^j}{\partial x^j} G(x, s) v_k(s) ds = \int_0^1 \left[s^\alpha v_k^{(2n)}(s) \right]^{(2n)} \frac{\partial^j}{\partial x^j} G(x, s) ds, \quad j = \overline{0, 2n-1}.$$

Отсюда, применяя правило интегрирования по частям $2n$ раз, а затем принимая во внимание условия (5), имеем

$$v_k^{(j)}(x) = \int_0^1 s^\alpha v_k^{(2n)}(s) \frac{\partial^{2n+j}}{\partial x^j \partial s^{2n}} G(x, s) ds, \quad j = \overline{0, 2n-1},$$

откуда, в силу $\lambda_k > 0$, следует равенство

$$\frac{v_k^{(j)}(x)}{\sqrt{\lambda_k}} = \int_0^1 \left(s^{\alpha/2} \frac{\partial^{2n+j}}{\partial x^j \partial s^{2n}} G(x, s) \right) \left(\frac{s^{\alpha/2} v_k^{(2n)}(s)}{\sqrt{\lambda_k}} \right) ds, \quad j = \overline{0, 2n-1}. \quad (20)$$

Из (20) следует, что $v_k^{(j)}(x) / \sqrt{\lambda_k}$ - есть коэффициент Фурье функции по ортонормальной системе $\left\{ s^{\alpha/2} v_k^{(2n)}(s) / \sqrt{\lambda_k} \right\}_{k=1}^{+\infty}$. Поэтому, согласно неравенству Бесселя [16], имеем

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{[v_k^{(j)}(x)]^2}{\lambda_k} \leq \int_0^1 s^\alpha \left[\frac{\partial^{2n+j}}{\partial x^j \partial s^{2n}} G(x, s) \right]^2 ds, \quad j = \overline{0, 2n-1}. \quad (21)$$

В силу $0 < \alpha < 1$, интеграл в правой части неравенства (21) равномерно ограничен при $j = \overline{0, 2n-1}$, откуда следует, что первые ряды в (19) сходятся равномерно.

Аналогично доказывается сходимость и остальных рядов.

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Если выполнены условия $g^{(j)}(x) \in C[0,1]$, $j = \overline{0, 2n-1}$, $x^{\alpha/2} g^{(2n)}(x) \in C(0,1) \cap L_2(0,1)$; $g^{(2j)}(0) = 0$, $g^{(2j+1)}(1) = 0$, $j = \overline{0, n-1}$, то справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k g_k^2 \leq \int_0^1 x^\alpha \left[g^{(2n)}(x) \right]^2 dx, \quad (22)$$

в частности, ряд в левой части сходится, где $g_k = \int_0^1 g(x) v_k(x) dx$, $k \in N$.

Доказательство. В силу уравнения (4), справедливо равенство

$$\lambda_k^{1/2} g_k = \lambda_k^{1/2} \int_0^1 g(x) v_k(x) dx = \lambda_k^{-1/2} \int_0^1 g(x) \left[x^\alpha v_k^{(2n)}(x) \right]^{(2n)} dx.$$

Из этого равенства, применяя правило интегрирования по частям $2n$ раз и учитывая свойства функций $g(x)$ и $v_k(x)$, получим

$$\lambda_k^{1/2} g_k = \int_0^1 \left\{ x^{\alpha/2} g^{(2n)}(x) \right\} \left\{ \lambda_k^{-1/2} x^{\alpha/2} v_k^{(2n)}(x) \right\} dx.$$

Отсюда следует, что число $\lambda_k^{1/2} g_k$ - есть коэффициент Фурье функции $x^{\alpha/2} g^{(2n)}(x)$ по ортонормированной системе $\left\{ x^{\alpha/2} v_k^{(2n)}(x) / \sqrt{\lambda_k} \right\}_{k=1}^{+\infty}$. Тогда, согласно неравенству Бесселя[16], справедливо неравенство (22). Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Если функция $g(x)$ удовлетворяет условиям (5) и $Mg(x) \in C(0,1) \cap L_2(0,1)$, то справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2 g_k^2 \leq \int_0^1 [Mg(x)]^2 dx, \quad (23)$$

в частности, ряд в левой части сходится, где $g_k = \int_0^1 g(x) v_k(x) dx$, $k \in N$.

Доказательство. В силу формулы для g_k и уравнения (4), справедливо равенство

$$\lambda_k g_k = \lambda_k \int_0^1 g(x) v_k(x) dx = \int_0^1 g(x) \left[x^\alpha v_k^{(2n)}(x) \right]^{(2n)} dx.$$

Применяя правило интегрирования по частям $4n$ раз к интегралу в правой части и учитывая свойства функций $g(x)$ и $v_k(x)$, получим

$$\lambda_k g_k = \int_0^1 \left[x^\alpha g^{(2n)}(x) \right]^{(2n)} v_k(x) dx = \int_0^1 [Mg(x)] v_k(x) dx.$$

Отсюда следует, что число $\lambda_k g_k$ - есть коэффициент Фурье функции $Mg(x)$ по ортонормированной системе функций $\{v_k(x)\}_{k=1}^{+\infty}$. Тогда, согласно неравенству Бесселя[16], справедливо неравенство (23). Лемма 4 доказана.

Аналогично лемме 3, доказывается следующая

Лемма 5. Если функция $g(x)$ удовлетворяет условиям (5) и $[Mg(x)]^{(j)} \in C[0,1]$, $j = \overline{0, 2n-1}$; $x^{\alpha/2} [Mg(x)]^{(2n)} \in C(0,1) \cap L_2(0,1)$;

$\left[Mg(x) \right]^{(2j)} \Big|_{x=0} = 0, \quad \left[Mg(x) \right]^{(2j+1)} \Big|_{x=1} = 0, \quad j = \overline{0, n-1}, \quad \text{то справедливо}$
неравенство

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^3 g_k^2 \leq \int_0^1 x^\alpha \left\{ \left[Mg(x) \right]^{(2n)} \right\}^2 dx, \quad (24)$$

в частности, ряд в левой части сходится, где $g_k = \int_0^1 g(x) v_k(x) dx, \quad k \in N$.

IV. Существование, единственность и устойчивость решения задачи С

Решение задачи С ищем в виде

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t) v_k(x), \quad (25)$$

где $v_k(x), k \in N$ - собственные функции задачи $\{(4), (5)\}$, а $u_k(t), k \in N$ - неизвестные функции, подлежащие определению.

Подставляя (25) в уравнение (1) и в начальные условия (2), относительно $u_k(t), k \in N$ получим следующую задачу

$$\begin{aligned} u_k''(t) + \lambda_k u_k(t) &= f_k(t), \quad t \in (0, T), \quad k \in N, \\ u_k(0) &= \varphi_{1k}, \quad u_k'(0) = \varphi_{2k}, \end{aligned}$$

где

$$\varphi_{jk} = \int_0^1 \varphi_j(x) v_k(x) dx, \quad j = \overline{1, 2}; \quad f_k(t) = \int_0^1 f(x, t) v_k(x) dx, \quad k \in N. \quad (26)$$

Известно, что решение последней задачи существует, единственно и определяется следующей формулой:

$$\begin{aligned} u_k(t) &= \varphi_{1k} \cos(t\sqrt{\lambda_k}) + \varphi_{2k} \lambda_k^{-1/2} \sin(t\sqrt{\lambda_k}) + \lambda_k^{-1/2} \int_0^t f_k(\tau) \sin[(t-\tau)\sqrt{\lambda_k}] d\tau, \\ &0 \leq t \leq T. \end{aligned} \quad (27)$$

Отсюда, легко следует оценка

$$|u_k(t)| \leq |\varphi_{1k}| + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} |\varphi_{2k}| + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \sqrt{\int_0^T f_k^2(\tau) d\tau}, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (28)$$

Теорема 1. Пусть функция $\varphi_1(x)$ удовлетворяет условиям леммы 5, функция $\varphi_2(x)$ удовлетворяет условиям леммы 4, а функция $f(x, t)$ удовлетворяет условиям леммы 4 по аргументу x равномерно по t . Тогда ряд (30), коэффициенты которого определены равенствами (27), определяет решение задачи С.

Доказательство. Для этого надо доказать равномерную сходимость в $\overline{\Omega}$ ряда (25) и следующих рядов, формально полученных из (25):

$$u_t(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} u'_k(t) v_k(x), \quad \frac{\partial^j u(x, t)}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t) v_k^{(j)}(x), \quad j = \overline{1, 2n-1},$$

$$\frac{\partial^j}{\partial x^j} \left(x^\alpha \frac{\partial^{2n} u(x, t)}{\partial^{2n}} \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t) (x^\alpha v_k^{(2n)}(x))^{(j)}, \quad j = \overline{0, 2n-1},$$

и равномерную сходимость в любом компакте $\Omega_0 \subset \Omega$ рядов

$$\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} \left(x^\alpha \frac{\partial^{2n} u(x, t)}{\partial^{2n}} \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t) (x^\alpha v_k^{(2n)}(x))^{(2n)}, \quad (29)$$

$$u_{tt}(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} u''_k(t) v_k(x). \quad (30)$$

Рассмотрим ряд (25). В силу (28) из (25), при любых $(x, t) \in \overline{\Omega}$ имеем

$$|u(x, t)| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |u_k(t)| |v_k(x)| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|v_k(x)|}{\sqrt{\lambda_k}} \left(\sqrt{\lambda_k} |\varphi_{1k}| + |\varphi_{2k}| + \sqrt{\int_0^T f_k^2(\tau) d\tau} \right).$$

Отсюда, применяя неравенство Коши-Буняковского, получим

$$|u(x, t)| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{v_k^2(x)}{\lambda_k}} \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \varphi_{1k}^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{+\infty} \varphi_{2k}^2} + \sqrt{\int_0^T \sum_{k=1}^{+\infty} [f_k(\tau)]^2 d\tau} \right). \quad (31)$$

Ряды, стоящие в правых частях этого неравенства, в силу условия теоремы 1, согласно леммам 2 и 3, равномерно сходятся. Поэтому, ряд, стоящий в левой части, т.е. ряд (25) сходится равномерно в $\overline{\Omega}$.

Теперь рассмотрим ряд (29). В силу уравнения (4), в любом компакте Ω_0 ряд в (29) записывается в виде

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k u_k(t) v_k(x). \quad (32)$$

Для доказательства равномерной сходимости ряда (32), согласно (28), достаточно доказать абсолютную и равномерную сходимость рядов

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \varphi_{1k} v_k(x), \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt{\lambda_k} \varphi_{2k} v_k(x), \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt{\lambda_k} \sqrt{\int_0^T [f_k(\tau)]^2 d\tau} v_k(x). \quad (33)$$

В Ω_0 к каждому из этих рядов применим неравенство Коши — Буняковского:

$$\left| \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \varphi_{1k} v_k(x) \right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \left| \sqrt{\lambda_k^3} \varphi_{1k} \frac{v_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}} \right| \leq \left[\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^3 \varphi_{1k}^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{v_k^2(x)}{\lambda_k} \right]^{1/2},$$

$$\left| \sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt{\lambda_k} \varphi_{2k} v_k(x) \right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \left| \lambda_k \varphi_{2k} \frac{v_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}} \right| \leq \left[\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2 \varphi_{2k}^2 \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{v_k^2(x)}{\lambda_k} \right]^{1/2},$$

$$\left| \sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt{\lambda_k} \sqrt{\int_0^T [f_k(\tau)]^2 d\tau} v_k(x) \right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \left| \sqrt{\lambda_k^2 \int_0^T [f_k(\tau)]^2 d\tau} \frac{v_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}} \right| \leq$$

$$\leq \left[\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2 \left[\int_0^T [f_k(\tau)]^2 d\tau \right] \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{v_k^2(x)}{\lambda_k} \right]^{1/2}.$$

Ряды, стоящие в правых частях этих неравенств, в силу условия теоремы 1, согласно леммам 2, 4 и 5, равномерно сходятся. Тогда ряды, стоящие в левых частях, т.е. ряды (33) сходятся абсолютно и равномерно в Ω_0 . Поэтому, ряд (32), следовательно, и ряд в (29) сходится равномерно в компакте Ω_0 . Равномерная сходимость в Ω_0 ряда (30) следует из сходимости ряда (29) и справедливости уравнения (1).

Аналогично доказывается равномерная сходимость и остальных рядов. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Задача C не может иметь более одного решения.

Доказательство. Предположим, что существует два решения $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ задачи C . Их разность обозначим через $u(x, t)$. Тогда функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (1) при $f(x, t) \equiv 0$, а условиям (2) и (3)-при $\varphi_1(x) \equiv \varphi_2(x) \equiv 0$.

Пусть $\forall T_0 \in (0, T]$, $\Omega_0 = \{(x, t): 0 < x < 1, 0 < t < T_0\}$. Очевидно, что $\overline{\Omega}_0 \subset \overline{\Omega}$. Введем следующую функцию:

$$\omega(x, t) = - \int_t^{T_0} u(x, \xi) d\xi, \quad (x, t) \in \overline{\Omega}_0.$$

Эта функция обладает следующими свойствами:

- 1) $\omega_t, \omega_{tt}, \frac{\partial^j \omega}{\partial x^j}, \frac{\partial^j}{\partial x^j} \left(x^\alpha \frac{\partial^{2n} \omega}{\partial x^{2n}} \right) \in C(\overline{\Omega}_0)$, $j = \overline{0, 2n-1}$;
- 2) удовлетворяет условиям (3) при $t \in [0, T_0]$.

Рассмотрим уравнение (1) при $f(x, t) \equiv 0$, умножим его на функцию $\omega(x, t)$ и проинтегрируем полученное равенство по области Ω_0 :

$$\int_{\Omega_0} \omega(x, t) \left\{ u_{tt}(x, t) + \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} \left[x^\alpha \frac{\partial^{2n} u(x, t)}{\partial x^{2n}} \right] \right\} dt dx = 0.$$

Перепишем это равенство в виде

$$\int_0^{T_0} dt \int_0^1 \omega(x,t) \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} \left[x^\alpha \frac{\partial^{2n} u(x,t)}{\partial x^{2n}} \right] dx + \int_0^1 dx \int_0^{T_0} \omega(x,t) u_{tt}(x,t) dt = 0.$$

Теперь, применяя правило интегрирования по частям, получим равенство

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_0} \left[\omega(x,t) \frac{\partial^{2n-1}}{\partial x^{2n-1}} \left(x^\alpha \frac{\partial^{2n} u(x,t)}{\partial x^{2n}} \right) - \frac{\partial \omega(x,t)}{\partial x} \frac{\partial^{2n-2}}{\partial x^{2n-2}} \left(x^\alpha \frac{\partial^{2n} u(x,t)}{\partial x^{2n}} \right) + \dots \right. \\ & \left. + \dots - \frac{\partial^{2n-1} \omega(x,t)}{\partial x^{2n-1}} \left(x^\alpha \frac{\partial^{2n} u(x,t)}{\partial x^{2n}} \right) \right]_{x=0}^{x=1} dt + \int_0^{T_0} dt \int_0^1 x^\alpha \frac{\partial^{2n} \omega(x,t)}{\partial x^{2n}} \frac{\partial^{2n} u(x,t)}{\partial x^{2n}} dx + \\ & + \int_0^1 \left[\omega(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right]_{t=0}^{t=T_0} - \int_0^{T_0} \frac{\partial \omega(x,t)}{\partial t} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} dx = 0, \end{aligned}$$

из которого, в силу свойств функции $\omega(x,t)$ и $u(x,t)$, следует равенство

$$\int_0^{T_0} dt \int_0^1 x^\alpha \frac{\partial^{2n} \omega(x,t)}{\partial x^{2n}} \frac{\partial^{2n} u(x,t)}{\partial x^{2n}} dx - \int_0^1 dx \int_0^{T_0} \frac{\partial \omega(x,t)}{\partial t} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} dt = 0.$$

Отсюда, учитывая равенства $u = \frac{\partial \omega}{\partial t}$ и $\frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n}} = \frac{\partial^{2n+1} \omega}{\partial x^{2n} \partial t}$, имеем

$$\int_0^1 x^\alpha dx \int_0^{T_0} \frac{\partial^{2n} \omega(x,t)}{\partial x^{2n}} \frac{\partial^{2n+1} \omega(x,t)}{\partial x^{2n} \partial t} dt - \int_0^1 dx \int_0^{T_0} u(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} dt = 0.$$

Далее, принимая во внимание равенства

$$u(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} [u(x,t)]^2, \quad \frac{\partial^{2n} \omega(x,t)}{\partial x^{2n}} \frac{\partial^{2n+1} \omega(x,t)}{\partial x^{2n} \partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial^{2n} \omega(x,t)}{\partial x^{2n}} \right]^2,$$

и применяя правило интегрирования по частям к интегралам по t , с учетом $\omega(x, T_0) = 0$, $u(x, 0) = 0$, получим

$$\int_0^1 u^2(x, T_0) dx + \int_0^1 x^\alpha \left[\frac{\partial^{2n} \omega(x,t)}{\partial x^{2n}} \right]_{t=0}^2 dx = 0.$$

Отсюда следует, что $u(x, T_0) \equiv 0$, $x \in [0, 1]$. Так как $\forall T_0 \in [0, T]$, то $u(x, t) \equiv 0$, $(x, t) \in \bar{\Omega}$. Тогда $u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$, $(x, t) \in \bar{\Omega}$. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Пусть функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ и $f(x, t)$ удовлетворяют условиям теоремы 1. Тогда для решения задачи C справедливы оценки

$$\|u(x, t)\|_{L_2(0,1)}^2 \leq K_0 \left[\|\varphi_1(x)\|_{L_2(0,1)}^2 + \|\varphi_2(x)\|_{L_2(0,1)}^2 + \|f(x, t)\|_{L_2(\Omega)}^2 \right], \quad (34)$$

$$\|u(x, t)\|_{C(\bar{\Omega})} \leq K_1 \left[\|\varphi_1^{(2n)}(x)\|_{L_{2,r}(0,1)} + \|\varphi_2(x)\|_{L_2(0,1)} + \|f(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \right], \quad (35)$$

где $\|\varphi_1(x)\|_{L_{2,r}(0,1)} = \left[\int_0^1 x^\alpha [\varphi_1(x)]^2 dx \right]^{1/2}$ и $r=r(x)=x^\alpha$, а K_0 и K_1 —некоторые действительные положительные числа.

Доказательство. Здесь учитывая ортонормальность системы $\{v_k(x)\}_{k=1}^{+\infty}$ и неравенство (28), из (25) получим

$$\begin{aligned} \|u(x,t)\|_{L_2(0,1)}^2 &= \sum_{k=1}^{+\infty} u_k^2(t) \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \left[|\varphi_{1k}| + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} |\varphi_{2k}| + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \|f_k(t)\|_{L_2(0,T)} \right]^2 \leq 3 \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\varphi_{1k}^2 + \frac{1}{\lambda_k} \varphi_{2k}^2 + \frac{1}{\lambda_k} \|f_k(t)\|_{L_2(0,T)}^2 \right]. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая неравенство Бесселя, получим

$$\|u(x,t)\|_{L_2(0,1)}^2 \leq K_0 \left(\|\varphi_1(x)\|_{L_2(0,1)}^2 + \|\varphi_2(x)\|_{L_2(0,1)}^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \|f_k(t)\|_{L_2(0,T)}^2 \right), \quad (36)$$

где $K_0 = 3C$, $C = \max(1, 1/\lambda_1)$.

Принимая во внимание легко проверяемое равенство

$$\|f(x,t)\|_{L_2(\Omega)}^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n(t)\|_{L_2(0,T)}^2,$$

из (36) получим неравенство (34).

Принимая во внимание утверждения лемм 2 и 3, из (31) получим неравенство

$$\|u(x,t)\|_{C(\bar{\Omega})} = \sup_{\bar{\Omega}} |u(x,t)| \leq K_1 \left\{ \sqrt{\int_0^1 x^\alpha [\varphi_1^{(2n)}(x)]^2 dx} + \|\varphi_2(x)\|_{L_2(0,1)}^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \|f_k(t)\|_{L_2(0,T)}^2 \right\},$$

где $K_1 = \sup_{[0,1]} \sqrt{\sum_{k=1}^{+\infty} v_k^2(x)/\lambda_k}$.

Отсюда, в силу введенных обозначений следует неравенство (35). Теорема 3 доказана.

Литература.

1. Франкль Ф.И. Избранные труды по газовой динамике. М.: Наука. 1973. - 711 с.
2. Франкль Ф.И. О баковом водозаборе из быстрых мелких рек// Труды Киргизского государственного университета. 1953. Т. 2. С. 33-45.

3. Urinov A.K., Azizov M.S. On the Solvability of an Initial–Boundary Value Problem for a High Even Order Partial Differential Equation Degenerating on the Domain Boundary// Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2023, Vol. 17, No. 2, pp. 414–426.
4. Irgashev B.Yu. Mixed problem for higher-order equations with fractional derivative and degeneration in both variables// Ukrainian Mathematical Journal, Vol.74, No.10, March, 2023, DOI 10.1007/s11253-023-02152-3
5. Irgashev B.Yu. Boundary value problem for a degenerate equation with a Riemann–Liouville operator// Наносистемы: физика, химия, математика, 2023, том 14, выпуск 5, 511–517. DOI: 10.17586/2220-8054-2023-14-5-511-517
6. Уринов А.К., Усмонов Д.А. Об одной задаче для уравнения смешанного типа четвертого порядка, вырождающегося внутри и на границе области // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2023. Т. 33. Вып. 2. С. 312–328.
7. Уринов А.К., Усмонов Д.А. Нелокальная начально-граничная задача для вырождающегося уравнения четвертого порядка с дробной производной Герасимова-Капуто// Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2023. Т. 42. №1. С. 123-139.
8. Уринов А.К., Орипов Д. Д. О разрешимости одной начально-граничной задачи для вырождающегося уравнения высокого четного порядка// Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2023, №4, 621–644.
9. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.
10. Сабитов К.Б. К теории начально-граничных задач для уравнения стержней и балок// Диффер. уравн., 2017. Т.53, №1. С. 89–100. doi:10.1134/S0374064117010083.
11. Сабитов К.Б., Фадеева О.В. Начально-граничная задача для уравнения вынужденных колебаний консольной балки// Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2021. Т.25, №1. С. 51–66. doi:10.14498/vstgu1845.
12. Азизов М.С. Об одной начально-граничной задаче для уравнения в частных производных высшего четного порядка с оператором Бесселя// Bull. Inst. Math., 2022, Vol.5, №1, С. 14-24.
13. Уринов А.К., Азизов М.С. Об одной начально-граничной задаче для уравнения в частных производных высокого четного порядка в прямоугольнике// Научный вестник. ФерГУ. 2022, №2. С. 207-224.
14. Erdélyi A. Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. Higher transcendental functions. vol.II/ Bateman Manuscript Project. New York, Toronto, London: McGraw-Hill Book Co., 1953. xvii+396 pp.
15. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.

16. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Физматлит, 1959.