

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЯЗКО- ТРАНСЗВУКОВОГО УРАВНЕНИЯ

Апаков Юсупжон Пулатович¹, Иброхимов Хусниддин Комилжон угли²

¹Институт математики им. В.И.Романовского АН РУз,

^{1,2}Наманганский инженерно-строительный институт.

¹Gmail: yusupjonapakov@gmail.com

²E-mail: xusniddin571@mail.ru

Tel: +998945020595

Аннотация. В данной работе исследована краевая задача для вязко-трансзвукового уравнения. Единственность решения доказана методом интегралов энергии. Существование решения доказано методом разделения переменных. Решение данной задачи явно представлено в виде бесконечного ряда, с обоснованием возможности почленного дифференцирования ряда по всем переменным. При обосновании равномерной сходимости установлена отличность от нуля "малого знаменателя".

Ключевые слова: Уравнение с кратными характеристиками, краевая задача, единственность, существование, метод разделения переменных, собственное значение, собственная функция, функциональный ряд, абсолютная и равномерная сходимость.

YOPIHQOQ TRANS TOVUSHLI TENGLAMA UCHUN CHEGARAVIY MASALA YECHILISHI HAQIDA

Apakov Yusupjon Po'latovich¹, Ibrohimov Xusniddin Komiljon o'g'li²

¹O'zR FA V.I.Romonovskiy nomidagi matematika instituti,

^{1,2}Namangan muhandislik-qurilish instituti

¹Gmail: yusupjonapakov@gmail.com

²E-mail: xusniddin571@mail.ru

Tel: +998945020595

Annotatsiya: Ushbu ishda yopishqoq trans tovushli tenglama uchun chegaraviy masala o'rganilgan. Qo'yilgan masala yechimini yagonaligi integral energiya

usuli yordamida o'rnatilgan. Yechimning mavjudligi o'zgaruvchilarni ajratish usuli bilan isbotlangan. Ushbu masalaning yechimi cheksiz qator ko'rinishda topilib, barcha o'zgaruvchilariga nisbatan qatorni differensiallash imkoniyati asoslab ko'rsatilgan. Yechimning tekis yaqinlashishini ko'rsatish jarayonida "kichik maxraj" noldan farq bo'lishi ko'rsatilgan.

Kalit so'zlar: Karrali xarakteristik tenglama, chegaraviy masala, yagonalik, mavjudlik, o'zgaruvchilarni ajratish usuli, xos son, xos funksiya, funksional qator, absolut va tekis yaqinlashish.

ON THE SOLVABILITY OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE VISCO-TRANSOUND EQUATION

¹Apakov Yusupjon Pulatovich, ²Ibrokhimov Xusniddin Komiljon ugli.

¹Mathematician of the institute. V. I. Romanovskogo AN RUz

^{1,2}Namangan Engineering-Construction Institute Teacher

¹Gmail: yusupjonapakov@gmail.com

²E-mail: xusniddin571@mail.ru

Tel: +998945020595

Annotation: In this paper, a boundary value problem for a viscous-transonic equation is investigated. The uniqueness of the solution is proved by the method of energy integrals. The existence of a solution is proved by the method of separation of variables. The solution of this problem is explicitly presented as an infinite series, with a justification for the possibility of term-by-term differentiation of the series with respect to all variables. When justifying uniform convergence, a non-zero difference of the "small denominator" is established.

Key words: Equations with multiple characteristics, boundary value problem, uniqueness, existence, method of separated variables, eigenvalue, eigenfunction, functional series, absolute and uniform convergence.

I. Введение

Дифференциальные уравнения в частных производных третьего порядка рассматриваются при решении задач теории нелинейной акустики и в гидродинамической теории космической плазмы, фильтрации жидкости в пористых средах [1].

Довольно часто резкие изменения параметров потока происходят в узких областях, прилегающих к ударным волнам. Градиенты параметров потока в них могут быть настолько значительными, что наряду с нелинейным характером движения становится необходимым учитывать влияние вязкости и теплопроводности. Такие течения называются короткими волнами. К теории коротких волн относится теория трансзвуковых течений. Следует отметить, что в последнее время в литературе это уравнение все больше называют вязким трансзвуковым уравнением, или просто ВТ-уравнением [2]. Общая теория коротких волн и ее связь с трансзвуковыми течениями дана в [3]. В ряде конкретных физических задач, рассмотрены примеры коротких волн, возникающих в стационарных течениях, где происходят диссипативные процессы. В [4] рассматривается маховское отражение слабых ударных волн от клина. В [5-6] рассмотрено взаимодействие слабых ударных волн в неограниченном слое.

В работе [7], учитывая свойства вязкости и теплопроводности газа, из системы Навье-Стокса было получено уравнение третьего порядка с кратными характеристиками, содержащее вторую производную по времени

$$u_{xxx} + u_{yy} - \frac{\nu}{y} u_y = u_x u_{xx}, \quad \nu = \text{const.}$$

Это уравнение при $\nu = 1$ описывает осесимметричный поток, а при $\nu = 0$ описывает плоско - параллельный поток [8].

Первые результаты по уравнению третьего порядка с кратными характеристиками были получены в работах Н. Block [9], E. Del Vecchio [10].

L. Catabriga в работе [11] для уравнения $D_x^{2n+1}u - D_y^2u = 0$ построил фундаментальное решение в виде двойного несобственного интеграла и изучил свойства потенциала, решил краевые задачи.

В работах [12-13] построены фундаментальные решения для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, содержащие вторые производные по времени, выраженные через вырожденные гипергеометрические функции, изучены их свойства, найдены оценки при $|t| \rightarrow \infty$.

II. Постановка задачи

В области $D = \{(x, y): 0 < x < p, 0 < y < q\}$ рассмотрим уравнение

$$L[u] \equiv \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (1)$$

где $p > 0, q > 0$ – постоянные вещественные числа, и для него исследуем следующую задачу.

Задача А. Найти функцию $u(x, y)$ из класса $C_{x,y}^{3,2}(D) \cap C_{x,y}^{2,1}(\overline{D})$, удовлетворяющую уравнению (1) в области D и следующим краевым условиям:

$$u(x, 0) = u(x, q) = 0, \quad (2)$$

$$\begin{cases} au(0, y) + bu_{xx}(0, y) = \psi_1(y), \\ cu(p, y) + du_{xx}(p, y) = \psi_2(y), \\ u_x(0, y) = \psi_3(y), \end{cases} \quad (3)$$

где a, b, c и d – заданные постоянные, а также $a^2 + b^2 \neq 0, c^2 + d^2 \neq 0$, а $\psi_i(y), i = \overline{1, 3}$, – заданные достаточно гладкие функции, причем

$$\psi'_{in}(0) = \psi'_{in}(q) = 0, i = \overline{1, 3}. \quad (4)$$

Отметим, что аналогичная задача для сопряженного уравнения исследовано в работах [14-16]. Краевые задачи, близкие к теме данной работы, изучались

в [17]. В работе [18] рассмотрен случай $a = 1, b = 0, c = 1, d = 0$, а в работе [19] случай $a = 0, b = 1, c = 0, d = 1$.

III. Единственность решения

Теорема 1. Если задача A имеет решение, то при выполнении условий $ab \leq 0, cd \geq 0$, оно единственно.

Доказательство. Предположим обратное, пусть задача A имеет два решения $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$. Тогда функция $u(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1) с однородными краевыми условиями. Докажем, что $u(x, y) \equiv 0$ в $\bar{D}$.

В области D справедливо тождество

$$u L[u] \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left(u u_{xx} - \frac{1}{2} u_x^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} (u u_y) - u_y^2 = 0. \quad (5)$$

Интегрируя тождество (5) по области D , имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^p \int_0^q \frac{\partial}{\partial x} \left[u(x, y) u_{xx}(x, y) - \frac{1}{2} u_x^2(x, y) \right] dx dy + \\ & + \int_0^p \int_0^q \frac{\partial}{\partial y} [u(x, y) u_y(x, y)] dx dy - \int_0^p \int_0^q u_y^2(x, y) dx dy = 0. \end{aligned}$$

Учитывая однородные краевые условия и требуя $a \neq 0, c \neq 0$, получим

$$\frac{d}{c} \int_0^q u_{xx}^2(p, y) dy - \frac{b}{a} \int_0^q u_{xx}^2(0, y) dy + \frac{1}{2} \int_0^q u_x^2(p, y) dy + \int_0^p \int_0^q u_y^2(x, y) dx dy = 0.$$

Учитывая условия $ab \leq 0, cd \geq 0$, получим $u_y(x, y) = 0$, т.е. $u(x, y) = f(x)$, здесь $f(x)$ является произвольной функцией, удовлетворяющей условиям задачи. Тогда из условия (2), т.е. $u(x, 0) = 0$, получим $f(x) = 0$. Следовательно $u(x, y) \equiv 0, (x, y) \in \bar{D}$. В силу последнего, получим $u_1(x, y) = u_2(x, y)$.

В случаях $b \neq 0, d \neq 0; a \neq 0, d \neq 0; c \neq 0, b \neq 0$, аналогично получаем равенство $u(x, y) \equiv 0$ в $\bar{D}$.

Теорема 1 доказана.

IV. Существование решения

Теорема 2. Если функции $\psi_i(y) \in C^2[0 < y < q]$, $i = \overline{1, 3}$ и выполняются условия (4), то решение задачи A существует.

Доказательство. Решение задачи A ищем в виде

$$u(x, y) = X(x)Y(y). \quad (6)$$

Подставляя (6) в уравнение (1) и разделяя переменные, относительно функции $Y(y)$ получим задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0, \\ Y(0) = Y(q) = 0, \end{cases} \quad (7)$$

где λ - параметр разделения.

Нетривиальные решения задачи (7), существует только при

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{q} \right)^2, \quad n \in N.$$

Эти числа являются собственными значениями задачи (7), а соответствующие им собственные функции имеют вид [20]

$$Y_n(y) = \sqrt{\frac{2}{q}} \sin \frac{n\pi}{q} y. \quad (8)$$

Отметим, что система собственных функций (8) задачи (7) является полной и ортонормированной в пространстве $L_2(0, q)$ [21].

Для $X_n(x)$ приходим к следующей задаче:

$$\begin{cases} X_n''' - \lambda_n X_n = 0, \\ aX_n(0) + bX_n''(0) = \psi'_{1n}, \\ cX_n(p) + dX_n''(p) = \psi'_{2n}, \\ X_n'(0) = \psi'_{3n}, \end{cases} \quad (9)$$

где

$$\psi'_{i_n} = \sqrt{\frac{2}{q}} \int_0^q \psi'_i(y) \sin\left(\frac{n\pi}{q}y\right) dy, \quad i = \overline{1,3}, n \in N.$$

Общее решение уравнение в задачи (9), имеет вид

$$X_n(x) = C_{1n} e^{k_n x} + e^{-\frac{1}{2}k_n x} \left(C_{2n} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} k_n x + C_{3n} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} k_n x \right), \quad (10)$$

здесь

$$k_n = \sqrt[3]{\lambda_n} = \left(\frac{n\pi}{q} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad n \in N.$$

Учитывая условия задачи (9), получим:

$$\begin{cases} C_{1n} (a + bk_n^2) + C_{2n} \left(a - \frac{bk_n^2}{2} \right) - C_{3n} \frac{\sqrt{3}bk_n^2}{2} = \psi'_{1n}, \\ C_{1n} e^{k_n p} (c + dk_n^2) + C_{2n} e^{-\frac{1}{2}k_n p} \left(c \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} k_n p \right) + dk_n^2 \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} k_n p - \frac{2\pi}{3} \right) \right) + \\ + C_{3n} e^{-\frac{1}{2}k_n p} \left(c \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} k_n p \right) + dk_n^2 \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} k_n p - \frac{2\pi}{3} \right) \right) = \psi'_{2n}, \\ k_n C_{1n} - \frac{1}{2} k_n C_{2n} + \frac{\sqrt{3}}{2} k_n C_{3n} = \psi'_{3n}. \end{cases} \quad (11)$$

Итак, для определения коэффициентов $C_{in}, i = \overline{1,3}$, мы получили систему алгебраических уравнений (11).

Введем обозначение:

$$\alpha = \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_n p\right), \quad \beta = \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_n p\right), \quad \gamma = \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_n p - \frac{2\pi}{3}\right),$$

$$\delta = \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_n p - \frac{2\pi}{3}\right).$$

Тогда (11) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} C_{1n}(a + bk_n^2) + C_{2n}\left(a - \frac{bk_n^2}{2}\right) - C_{3n}\frac{\sqrt{3}bk_n^2}{2} = \psi'_{1n}, \\ C_{1n}e^{k_n p}(c + dk_n^2) + C_{2n}e^{-\frac{1}{2}k_n p}(c\alpha + dk_n^2\gamma) + C_{3n}e^{-\frac{1}{2}k_n p}(c\beta + dk_n^2\delta) = \psi'_{2n}, \\ k_n C_{1n} - \frac{1}{2}k_n C_{2n} + C_{3n}\frac{\sqrt{3}}{2}k_n = \psi'_{3n}. \end{cases} \quad (12)$$

Основной определитель системы (12) имеет

$$\Delta(n) = \begin{vmatrix} a + bk_n^2 & a - \frac{1}{2}bk_n^2 & -\frac{\sqrt{3}}{2}bk_n^2 \\ e^{k_n p}(c + dk_n^2) & e^{-\frac{k_n}{2}p}(c\alpha + dk_n^2\gamma) & e^{-\frac{k_n}{2}p}(c\beta + dk_n^2\delta) \\ k_n & -\frac{1}{2}k_n & \frac{\sqrt{3}}{2}k_n \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2}k_n^5 e^{k_n p} \bar{\Delta}(n),$$

где

$$\bar{\Delta}(n) = \left(\frac{c}{k_n^2} + d\right) \left(b - \frac{a}{k_n^2}\right) + e^{-\frac{3k_n}{2}p} \left\{ \left(\frac{ac}{k_n^4} - \frac{2ad}{k_n^2} + \frac{2bc}{k_n^2} - bd\right) \cos \frac{\sqrt{3}}{2}k_n p + \sqrt{3} \left(\frac{ac}{k_n^4} + bd\right) \sin \frac{\sqrt{3}}{2}k_n p \right\},$$

Покажем, что $\Delta \neq 0$. Для этого докажем следующую лемму:

Лемма. Краевая задача

$$\begin{cases} X_n''' - \lambda_n X_n = 0, \\ aX_n(0) + bX_n''(0) = 0, \\ cX_n(p) + dX_n''(p) = 0, \\ X_n'(0) = 0, \end{cases} \quad (13)$$

имеет только тривиальное решение.

Доказательство лемма. Предположим обратное, пусть $X_n(x) \neq 0$.

Рассмотрим тождество

$$X_n (X_n'' - \lambda_n X_n) = 0$$

или

$$\left(X_n X_n'' - \frac{1}{2} (X_n')^2 \right)' - \lambda_n X_n^2 = 0,$$

интегрируя по интервалу $(0 < x < p)$, и учитывая краевые условия, получим

$$\frac{d}{c} X_n''(p) - \frac{b}{a} X_n''(0) + \frac{1}{2} X_n'(p) + \lambda_n \int_0^p X_n^2 dx = 0.$$

Так как $ab \leq 0$, $cd \geq 0$, $\lambda_n > 0$, то $X_n \equiv 0$. Лемма доказано.

Пусть существует такой номер n^* , что $\Delta(n^*) = 0$, тогда существует постоянные C_1^*, C_2^*, C_3^* одновременно не все равные нулю, удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} C_{1n^*}^* (a + bk_{n^*}^2) + C_{2n^*}^* \left(a - \frac{bk_{n^*}^2}{2} \right) - C_{3n^*}^* \frac{\sqrt{3}bk_{n^*}^2}{2} = 0, \\ C_{1n^*}^* e^{k_{n^*} p} (c + dk_{n^*}^2) + C_{2n^*}^* e^{-\frac{1}{2}k_{n^*} p} \left(c \cos t + dk_{n^*}^2 \cos \left(t - \frac{2\pi}{3} \right) \right) + \\ + C_{3n^*}^* e^{-\frac{1}{2}k_{n^*} p} \left(c \sin t + dk_{n^*}^2 \sin \left(t - \frac{2\pi}{3} \right) \right) = 0, \\ k_{n^*} C_{1n^*}^* - \frac{1}{2} k_{n^*} C_{2n^*}^* + \frac{\sqrt{3}}{2} k_{n^*} C_{3n^*}^* = 0. \end{cases}$$

Отсюда имеем, что функция

$$X_{n^*}(x) = C_{1n^*}^* e^{k_{n^*} x} + e^{-\frac{1}{2}k_{n^*} x} \left(C_{2n^*}^* \cos \frac{\sqrt{3}}{2} k_{n^*} x + C_{3n^*}^* \sin \frac{\sqrt{3}}{2} k_{n^*} x \right),$$

является решением краевой задачи (13), но по доказанной лемме должно быть

$$C_{1n^*}^* e^{k_{n^*} x} + e^{-\frac{1}{2}k_{n^*} x} \left(C_{2n^*}^* \cos \frac{\sqrt{3}}{2} k_{n^*} x + C_{3n^*}^* \sin \frac{\sqrt{3}}{2} k_{n^*} x \right) \equiv 0,$$

но это невозможно в силу линейно-независимости функций

$$e^{k_{n^*}x}, \quad e^{-\frac{1}{2}k_{n^*}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}k_{n^*}x, \quad e^{-\frac{1}{2}k_{n^*}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}k_{n^*}x.$$

Отсюда функция:

$$u^*(x, y) = \sqrt{\frac{2}{q}} \sum_{n^*=1}^{\infty} \left[C_{1n^*}^* e^{k_{n^*}x} + e^{-\frac{1}{2}k_{n^*}x} \left(C_{2n^*}^* \cos \frac{\sqrt{3}}{2}k_{n^*}x + C_{3n^*}^* \sin \frac{\sqrt{3}}{2}k_{n^*}x \right) \right] \sin \frac{n^*\pi}{q}y,$$

является нетривиальным решением задачи A , а это противоречит теореме единственности.

Итак $\Delta(n) \neq 0, \quad n \in N$.

Отметим, что при $a=1, b=0, c=1, d=0$ получим результат работы [21], а в случае $a=0, b=1, c=0, d=1$ получим результат работы [22] как частный случай.

$$\begin{aligned} C_{1n} = & \frac{2e^{-k_n p}}{\sqrt{3}\Delta} \left[\frac{\psi'_{1n}}{k_n^2} e^{-\frac{k_n}{2}p} \left(\frac{c}{k_n^2} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_n p - \frac{\pi}{6} \right) + d \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_n p + \frac{\pi}{6} \right) \right) - \right. \\ & - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\psi'_{2n}}{k_n^2} \left(\frac{a}{k_n^2} - b \right) + \frac{\psi'_{3n} e^{-\frac{k_n}{2}p}}{k_n} \left\{ \left(\frac{a}{k_n^2} - \frac{1}{2}b \right) \left(\frac{c}{k_n^2} - \frac{1}{2}d \right) \sin \frac{\sqrt{3}}{2}k_n p + \right. \\ & \left. \left. + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{ad}{k_n^2} - bdk_n^4 + \frac{bc}{k_n^2} \right) \cos \frac{\sqrt{3}}{2}k_n p \right\} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{2n} = & \frac{2}{\sqrt{3}\Delta} \left[\frac{\psi'_{1n}}{k_n^2} \left\{ e^{-\frac{3k_n}{2}p} \left(\frac{c}{k_n^2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} k_n p + d \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} k_n p - \frac{2\pi}{3} \right) \right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{c}{k_n^2} + d \right) \right\} + \right. \\
& + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\psi'_{2n}}{k_n^2} e^{-k_n p} \left(\frac{a}{k_n^2} + 2b \right) - \frac{\psi'_{3n}}{k_n} \left\{ e^{-\frac{3k_n}{2}p} \left(\frac{a}{k_n^2} + b \right) \left(\frac{c}{k_n^2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} k_n p + \right. \right. \\
& \left. \left. + d \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} k_n p - \frac{2\pi}{3} \right) \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} b \left(\frac{c}{k_n^2} + d \right) \right\} \left. \right], \\
C_{3n} = & \frac{2}{\sqrt{3}\Delta} \left[- \frac{\psi'_{1n}}{k_n^2} \left\{ \frac{c}{2k_n^2} + \frac{d}{2} - e^{-\frac{3k_n}{2}p} \left(\frac{c}{k_n^2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} k_n p + d \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} k_n p - \frac{2\pi}{3} \right) \right) \right\} - \right. \\
& - \frac{1}{4} \frac{\psi'_{2n}}{k_n^2} e^{-k_n p} \left(\frac{6a}{k_n^2} + b \right) + \frac{\psi'_{3n}}{k_n} \left\{ e^{-\frac{3k_n}{2}p} \left(\frac{a}{k_n^2} + \frac{b}{2} \right) \left(\frac{c}{k_n^2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} k_n p + \right. \right. \\
& \left. \left. + d \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} k_n p - \frac{2\pi}{3} \right) \right) - \left(\frac{a}{k_n^2} - \frac{b}{2} \right) \left(\frac{c}{k_n^2} + d \right) \right\} \left. \right],
\end{aligned}$$

Тогда решение задачи A записывается в следующем виде:

$$u(x, y) = \sqrt{\frac{2}{q}} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[C_{1n} e^{k_n x} + e^{-\frac{1}{2} k_n x} \left(C_{2n} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} k_n x + C_{3n} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} k_n x \right) \right] \sin \frac{n\pi}{q} y. \quad (14)$$

Теперь докажем абсолютную и равномерную сходимость ряда (14) в области $\overline{D}$. Из (14) имеем

$$\begin{aligned}
|u(x, y)| &= \sqrt{\frac{2}{q}} \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \left[C_{1n} e^{k_n x} + e^{-\frac{1}{2} k_n x} \left(C_{2n} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} k_n x + C_{3n} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} k_n x \right) \right] \sin \frac{n\pi}{q} y \right| \leq \\
&\leq M \sum_{n=1}^{+\infty} \left[|C_{1n}| e^{k_n x} + |C_{2n}| + |C_{3n}| \right].
\end{aligned} \quad (15)$$

Найдем оценки C_{in} , $i = \overline{1, 3}$, получим

$$\begin{aligned}
|C_{1n}| &\leq M e^{-k_n p} \left[\frac{|\psi'_{1n}|}{k_n^2} + \frac{|\psi'_{2n}|}{k_n^2} + \frac{|\psi'_{3n}|}{k_n} \right], \\
|C_{2n}| &\leq M \left[\frac{|\psi'_{1n}|}{k_n^2} + \frac{|\psi'_{2n}|}{k_n^2} + \frac{|\psi'_{3n}|}{k_n} \right],
\end{aligned}$$

$$|C_{3n}| \leq M \left[\frac{|\psi'_{1n}|}{k_n^2} + \frac{|\psi'_{2n}|}{k_n^2} + \frac{|\psi'_{3n}|}{k_n} \right],$$

Найденные оценки от C_{in} , $i = \overline{1,3}$, подставляя в (15), имеем

$$|u(x, y)| \leq M \sum_{n=1}^{+\infty} e^{k_n(x-p)} \left[\frac{|\psi'_{1n}|}{k_n^2} + \frac{|\psi'_{2n}|}{k_n^2} + \frac{|\psi'_{3n}|}{k_n} \right] \leq M \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{|\psi'_{1n}|}{k_n^2} + \frac{|\psi'_{2n}|}{k_n^2} + \frac{|\psi'_{3n}|}{k_n} \right]. \quad (16)$$

Интегрируя по частям ψ'_{1n} , ψ'_{2n} , ψ'_{3n} и принимая во внимание условие (4), получим

$$\psi'_{in} = \left(\frac{q}{\pi} \right)^2 \frac{\Psi_{in}}{n^2}, \quad i = \overline{1,3},$$

где

$$\Psi_{in} = -\sqrt{\frac{2}{q}} \int_0^q \psi_i''(y) \sin \frac{n\pi y}{q} dy.$$

Тогда

$$|\psi'_{in}| \leq M \frac{|\Psi_{in}|}{n^2}, \quad i = \overline{1,3}, \quad M = \text{const} > 0.$$

Учитывая эти оценки, из (16) находим

$$|u(x, y)| \leq M \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{|\Psi_{1n}|}{n^3} + \frac{|\Psi_{2n}|}{n^3} + \frac{|\Psi_{3n}|}{n^3} \right] < \infty.$$

Отсюда следует, что ряд (14) сходится абсолютно и равномерно.

Теперь докажем, что производные ряда (14) входящий в уравнение (1), также сходятся абсолютно и равномерно в области $\overline{D}$. Для этого вычисляем производные по y , из (14) получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\sqrt{\frac{2}{q}} \left(\frac{\pi}{q} \right)^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \left[C_{1n} e^{k_n x} + e^{-\frac{1}{2} k_n x} \left(C_{2n} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} k_n x + C_{3n} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} k_n x \right) \right] \sin \frac{n\pi}{q} y,$$

Учитывая оценку $u(x, y)$, имеем

$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right| \leq M \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{|\Psi_{1n}|}{n^{\frac{4}{3}}} + \frac{|\Psi_{2n}|}{n^{\frac{4}{3}}} + \frac{|\Psi_{3n}|}{n^{\frac{2}{3}}} \right].$$

Используя неравенства Коши- Буняковского и Бесселя, получим

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right| &\leq M \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\Psi_{1n}|^4}{n^{\frac{4}{3}}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\Psi_{2n}|^4}{n^{\frac{4}{3}}} + \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} |\Psi_{3n}|^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}} \right] \leq \\ &\leq M \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\Psi_{1n}|^4}{n^{\frac{4}{3}}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\Psi_{2n}|^4}{n^{\frac{4}{3}}} + \|\psi'_{3n}(y)\| \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}} \right] < \infty, \end{aligned}$$

здесь

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |\Psi_{3n}|^2 \leq \|\psi'_{3n}(y)\|_{L_2[0,q]}^2.$$

Следовательно, ряд, соответствующий функции $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ сходится абсолютно и равномерно. Абсолютная и равномерная сходимость третьей

производной по x ряда (14) следует из $\left| \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right| = \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|$ и доказанного выше.

Теорема 2 доказана.

V. ВЫВОДЫ

В данной работе исследована смешанная краевая задача для вязко-транзвукового уравнения в прямоугольной области. Единственность решение поставленной задачи доказана с методом интегралов энергии. Существование решения доказана методом разделения переменных. Решения поставленной задачи найдена в виде бесконечного ряда, доказана равномерная сходимость и возможность почленного дифференцирования при некоторых условиях на заданные функции. Сходимость производной второго порядка решения по переменной y доказывается с помощью неравенств Коши-Буняковского и Бесселя. При обосновании равномерной сходимости решения доказывается отсутствие “малого знаменателя”.

Список литературы

1. Юлдашев Т. К. Обратная задача для одного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных третьего порядка // Вестн.

Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, - Самара, 2014. - № 1(34). - С.56-65.

2. Диесперов В.Н., Ломакин Л.А. Об одной краевой задаче для линеаризованного осесимметрического ВТ уравнения // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. - Москва, 1974. - Т. 14. - № 5. - С. 1244-1260.

3. Рыжов О.С., Шефтер Г.М. О влиянии вязкости и теплопроводности на структуру сжимаемых течений // Прикл. Матем. и механ., - Москва, 1964. Т. 28. Вып. 6. - С. 996-1007.

4. Sternberg J. Triple-shock wave intersections // Phys. Fluids, 1956, -Vol. 2, № 2. - pp. 179-206.

5. Sichel M. Leading edge of a shock-induced boundary layer // Phys. Fluids, 1962, -Vol. 5, - № 10. - pp. 1168-1180.

6. Sichel M. Structure on weak non-Hugoniot shocks // Phys. Fluids, 1963. Vol. 6, № 5. - pp. 653-662.

7. Рыжов О. С. Асимптотическая картина обтекания тел вращения со звуковым потоком вязкого и теплопроводящего газа // Прикл. Матем. и механ., - Москва, 1965. - Т. 29. Вып. 6. - С. 1004-1014.

8. Диесперов В.Н. О функции Грина линеаризованного вязкого трансзвукового уравнения // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. - Москва, 1972. - Т. 12. - № 5. - С. 1265-1279.

9. Block H. Sur les equations lineaires aux derives partielles a caracteristiques multiples // Ark. Mat. Astron. Fus. Note 1, - 1912, 7(13), - pp. 1-34; Note 2, 1912, ibid. 7(21), - pp. 1-30; Note 3, 1912 - 1913, ibid. 8(23). - pp. 1-51.

10. Del Vecchio E. Sulle equazioni $z_{xxx} - z_y + \varphi_1(x, y) = 0$, $z_{xxx} - z_{yy} + \varphi_2(x, y) = 0$ // Memorie R. Accad. Sci. Ser.2. - Torino, 1915, 66. - pp. 1-41.

11. Cattabriga L. Potenziali di linea e di dominio per equazioni non paraboliche in due variabili caratteristiche multiple // Rendiconti del seminario matematico della univ. di Padova. - 1961, 31. - pp. 1-45.

12. Джураев Т. Д., Апаков Ю.П. Об автомодельном решении одного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, - Самара, 2007. - № 2(15). - С.18-26.
13. Джураев Т. Д., Апаков Ю.П. К теории уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, содержащего вторую производную по времени // Украинский математический журнал. – Киев, 2010, том 62. № 1. - С. 40-51.
14. Абдуназаров С. Краевые задачи для одного неклассического уравнений третьего порядка // Диссертация. Ташкент, 1991. 239 стр.
15. Apakov Y. P., Umarov R. A. Solution of the Boundary Value Problem for a Third Order Equation with Little Terms. Construction of the Green's Function // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2022 Vol.43, No 3. pp. 738-748.
16. Apakov Y. P., Umarov R. A. On the third boundary problem for a nonhomogeneous third order equation with multiple characteristics // Uzbek Mathematical Journal. 2023, Volume 67, Issue 1, pp. 4-14.
17. Irgashev B.Y. A Boundary Value Problem with Conjugation Conditions for a Degenerate Equation with the Caputo Fractional Derivative // Russian mathematics. 2022, Volume 66, Issue 4, p. 24-31.
<https://doi.org/10.3103/S1066369X2204003X>
18. Апаков Ю.П. К теории уравнений третьего порядка с кратными характеристиками, Т., «Фан ва технология» 2019 г. 154 с.
19. Апаков Ю.П., Жураев А.Х. О решении краевой задачи для уравнения третьего порядка с помощью функции Грина // Узбекский математический журнал. 2011. №3. - С. 36-42.
20. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: «Наука», 1966. - 724 с.
21. Никольский С.М. Курс математического анализа. Том2. –Новосибирск: Наука, 1983. – 451 стр.