

МЕТОД РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩЕГО ПРОСТРАНСТВЕННУЮ ЧАСТЬ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ПУТИ

Тошматова Мохинисо Муродулла кизи,
Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан
Докторант Ташкентского государственного транспортного университета
toshmatova_mm@mail.ru

Аннотация. В данной статье представлена новая методика проектирования железнодорожных путей с использованием метода систематического вычитания для решения дифференциальных уравнений, описывающих пространственную часть железнодорожного плана. Предлагаемый метод позволяет получать приближённое решение, обеспечивающее плавный переход от прямой к кривой части. Применение данного метода способствует повышению точности и эффективности проектирования, железных дорог, что, в свою очередь, улучшает комфорт и безопасность железнодорожных перевозок.

Ключевые слова: План железной дороги, переходная часть, кривизна, дифференциальное уравнение, решение дифференциального уравнения, метод разностных схем.

METHOD FOR SOLVING THE DIFFERENTIAL EQUATION DESCRIBING THE SPATIAL PART OF A RAILWAY TRACK

Toshmatova Mokhiniso Murodulla kizi.
Doctoral student of the Tashkent state transport university
Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan
toshmatova_mm@mail.ru

Abstract. This article presents a new methodology for designing railway tracks using the systematic subtraction method to solve differential equations describing the spatial part of the railway alignment. The proposed method allows obtaining an approximate solution that ensures a smooth transition from the straight to the curved section. The application of this method contributes to improving the accuracy and efficiency of railway design, which, in turn, enhances the comfort and safety of railway transportation.

Keywords: Railway alignment, transition section, curvature, differential equation, solving differential equations, finite difference method.

TEMIRYO‘L YO‘LINING FAZOVIY QISMINI TASVIRLOVCHI DIFFERENSIAL TENGLAMANI YECHISH USULI

Toshmatova Mohiniso Murodulla qizi
Toshkent davlat transport universiteti, Toshkent, O'zbekiston
Toshmatova_mm@mail.ru

Annotatsiya. Ushbu maqolada temiryo'l yo'llarini loyihalashda fazoviy qismni tasvirlovchi differensial tenglamalarni yechish uchun sistematik ayirish usulidan foydalanish bo'yicha yangi metodika taqdim etilgan. Taklif etilgan usul to'g'ri chiziqdan egri qismga silliq o'tishni ta'minlovchi taxminiy yechimni olish imkonini beradi. Ushbu usuldan foydalanish temiryo'llarni loyihalash aniqligi va samaradorligini oshirishga, natijada, temiryo'l transportining qulayligi va xavfsizligini yaxshilashga xizmat qiladi.

Kalit so'zlar: Temiryo'l rejasi, o'tish qismi, egri chiziq, differensial tenglama, differensial tenglamani yechish, differensial sxemalar usuli.

Введение

Проектирование железнодорожных путей является сложным и ответственным процессом, требующим учета множества факторов, влияющих на безопасность и комфорт движения поездов. Оно охватывает различные аспекты, включая выбор оптимальной траектории, расчеты устойчивости полотна и минимизацию износа подвижного состава. Основой планировки железнодорожного пути являются траектории, состоящие из прямых участков и кривых. Эти элементы позволяют эффективно передвигаться на поездах, сохраняя устойчивость и сводя к минимуму динамические нагрузки на инфраструктуру.

Однако, для обеспечения плавных переходов между прямыми и кривыми участками, применяются специальные переходные кривые. Они позволяют снизить резкие изменения ускорений, что повышает комфорт пассажиров и снижает износ оборудования.

Одной из ключевых задач проектирования является не только создание эффективных траекторий движения, но и решение возникающих при этом дифференциальных уравнений, которые описывают пространственное положение железнодорожного пути. В связи с этим, исследование методов решения таких уравнений приобретает важное значение для повышения точности и качества проектирования, железных дорог.

В данной работе рассматривается новый подход к моделированию железнодорожных планов, который основан на методе систематического вычитания. Этот метод позволяет решать дифференциальные уравнения, описывающие пространственную часть железнодорожного пути, с большей эффективностью и точностью. Предлагаемый подход обеспечивает получение приближенных решений, которые могут

значительно улучшить процесс проектирования, как с точки зрения времени расчета, так и с точки зрения снижения погрешностей, связанных с традиционными методами. Благодаря данному подходу, проектировщики смогут создавать более безопасные и надежные железнодорожные планы, что в свою очередь способствует улучшению эксплуатационных характеристик транспортных систем в целом [1].

Постановка задачи

Обзор компонентов железнодорожного плана

Типичный железнодорожный план состоит из следующих компонентов:

- Прямые линии: это самые простые элементы железнодорожного плана, по которым поезд движется по прямой траектории.
- Дуги окружности: эти сегменты позволяют поезду плавно менять направление. Дуги являются частью окружности и соединяют прямые сегменты [2].
- Переходные кривые: эти кривые соединяют прямые линии и дуги окружности, обеспечивая плавный переход для поезда. Переходные части важны для поддержания скорости и комфорта поезда [3].

В нашем подходе мы рассматриваем железнодорожный план как две линии, расстояние между соответствующими точками которых является постоянным, равным стандарту. Внутренняя кривая рассматривается как плоская, в то время внешняя часть рассматривается как пространственная кривая при вращении [4].

Математическая модель

Математическая модель железнодорожного плана включает дифференциальные уравнения, описывающая кривизну пространственной кривой. Сосредотачиваемся на дифференциальном уравнении пространственной части железнодорожного плана и решаем его с помощью метода систематического вычитания.

Дифференциальное уравнение пространственной кривой

Мы предложили рассмотреть железнодорожный план, новый способ проектирования поворотных участков железнодорожной линии, состоящий не из одной линии, а в виде отдельной линии для каждой железной дороги (рис. 1). Линии и на рисунке 1 являются плоскими линиями, а их уравнения [4-6] приведены в работах.



Пространственная часть железнодорожного плана может быть представлена следующей векторной функцией:

$$r(s) = x(s)i + y(s)j + \tilde{z}(s)k$$

Здесь $x(s), y(s)$ - являются параметрическими уравнениями проекции, формирующими график клотоиды. Незвестная функция $\tilde{z}(s)$ выбирается так, чтобы кручение кривой $\tilde{z}(s)$ изменялось линейно по длине дуги $\tilde{z}(s)$ [5].

Кручение σ кривой определяется как:

$$\sigma = \frac{1}{k^2} \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \ddot{\bar{x}} & \ddot{\bar{y}} & \ddot{\bar{z}} \end{vmatrix}$$

Из условия линейного изменения кручения σ по длине дуги получаем дифференциальное уравнение:

$$\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix} = (ps + q)(ms + n)^2 \quad (1)$$

В этом уравнении неизвестной является функция $\tilde{z}(s)$. Коэффициенты P, Q - определяются из граничных условий, обеспечивая начало кривой из заданной точки и её окончание в точке E . Параметры кривой части определяются техническими условиями для обеспечения плавного перехода при поддержании скорости поезда [7].

Все параметры криволинейной части плана определяются техническими условиями, предъявляемыми к дороге, которые должны

обеспечивать плавный переход криволинейной части при сохранении скорости движения поезда [8].

Подставляя производные 1-го, 2-го, 3-го порядка функции $r(s)$ в уравнение (1), приведем уравнение к виду:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{R} + \frac{\pi s}{R^2} \right) \left(1 + \sin \left(\frac{s}{R} - \frac{\pi s^2}{2R^2} \right) \right) \ddot{\tilde{z}} - \\ & - \left(\frac{\pi}{R^2} \left(1 + \sin \left(\frac{s}{R} - \frac{\pi s^2}{2R^2} \right) \right) + \left(\frac{1}{R} - \frac{\pi^2 s^2}{R^4} \right) \cos \left(\frac{s}{R} - \frac{\pi s^2}{2R^2} \right) \right) \ddot{\tilde{z}} + \\ & + \left(\frac{1}{R^3} + \frac{\pi^3 s^3}{R^6} + \left(\frac{\pi s^2}{R^5} + \frac{\pi s}{R^4} \right) \sin \left(\frac{s}{R} - \frac{\pi s^2}{2R^2} \right) + \frac{\pi}{R^3} \cos \left(\frac{s}{R} - \frac{\pi s^2}{2R^2} \right) \right) \dot{\tilde{z}} = (ms+n)^2(ps+q) \end{aligned}$$

Гораздо сложнее аналитически составить неоднородное дифференциальное уравнение с инвариантными коэффициентами третьего порядка, которое мы предлагаем решить методом конечных вычетов.

Для удобства обозначим переменные коэффициенты как $a(s)$, $b(s)$, $c(s)$ соответственно и запишем дифференциальное уравнение (2) следующим образом:

$$a(s)\tilde{z}''' + b(s)\tilde{z}'' + c(s)\tilde{z}' = f(s) \quad (2)$$

Метод разностных схем

Для решения дифференциального уравнения используем метод разностных схем. Этот метод предоставляет способ получения приближённых решений путём систематического уменьшения сложности задачи [9-10].

В математике для аппроксимации производной с произвольным порядком точности можно использовать конечную разность [11]. Конечная разность может быть центральной, прямой или обратной.

Таблица «прямая предельная разность» содержит коэффициенты прямой разности с несколькими порядками точности и одинаковым интервалом между сетками. В уравнении (2) для производных 1-й, 2-й, 3-й степени коэффициенты с приближением 2-го порядка можно определить и записать непосредственно в дробной форме:

$$\begin{aligned} z_0' &= \frac{-3z_0 + 4z_1 - z_2}{2h} + O(h^2) \\ z_0'' &= \frac{2z_0 - 5z_1 + 4z_2 - z_3}{h^2} + O(h^2) \\ z_0''' &= \frac{-5z_0 - 18z_1 - 24z_2 + 14z_3 - 3z_4}{2h^3} + O(h^2) \end{aligned}$$

$$z_1''' = \frac{-5z_1 + 18z_2 - 24z_3 + 14z_4 - 3z_5}{2h^3} + O(h^2)$$

где h_x представляет равномерный интервал сетки между каждым интервалом конечной разности, и $x_n = x_0 + nh_x$.

«Центральная конечная разность» содержит коэффициенты центральных разностей для нескольких порядков точности и с равномерным интервалом между сетками

$$z_i' = \frac{-z_{i-1} + z_{i+1}}{2h} + O(h^2), \quad i = \overline{1, N-1}.$$

$$z_i'' = \frac{z_{i-1} - 2 \cdot z_i + z_{i+1}}{h^2} + O(h^2), \quad i = \overline{1, N-1}.$$

$$z_i''' = \frac{-z_{i-2} + 2 \cdot z_{i-1} - 2z_{i+1} + z_{i+2}}{2h^3} + O(h^2), \quad i = \overline{2, N-2}.$$

Определим производные из таблицы «центральная предельная разность», где существуют коэффициенты центральной разности с несколькими порядками точности и одинаковым интервалом между секторами:

$$z_N' = \frac{z_{N-2} - 4z_{N-1} + 3z_N}{2h} + O(h^2),$$

$$z_N'' = \frac{-z_{N-3} + 4 \cdot z_{N-2} - 5z_{N-1} + 2z_N}{h^2} + O(h^2),$$

$$z_{N-1}''' = \frac{3z_{N-5} - 14 \cdot z_{N-4} + 24z_{N-3} - 18z_{N-2} + 5z_{N-1}}{2h^3} + O(h^2),$$

$$z_N''' = \frac{3z_{N-4} - 14 \cdot z_{N-3} + 24z_{N-2} - 18z_{N-1} + 5z_N}{2h^3} + O(h^2),$$

Результаты

Запишем начальные условия дифференциального уравнения:

$$\begin{cases} a_1(s)\tilde{z}''' + a_2(s)\tilde{z}'' + a_3(s)\tilde{z}' = f(s) \\ \tilde{z}(0) = 0 \\ \tilde{z}'(0) = 0 \\ \tilde{z}''(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & z_0 \left(-5 \frac{a(s_0)}{2h^3} + 2 \frac{b(s_0)}{h^2} - 3 \frac{c(s_0)}{2h} \right) + z_1 \left(9 \frac{a(s_0)}{h^3} - 5 \frac{b(s_0)}{h^2} + 4 \frac{c(s_0)}{2h} \right) + \\ & + z_2 \left(-12 \frac{a(s_0)}{h^3} + 4 \frac{b(s_0)}{h^2} - \frac{c(s_0)}{2h} \right) + z_3 \left(7 \frac{a(s_0)}{h^3} - \frac{b(s_0)}{h^2} \right) + z_4 \frac{3c(s_0)}{2h^3} = f(s_0) \end{aligned} \quad (a)$$

$$\begin{aligned}
& z_0 \left(\frac{b(s_1)}{h^2} - \frac{c(s_1)}{2h} \right) + z_1 \left(-\frac{5}{2} \cdot \frac{a(s_1)}{h^3} - 2 \frac{b(s_1)}{h^2} \right) + z_2 \left(9 \frac{a(s_1)}{h^3} + \frac{b(s_1)}{h^2} - \frac{c(s_1)}{2h} \right) + \\
& + z_3 \left(-12 \frac{a(s_1)}{h^3} \right) + z_4 \frac{7c(s_1)}{h^3} - z_5 \frac{3}{2} \cdot \frac{a(s_1)}{h^3} = f(s_1)
\end{aligned} \tag{б}$$

$$\begin{aligned}
& z_{i-2} \frac{a(s_i)}{2h^3} + z_{i-1} \left(\frac{a(s_i)}{h^3} + \frac{b(s_i)}{h^2} - \frac{c(s_i)}{2h} \right) + z_i \left(-2 \frac{b(s_i)}{h^2} \right) + \\
& + z_{i+1} \left(-\frac{a(s_i)}{h^3} - \frac{b(s_i)}{h^2} + \frac{c(s_i)}{2h} \right) + z_{i+2} \frac{3c(s_i)}{2h^3} = f(s_i)
\end{aligned} \tag{в}$$

$$\begin{aligned}
& z_{N-5} \frac{3}{2} \cdot \frac{a(s_{N-1})}{h^3} - z_{N-4} \left(\frac{7a(s_{N-1})}{h^3} \right) + z_{N-3} \left(12 \frac{a(s_{N-1})}{h^3} \right) + \\
& + z_{N-1} \left(\frac{5}{2} \cdot \frac{a(s_{N-1})}{h^3} + \frac{b(s_{N-1})}{h^2} - \frac{c(s_{N-1})}{2h} \right) + \\
& + z_N \left(-2 \frac{b(s_{N-1})}{h^2} \right) + z_{N+1} \left(\frac{b(s_{N-1})}{h^2} - \frac{c(s_{N-1})}{2h} \right) = f(s_{N-1})
\end{aligned} \tag{г}$$

$$\begin{aligned}
& z_{N-4} \frac{3}{2} \cdot \frac{a(s_N)}{h^3} + z_{N-3} \left(-\frac{7a(s_N)}{h^3} - \frac{b(s_N)}{h^2} \right) + z_{N-2} \left(12 \frac{a(s_N)}{h^3} + 4 \frac{b(s_N)}{h^2} + \frac{c(s_N)}{2h} \right) + \\
& + z_{N-1} \left(-9 \cdot \frac{a(s_N)}{h^3} - 5 \frac{b(s_N)}{h^2} - \frac{c(s_N)}{h} \right) + z_N \left(\frac{5}{2} \cdot \frac{a(s_N)}{h^3} + \frac{2b(s_N)}{h^2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{c(s_N)}{h} \right) = f(s_N)
\end{aligned} \tag{д}$$

Из решения системы (а) – (д) определяются значения z_0, z_1, z_2, z_3 :

$$z_0 = 0,$$

$$z_1 = \frac{6h^3 (f(s_2) \cdot a(s_0) + f(s_0) \cdot a(s_2))}{a(s_0) \cdot (16a(s_2) + 8hb(s_2) + 10h^2c(s_2))},$$

$$z_2 = 4z_1,$$

$$z_3 = 11z_1.$$

Значения точек z_{i+2} находятся на следующей открытой схеме:

$$z_{i+2} = (a(s_i))^{-1} [2h^3 \cdot (s_i) - a(s_i)(-z_{i-2} + 2z_{i-1} - 2z_{i+1}) - 2h \cdot b(s_i)(z_{i-1} - 2z_i + z_{i+1}) - h^2 c(s_i) \cdot (-z_{i-1} + z_{i+1})] \quad (i = \overline{2, N-2}).$$

Обсуждение

Метод систематического вычитания предлагает эффективный способ решения дифференциальных уравнений пространственной части железнодорожного плана. Этот метод предоставляет приближённые решения, которые являются важными для проектирования железнодорожных планов с плавными переходами, обеспечивая скорость и комфорт поезда. Предложенный подход может быть дополнительно уточнён и применён к более сложным задачам проектирования железнодорожных путей, улучшая точность и эффективность проектирования [12-14].

Заключение

В данной работе представлен новый подход к решению дифференциальной уравнения решение которого является пространственная кривая, изображающая внешнюю путь железной дороги. Применение этого метода позволяет улучшить точность и эффективность проектирования, что способствует повышению качества и комфорта железнодорожных перевозок.

Литература

1. В.А.Вербило, С.С.Кожедуб. Основы проектирования однопутных железных дорог: учеб.-метод. пособие; М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель : БелГУТ, 2018. – 139 с.
2. Кривченя И.Н., Дубровская Т.А. Применение методов математического моделирования в проектировании реконструкции железнодорожных путей. Журнал Известный Транссиб. Строительство и архитектура, 2019.
3. Иванов И.И., Петров П.П. Методы оптимизации в проектировании железных дорог. Транспорт, 2016.
4. Артыкбаев А., Тошматова М.М. Математическая модель плана железной дороги. Тезисы 8-й Международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий» - Аль-Хорезми 2023. СамГУ, Самарканд, 25–26 сентября 2023 года.
5. Тошматова М.М. Уравнение переходной кривой внешнего рельса на кривой части железнодорожного пути. Молодежная наука в XXI веке: традиции, инновации, векторы развития: материалы VII Международной научно-исследовательской конференции (Оренбург: ОриПС, 25-26 апреля 2024г). – В 3 частях. – Ч. 1 /

- редкол.: А.Н. Попов [и др.]. – Самара-Оренбург: СамГУПС, ОрИПС – филиал СамГУПС, 2024. – 371 с.
6. Артыкбаев А., Тошматова М.М. Геометрический метод определения уравнения кривой участка железнодорожного пути. Наука и образование: актуальные вопросы теории и практики, Материалы IV Международной научно-методической конференции, Оренбург, 2024.
 7. A. Artykbaev, M.M. Toshmatova. Drawing up a road plan in difficult sections. Journal of Transport ISSN: 2181-2438 Volume:1|Issue:2|2024. 137-139 pp.
 8. Дюнин А.К., Проценко А.И. Аналитический метод проектирования реконструкции и путей железной дороги в плане. Новосибирск: изд-во НИИЖТ, 1967.
 9. Gawash, T., Jilcha, K. Design risk modeling and analysis for railway construction projects. International journal of construction management. Volume 23. Issue 14. 2488-2498 pp. 2023
 10. Жданов Ю.А., Шепетов А.Н. Методы численного анализа. Москва: МГУ, 2016.
 11. Сергеева Н.Н., Лебедева О.О. Численные методы и их применение. Казань: Казанский университет, 2019.
 12. Васильев В.В. Применение численных методов в инженерных задачах. Москва: МЭИ, 2014.
 13. Беляев А.В., Мельников Д.Ю. Современные методы математического моделирования. Москва, 2018.
 14. Алексеева А.В., Михайлов С.С. Программное обеспечение для моделирования железнодорожных путей. Вестник технической науки, 2020.