

Chegaralanmagan qavariq to‘plamda qochish masalasi

Ibroximov Baxtiyor, Andijon davlat universiteti, "Amaliy matematika va mexanika"

Kafedra tayanch doktoranti, Tel [+998950613830](tel:+998950613830), e-mail:

ibroximovbaxtiyor1@gmail.com

Annotatsiya: Ushbu maqolada ko‘p quvlovchi va bir qochuvchili differensial o‘yin o‘rganilgan. Agar quvlovchilardan birining holati qochuvchining holati bilan ustma-ust tushsa o‘yin tugagan hisoblanadi. Quvlovchilar o‘yinni mumkin qadar tez yakunlashga xarakat qiladi. Qochuvchining maqsadi tutilishdan qochish yoki o‘yin vaqtini kechiktirish. Biz kafolatlangan qochish va quvish vaqti uchun qochuvchiga strategiya quramiz.

Kalit so‘zlar: Differensial o‘yin, quvlovchilar, qochuvchi, chegaralanmagan qavariq to‘plam, qochish masalasi.

Задача уклонение в неограниченном выпуклом множестве

Иброхимов Бахтиёр, Андижанский государственный университет, аспирант кафедры «Прикладная математика и механика», Тел: [+998950613830](tel:+998950613830), e-mail:

ibroximovbaxtiyor1@gmail.com

Аннотация: В данной статье рассматривается дифференциальная игра с участием нескольких преследователей и одного убегающего. Игроки движутся по π - стратегии. Игра заканчивается, когда положение одного из преследователей совпадает с положением убегающего. Преследователи стремятся завершить игру как можно быстрее. Цель убегающего - избежать поимки или затянуть время игры. Мы построим стратегии для игроков, которые гарантируют время уклонения или поимки.

Ключевые слова: Дифференциальная игра, преследователи, убегающий, неограниченное выпуклое множество, задача уклонения.

The evasion problem in an unbounded convex set

Ibroximov Baxtiyor, Andijan State University, PhD student of the Department of "Applied mathematics and mechanics" Tel [+998950613830](tel:+998950613830), e-mail:

ibroximovbaxtiyor1@gmail.com

Annotation: This article examines a differential game involving multiple pursuers and one evader. The players move according to a π -strategy. The game ends when the position of one of the pursuers coincides with the position of the evader.

The pursuers aim to finish the game as quickly as possible, while the evader's goal is to avoid capture or delay the time of capture. We develop strategies for the players to guarantee the evasion or capture time.

Keywords: Differential game, pursuers, evader, unbounded convex set, evasion problem.

Kirish. Yigirmanchi asrning o`rtalarida, Ayzeks tomonidan ziddiyatli muammolarni hal etish bilan shug`ullanuvchi “Differensial o`yinlar” nomli tadqiqot sohasiga asos solindi. Shundan so`ng sohaga doir fundamental natijalar [3, 4, 5] kabi ishlarda chop qilina boshladi. So`nggi paytlarda differensial o`yinlar nazariyasi sohasida asosiy e`tibor o`yinchilarning boshqaruv funksiyalari geometrik, integral yoki aralash chegaralanishga ega bo`lgan holatlarni o`rganishga qaratilgan. Biz ushbu maqolada ko`p quvlovchi va bir qochuvchili differensial o`yinni o`rgandik.

Agar quvlovchilardan birining holati qochuvchining holati bilan ustma-ust tushsa o`yin tugagan hisoblanadi. Quvlovchilar o`yinni mumkin qadar tez yakunlashga xarakat qiladi. Qochuvchining maqsadi tutilishdan qochish yoki o`yin vaqtini kechiktirish. Biz kafolatlangan qochish vaqti uchun qochuvchiga strategiya quramiz.

Asosiy qism. Har bir $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ uchun x_{i0} va y_0 nuqtalarni tutashtiruvchi kesmaga o`rta perpendikular to`g`ri chiziq tenglamasi:

$$\Gamma_i: (z, y_0 - x_{i0}) = \left(\frac{y_0 + x_{i0}}{2}, y_0 - x_{i0} \right)$$

bo`ladi. Bu to`g`ri chiziq bilan chegaralangan va  $y_0$  ni o`z ichiga oluvchi X_i yarim tekislik:

$$(z, y_0 - x_{i0}) \geq \frac{1}{2} (y_0^2 - x_{i0}^2)$$

tengsizlik bilan ifodalanadi. M berilgan chegaralanmagan qavariq to`plam bo`lsin,

$$A = X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n \cap M, A \neq \emptyset, n \geq 2.$$

Bizga A to`plamda quyidagi differensial o`yin berilgan bo`lsin:

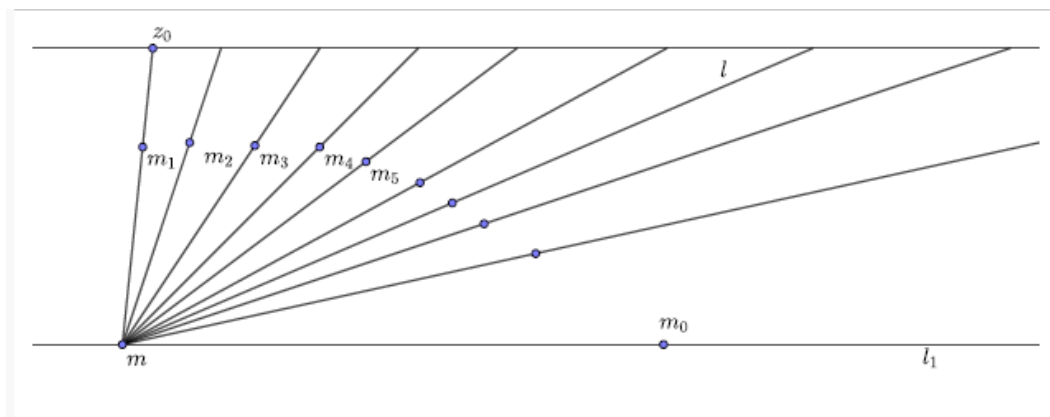
$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= u_i, \quad |u_i| \leq 1, \quad x_i(0) = x_{i0}, \quad x_{i0} \neq y_0. \\ \dot{y} &= v, \quad |v| \leq 1, \quad y(0) = y_0. \end{aligned} \quad (1)$$

Teorema 1.1. Agar A to`plam chegaralanmagan bo`lsa u holda 1 shartlar asosida berilgan differensial o`yinda qochib ketish mumkin.

Isbot. Teoremeni isbotlash uchun 2 ta holni qaraymiz: 1-hol. M to'plam biror l to'g'ri chiziqni o'z ichiga olsin.

1-lemma. Agar biror l to'g'ri chiziq M to'plamga tegishli bo'lsa, u holda M to'plam yoki tekislik, yoki yarim tekislik, yoki tasma bo'ladi.

1-lemmaning isboti. l to'g'ri chiziq M to'plamga tegishli bo'lsin. Ixtiyoriy $m \in M$ nuqta olaylik va m orqali l ga parallel l_1 to'g'ri chiziq o'tkazaylik.



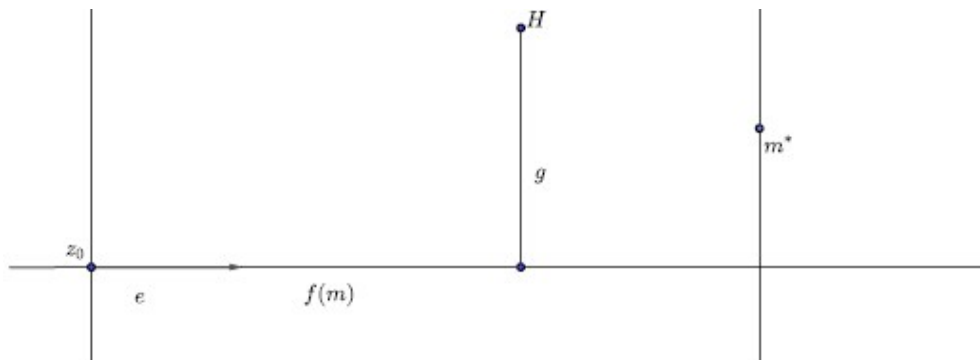
1-rasm

l to'g'ri chiziqning ixtiyoriy z_0 nuqtasi bilan m ni tutashtiruvchi kesma yana M ga tegishli bo'ladi, chunki M – qavariq to'plam. Bundan l va l_1 to'g'ri chiziqlar orasidagi tasma M ga tegishli ekani kelib chiqadi. l_1 to'g'ri chiziqning ixtiyoriy m_0 nuqtasi bu tasmaning limit nuqtasi ekani va M to'plam yopiq ekanidan $m_0 \in M$ ekani kelib chiqadi.

Shunday qilib l_1 to'g'ri chiziq ham, l va l_1 lar orasidagi tasma ham M da yotar ekan. Endi l ga perpendikulyar biror e birlik vektor olaylik va

$$f(m) = (m - z_0, e), m \in M,$$

funksiyani qaraylik.



2-rasm.

1. Agar $f(m)$ yuqoridan chegaralangan bo'lsa, u holda biror $m_i \in M$ uchun

$$\max_{m \in M} f(m) = f(m_i),$$

bo'ladi. Yuqoridagi mulohazalarga ko'ra m_i orqali o'tuvchi l_i to'g'ri chiziq bilan l orasidagi tasma M da yotadi. m_i ning aniqlanishiga ko'ra $f(m) > f(m_i)$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi hech bir m nuqta M da yotmaydi.

2. Agar

$$\max_{m \in M} f(m) = +\infty$$

bo'lsa, u holda ravshanki M to'plam $(m - z_0, e) \geq 0$ yarim tekislikni o'z ichiga oladi.

3. Agar

$$\min_{m \in M} f(m) > -\infty$$

bo'lsa, u holda biror $m_i \in M$ uchun

$$\min_{m \in M} f(m) = f(m_i)$$

bo'ladi, va M to'plam ushbu i tasmani o'z ichiga oladi.

Endi

$$\min_{m \in M} f(m) = -\infty$$

bo'lsin. U holda M to'plam ushbu $\{m \mid f(m) \leq 0, m \in M\}$ yarim tekislikni o'z ichiga oladi.

Yuqoridagi mulohazalardan quyidagilar kelib chiqadi.

1. Agar

$$\inf_{m \in M} f(m) = -\infty, m_i \in M, f(m_i) = +\infty$$

bo'lsa, u holda M to'plam tekislik bo'ladi.

2. Agar

$$\inf_{m \in M} f(m) > -\infty, m_i \in M, f(m_i) = +\infty$$

yoki

$$\inf_{m \in M} f(m) = -\infty, m_i \in M, f(m_i) < +\infty$$

bo'lsa, u holda M to'plam yarim tekislik bo'ladi.

3. Agar

$$-\infty < \min_{m \in M} f(m), \max_{m \in M} f(m) < +\infty$$

bo'lsa, M to'plam tasma bo'ladi.

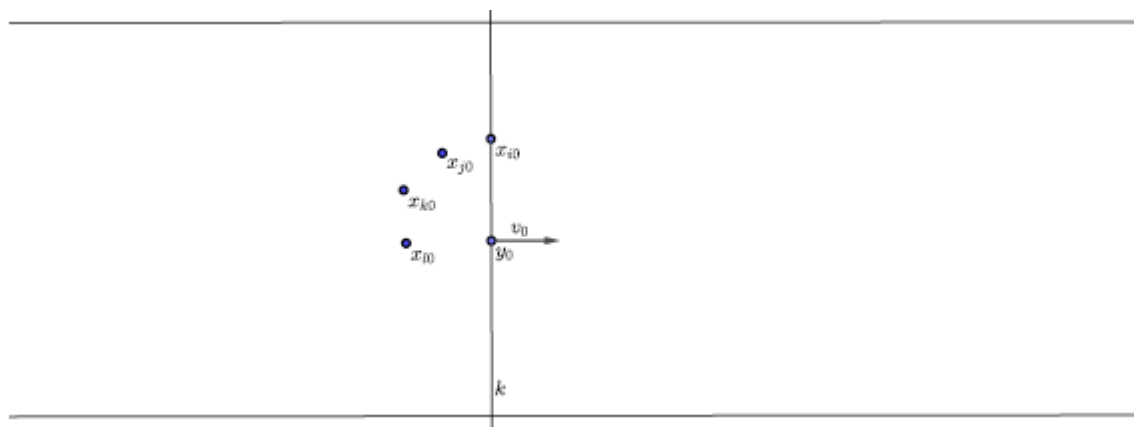
Lemma isbotlandi.

Endi Teoremani isbotiga o'tamiz.

1-hol. M to'plam biror to'g'ri chiziqni o'z ichiga oladi. Yuqoridagi lemmaga ko'ra M yoki tekislik, yoki yarim tekislik, yoki tasma bo'lishi mumkin.

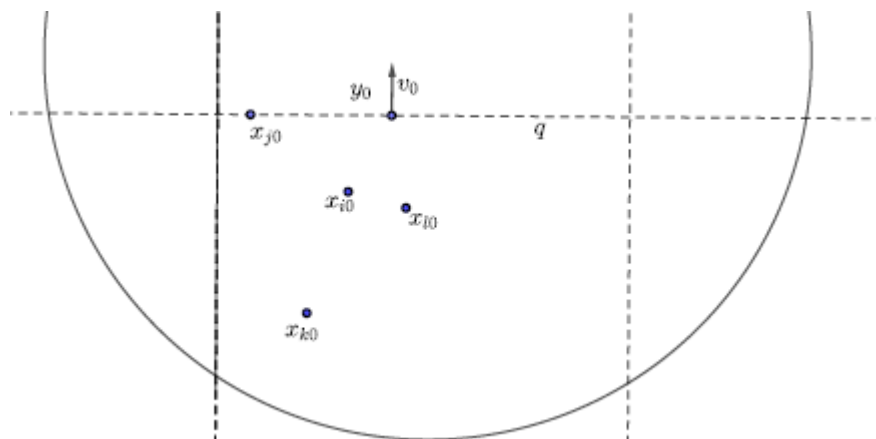
a) M tekislik bo'lgan hol Pshenichniy [1] tomonidan o'rganilgan. Shuning uchun bu holni qaramaymiz.

b) M yarim tekislik yoki tasma bo'lsin. l to'g'ri chiziqqa perpendikulyarlar va y_0 nuqtadan o'tuvchi chiziqni k to'g'ri chiziq deylik. Quvlovchilarning barchasi k to'g'ri chiziqqa nisbatan bitta yarim tekislikda joylashsa, A to'plam chegaralanmagan bo'ladi. Bu holda qochuvchi l to'g'ri chiziqqa parallel $\hat{v}_0 \vee \hat{v}_1$ birlik vektor orqali o'yinni davom ettirsa, $\forall i, n < \infty$ da $\hat{v}_i, e_i \geq 0$ tengsizlik bajariladi. Qochuvchi ixtiyoriy t vaqtda $v(t) = v_0, t > 0, \hat{v}_0 \vee \hat{v}_1$ boshqaruv bilan xarakat qilsin.



3-rasm.

2-hol. M to'plam biror to'g'ri chiziqni o'z ichiga olmasin. M to'plamni bitta nuqtada kesuvchi parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazaylik. Bu parallel to'g'ri chiziqlarga perpendikular va y_0 nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqni q deb belgilaylik. Barcha quvlovchilar q to'g'ri chiziqdan bitta yarim tekislikda joylashsin. Quvlovchilar q to'g'ri chiziq bilan M to'plamning kesishidan xosil bo'lgan chekli yuzaga ega bo'lgan qismida joylashsin.



4-rasm.

Bu holda A to'plam chegaralanmagan bo'ladi. Bu holda qochuvchi q to'g'ri chiziqqa perpendikular $\hat{v}_0 \vee \hat{1}$ birlik vektor orqali o'yinni davom ettirsa, $\forall i \in n$, $n < \infty$ da $\hat{v}_0 \vee \hat{1}$ tengsizlik bajariladi. Yuqoridagi hollarda qochuvchi ixtiyoriy t vaqtda $v(t) = v_0$, $t > 0$, $\hat{v}_0 \vee \hat{1}$ v_0 boshqaruv bilan xarakat qilsin. x_i quvlovchi va qochuvchi orasidagi masofani baxolaylik:

$$\hat{v}_0 \vee y(t) - x_i(t) \vee \hat{v}_0 \vee y_0 + \int_0^t v(s) ds - x_{i0} - \int_0^t u_i(s) ds \vee \hat{v}_0$$

$$\hat{v}_0 \vee y_0 + \int_0^t v_0(s) ds - x_{i0} - \int_0^t \vee u_i(s) ds \vee \hat{v}_0$$

$$\geq \vee y_0 - x_{i0} + v_0 t \vee - \int_0^t \vee u_i(s) ds \vee \geq \vee y_0 - x_{i0} + v_0 t \vee - \int_0^t \vee u_i(s) \vee ds$$

$$\geq \vee y_0 - x_{i0} + v_0 t \vee - t \geq \sqrt{\hat{v}_0 \hat{v}_0}$$

$(v_0, e_i) \geq 0$ ifodaga ko'ra $(y_0 - x_{i0}, v_0) \geq 0$, demak

$$\sqrt{\hat{v}_0 \hat{v}_0}$$

$\hat{v}_0$, $t > 0$ ekanligi ravshan. Yuqoridagi tengsizliklardan $\sqrt{\hat{v}_0 \hat{v}_0}$ ekanligi kelib chiqadi.

Yuqoridagi tengsizliklardan ixtiyoriy t vaqtda $\hat{v}_0 \vee y(t) - x_i(t) \vee \hat{v}_0 > 0$, $n < \infty$ ekanligi kelib chiqdi. Demak ixtiyoriy t vaqtda $t > 0$ da $y(t) \neq x_i(t)$ ekan. A to'plam chegaralanmagan bo'lsa 1 shartlar asosida berilgan differensial o'yinda qochib ketish mumkin.

Xulosa. Ushbu maqolada chegaralanmagan qavariq to'plamda nta quvlovchi va bitta

qochuvchining qochish differensial o`yini haqida yozilgan. Maqolaning asosiy natijasi sifatida qochuvchi ixtiyoriy vaqtda qochib yura olishi mumkunligi ko`rsatilgan. Maqolada bo`lishi mumkin bo`lgan barcha hollar yoritilgan.

Foydalanilgan adabiyotlar ro`yxati:

- 1) Ibragimov G.I., Ferrara M., Ruziboev M., Pansera B.A. (2021). Linear evasion differential game of one evader and several pursuers with integral constraints. International Journal of Game Theory. 50:729–750.
- 2) Ibragimov G.I. and Risman M.H. (2010). Pursuit and Evasion Differential game in Hilbert space. International Game Theory Review. 12(3): 239–251.
- 3) Makkapati V.R., Tsiotras P. (2019). Optimal evading strategies and task allocation in multi-player pursuit-evasion problems. Dyn Games Appl 9, 1168–1187
- 4) Ramana M.V., Kothari M. (2017). Pursuit-Evasion Games of High Speed Evader. J Intell Robot Syst 85, 293–306.
- 5) Kuchkarov, A.Sh, Ibragimov, G., Khakestari, M.: On a Linear Differential Game of Optimal Approach of Many Pursuers with One Evader. Journal of Dynamical and Control Systems, 19(1): 1-15