

UCH O'LCHAMLI FAZODAGI MUNTAZAM VA YARIM MUNTAZAM KO'PYOQLIKLARNING MAVJUDLIGI HAQIDA

Xolboyev A. G'., Mexmonov O., Oqmurodov J.

Nizomiy nomidagi TDPU dotsenti v.b., Nizomiy nomidagi TDPU 2-kurs
magistranti, Nizomiy nomidagi TDPU 4-kurs talabasi

azamatholboyev@gmail.com

Annotatsiya. Maqola uch o'lchamli Yevklid fazodagi muntazam va yarim muntazam ko'pyoqliklarning mavjudligi va ularning tuzilishiga bag'ishlangan. Kiritilgan ta'rif yordamida uch o'chamli fazoda 5 ta muntazam ko'pyoqlik va 13 ta yarim muntazam ko'pyoqlik mavjudligi isbotlandi.

Kalit so'zlar: qavariq ko'pyoqlik, muntazam ko'pburchak, muntazam ko'pyoqlik, uch, qirra, yoq, yarim muntazam ko'pyoqlik.

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПРАВИЛЬНЫХ И ПОЛУПРАВИЛЬНЫХ МНОГОГРАННИКОВ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Аннотация. Статья посвящена существованию правильных и полуправильных многогранников в трехмерном евклидовом пространстве и их строению. С помощью данного определения было доказано, что в трехмерном пространстве существует 5 правильных многогранников и 13 полуправильных многогранников.

Ключевые слова: выпуклый многогранник, правильный многоугольник, правильный многогранник, вершина, ребро, гран, полуправильный многогранник.

ON THE EXISTENCE OF REGULAR AND SEMIREGULAR POLYHEDRONS IN THREE-DIMENSIONAL SPACE

Annotation. The article is devoted to the existence of regular and semiregular polyhedrons in three-dimensional Euclidean space and their structure.

Using this definition, it was proven that in three-dimensional space there are 5 regular polyhedron and 13 semiregular polyhedron.

Key words: convex polyhedron, regular polygon, regular polyhedron, vertex, edge, face, semiregular polyhedron.

Kirish. Uch o'lchamli R^3 Yevklid fazosida barcha nuqtalari tekislikka tegishli bo'lmagan qavariq, chegaralangan M jism berilgan bo'lsin. ∂M – M jismning chegarasi bo'lsin.

1-ta'rif. Agar M qavariq jismning chegarasi (ya'ni ∂M) chekli sondagi qavariq ko'pburchaklar birlashmasidan iborat bo'lsa, u qavariq ko'pyoqlik deyiladi.

∂M chegarani tashkil qiluvchi ko'pburchaklarning ham biri M ko'pyoqlikning yog'i, yoqlarning umumiy tomonlari qavariq ko'pyoqlikning qirralari, qirralarining umumiy uchlari ko'pyoqning uchi deyiladi [1].

Qavariq ko'pyoqliklar quyidagi xossalarga ega.

1. M qavariq ko'pyoqlikning har bir yog'i bilan aniqlanadigan Π tekislikda M ning ichki nuqtasi bo'lmaydi.

2. M qavariq ko'pyoqlikning barcha nuqtalari uning biror yog'i yotgan tekislik bilan aniqlanadigan yopiq yarim fazolardan biriga to'la tegishlidir [3].

1-teorema. Har qanday qavariq ko'pyoqlik o'zining har bir yog'i bilan aniqlangan barcha yarimfazolar kesishmasidan iborat bo'ladi.

Ba'zi kitoblarda yuqoridagi teorema qavariq ko'pyoqlikning ta'rifi sifatida beriladi.

2-ta'rif. Agar M qavariq ko'pyoqlikning barcha yoqlari kongurent muntazam ko'pburchaklardan iborat va hamma ko'p yoqli burchaklari ham kongurent bo'lsa, M muntazam ko'pyoqlik deyiladi [4].

Ravshanki, ko'pyoqlikning har bir uchidan kamida uchta yog'i o'tadi va shu uchdagi barcha yassi burchaklarning yig'indisi 360° dan kichik bo'ladi.

Bundan quyidagi fakt kelib chiqadi. M muntazam ko'pyoqlikning yog'i muntazam uchburchak, to'rtburchak yoki beshburchak bo'lishi mumkin. Ko'pyoqlikning uchidagi yoqlar soni 3 ta, 4 ta yoki 5 ta bo'lishi mumkin.

Aytaylik ixtiyoriy M muntazam ko'pyoqlik berilgan bo'lsin. Bu muntazam ko'pyoqlining uchlarining soni U ta, qirralari soni Q ta va tomonlari soni Y taga teng bo'lsin. Qavariq ko'pyoqliklarda o'rinli bo'lgan Eyler teoremasi muntazam ko'pyoqliklar uchun ham o'rinli bo'ladi [2].

2-teorema. (Eyler teoremasi). Har qanday M muntazam ko'pyoqlik uchun $U - Q + Y = 2$ formula o'rinli bo'ladi.

Masalaning qo'yilishi. Endi, uch o'lchamli R^3 Yevklid fazosida nechta muntazam ko'pyoqlik mavjud, ularning tuzilishi qanday bo'ladi degan savollarga javob beramiz.

Aytaylik M muntazam ko'pyoqlik yog'ining qirralari soni m ta, ko'pyoqlikning uchidan n ta qirra chiqsin. Bundan $3 \leq m \leq 5, 3 \leq n \leq 5$ munosabatni ayta olamiz.

Ko'pyoqlikning U ta uchining har biridan n tadan qirra chiqishini, har bir qirra ikkita uchni tutashtirishini hisobga olib $Q = \frac{nU}{2}$ yoki $U = \frac{2Q}{n}$ tengliklarni yoza olamiz. Bundan tashqari ko'pyoqliklarning har bir qirrasida ularning ikkita yog'i kisishadi. Demak $Q = \frac{mY}{2}$ yoki $Y = \frac{2Q}{m}$ tengliklar o'rinli.

Topilgan $U = \frac{2Q}{n}$ va $Y = \frac{2Q}{m}$ larni Eyler teoremasi shartiga qo'yib,

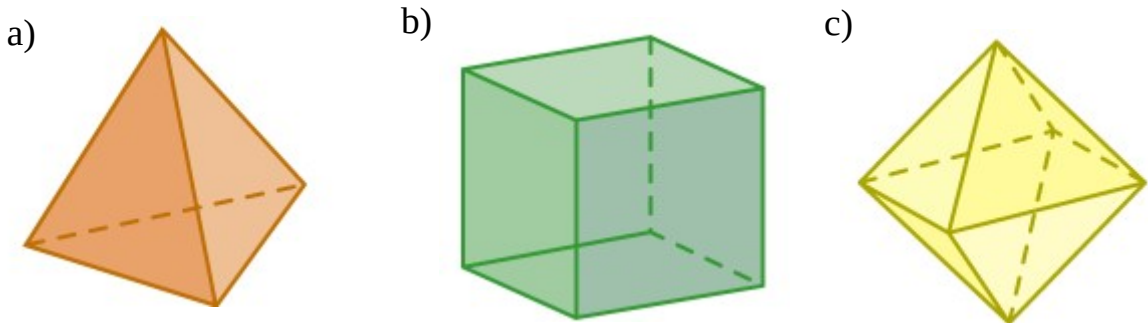
$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{Q} + \frac{1}{2}$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglamani $3 \leq m \leq 5, 3 \leq n \leq 5$ shart bilan yechamiz. Tenglamani qanoatlantiruvchi m, n, U, Q, Y natural qiymatlarni topamiz.

1. $m=3, n=3$ bo'lganda $Q=6, U=4, Y=4$ bo'ladi. Bu muntazam ko'pyoqlik tetraedr (to'rtyoq) deyiladi (1.a-chizma).

2. $m=4, n=3$ bo'lganda $Q=12, U=8, Y=6$ bo'ladi. Bu muntazam ko'pyoqlik kub (oltiyoq) deyiladi (1.b-chizma).

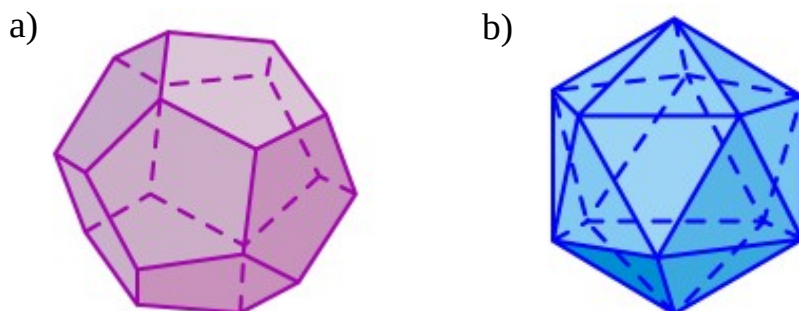
3. $m=3, n=4$ bo'lganda $Q=12, U=6, Y=8$ bo'ladi. Bu muntazam ko'pyoqlik oktaedr (sakkizyoq) deyiladi (1.c-chizma).



1-chizma.

4. $m=5, n=3$ bo'lganda $Q=30, U=20, Y=12$ bo'ladi. Bu muntazam ko'pyoqlik dodekaedr (o'n ikkiyoq) deyiladi (2.a-chizma).

5. $m=3, n=5$ bo'lganda $Q=30, U=12, Y=20$ bo'ladi. Bu muntazam ko'pyoqlik esa ikosaedr (yigirmayoq) deyiladi (2.b-chizma).



2-chizma.

R^3 fazodagi muntazam ko'pyoqliklar Pluton jismlari deb ham nomlanadi.

Asosiy natijalar. Agar muntazam ko'pyoqlik ta'rifidagi ko'pyoqlikning yoqlar kongurent muntazam ko'pburchak bo'lishi sharti o'rniga yoqlari kongurent bo'lgan bir nechta muntazam ko'pburchak bo'lsin deb shart qo'yilsa, bunday ko'pyoqliklar yarim muntazam ko'pyoqliklar deyiladi. R^3 fazodagi yarim muntazam ko'pyoqliklar Arximed jismlari deb nomlanadi. Bunday ko'pyoqliklar 13 ta ekanligini birinchi bo'lib Arximed va shogirdlari topishgan [5], [6], [7].

Keling, yarim muntazam ko'pyoqliklarni ham muntazam ko'pyoqliklarni topganimiz kabi ta'rif bo'yicha topaylik. Aytaylik M yarim muntazam ko'pyoqlik

uchlarining soni U ta, qirralari soni Q ta va tomonlari soni Y taga teng bo'lsin. Ko'pyoqlikning Y ta yog'i ikki xil $Y_1, Y_2, Y \nless Y_1+Y_2$ tadan muntazam ko'pburchaklardan yoki uch xil $Y_1, Y_2, Y_3, Y \nless Y_1+Y_2+Y_3$ tadan muntazam ko'pburchaklardan iborat bo'lishi mumkin.

Yarim muntazam ko'pyoqlik yog'ining qirralari soni m_1, m_2, m_3 (ular $m_1 < m_2 < m_3$ shartni qanoatlantirsin) tadan, ko'pyoqlikning uchidan n ta qirra chiqsin. Ular uchun $m_1 \geq 3, 3 \leq n \leq 5$ munosabat o'rinli bo'ladi. Aytaylik M yarim muntazam ko'pyoqlikning har bir uchida n_1 ta yoqlari m_1 – burchak, n_2 ta yoqlari m_2 – burchak va n_3 ta yoqlari m_3 – burchak joylashgan bo'lsin. Yuqoridagi belgilashlar quyidagi shartlarni qanoatlantiradi

$$\begin{aligned} nU &= 2Q, \\ m_1 Y_1 + m_2 Y_2 + m_3 Y_3 &= 2Q, \\ \frac{U n_1}{m_1} \nless Y_1, \frac{U n_2}{m_2} \nless Y_2, \frac{U n_3}{m_3} \nless Y_3, \\ Y \nless Y_1 + Y_2 + Y_3, \\ n \nless n_1 + n_2 + n_3. \end{aligned}$$

Arximed jismlari ham Eyler teoremasini qanoatlantiradi. Yuqoridagi tengliklardan foydalanib Eyler tenglamasidan quyidagi tenglik kelib chiqadi

$$1 - \frac{n}{2} + \frac{n_1}{m_1} + \frac{n_2}{m_2} + \frac{n_3}{m_3} = \frac{2}{U}$$

Yuqoridagi tenglamani $n \nless n_1 + n_2 + n_3, m_1 < m_2 < m_3, m_1 \geq 3, 3 \leq n \leq 5$ shartlar bilan yechamiz.

Masalan, $n_1 = 1, n_2 = 2, m_1 = 3, m_2 = 6$ bo'lganda $n = 3, U = 12, Y_1 = 4, Y_2 = 4, Q = 18$ ekanligi kelib chiqadi. Bu kesilgan tetraedr bo'ladi.

Agar $n_1 = 2, n_2 = 2, m_1 = 3, m_2 = 5$ bo'lsa $n = 4, U = 30, Y_1 = 20, Y_2 = 12, Q = 60$ bo'lib, bu esa ikosadodekaedr bo'ladi.

Agar $n_1 = 1, n_2 = 2, n_3 = 1, m_1 = 3, m_2 = 4, m_3 = 5$ bo'lsa $n = 4, U = 60, Y_1 = 20, Y_2 = 30, Y_3 = 12, Q = 120$ bo'lgan yarim muntazam ko'pyoqlik romboikosadodekaedr bo'ladi.

3-teorema. Ushbu

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{n}{2} + \frac{n_1}{m_1} + \frac{n_2}{m_2} + \frac{n_3}{m_3} = \frac{2}{U} \\ n \nmid n_1 + n_2 + n_3, 3 \leq n \leq 5 \\ m_1 < m_2 < m_3, m_1 \geq 3 \\ \frac{U n_1}{m_1} \nmid Y_1, \frac{U n_2}{m_2} \nmid Y_2, \frac{U n_3}{m_3} \nmid Y_3 \end{array} \right.$$

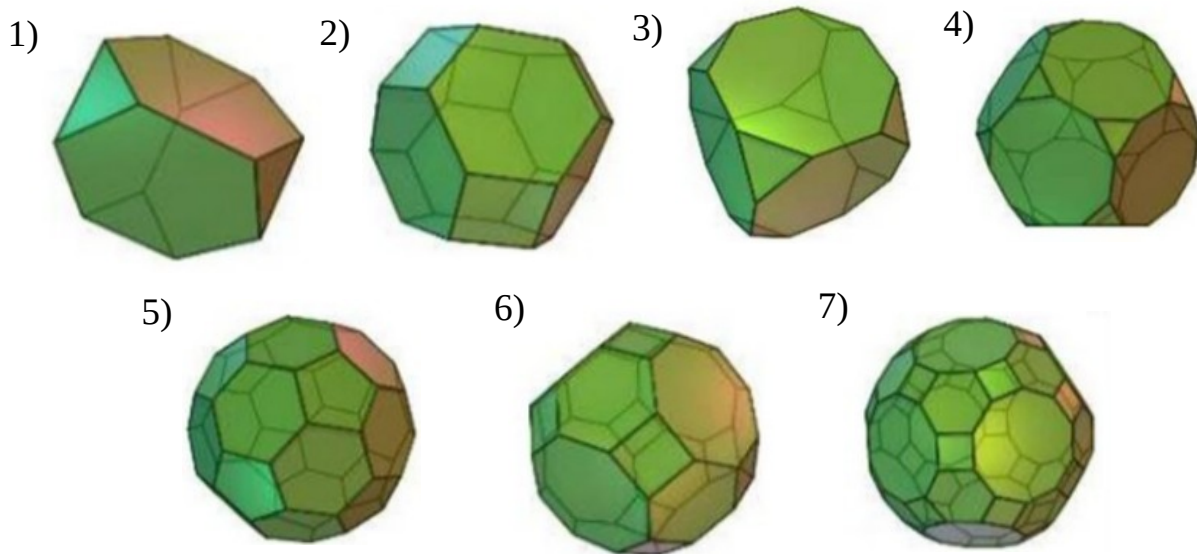
tenglamalar sistemasi 13 ta yechimga ega va har bir yechim bittadan yarim muntazam ko'pyoqliklarni ifodalaydi.

Isbot. Sistemani $n=3, n=4, n=5$ bo'lgan qiymatlarda alohida yechib quyidagi yechimlarni topamiz.

$n=3$ bo'lganda yettita yechimga ega bo'lamiz.

1. $n_1=1, n_2=2, m_1=3, m_2=6, U=12, Y_1=4, Y_2=4, Q=18$ – kesilgan tetraedr.

2. $n_1=1, n_2=2, m_1=4, m_2=6, U=24, Y_1=6, Y_2=8, Q=36$ – kesilgan oktaedr.



3-chizma.

3. $n_1=1, n_2=2, m_1=3, m_2=8, U=24, Y_1=8, Y_2=6, Q=36$ – kesilgan kub.

4. $n_1=1, n_2=2, m_1=3, m_2=10, U=60, Y_1=20, Y_2=12, Q=90$ – kesilgan dodekaedr.

5. $n_1=1, n_2=2, m_1=5, m_2=6, U=60, Y_1=12, Y_2=20, Q=90$ – kesilgan ikosaedr.

6. $n_1=1, n_2=1, n_3=1, m_1=4, m_2=6, m_3=8, U=48, Y_1=12, Y_2=8, Y_3=6, Q=72$ –

kesilgan kuboktaedr.

7. $n_1=1, n_2=1, n_3=1, m_1=4, m_2=6, m_3=10, U=120, Y_1=30, Y_2=20, Y_3=12, Q=180$ – kesilgan ikosadodekaedr.

$n=4$ bo'lganda to'rtta yechimga ega bo'lamiz.

1. $n_1=2, n_2=2, m_1=3, m_2=4, U=12, Y_1=8, Y_2=6, Q=24$ – kuboktaedr.

2. $n_1=2, n_2=2, m_1=3, m_2=5, U=30, Y_1=20, Y_2=12, Q=60$ – ikosadodekaedr.

3. $n_1=1, n_2=3, m_1=3, m_2=4, U=24, Y_1=8, Y_2=18, Q=48$ – rombokuboktaedr.

4. $n_1=1, n_2=2, n_3=1, m_1=3, m_2=4, m_3=5, U=60, Y_1=20, Y_2=30, Y_3=12, Q=120$ – romboikosadodekaedr.

1)



2)



3)



4)



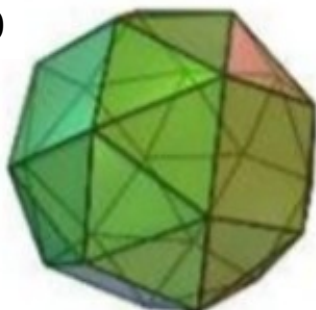
4-chizma.

$n=5$ bo'lganda ikkita yechimga ega bo'lamiz.

1. $n_1=4, n_2=1, m_1=3, m_2=4, U=24, Y_1=32, Y_2=6, Q=60$ – qiyshiq kub.

2. $n_1=4, n_2=1, m_1=3, m_2=5, U=60, Y_1=80, Y_2=12, Q=150$ – qiyshiq dodekaedr.

1)



2)



5-chizma.

Demak 3-teorema isbotlandi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Берже М. Геометрия. 1 том, Москва: Мир, 1984, 560 с.
2. Дистель Р. Теория графов, Новосибирск: Издательство Института математики, 2002.
3. Berger M. Geometry. Volume 1. Berlin: Springer-Verlag, 1987.
4. Coxeter H.~S.~M. Introduction to Geometry. New York: John Wiley and Sons, Inc. 1961.
5. Malkevitch J. Shaping space: a polyhedral approach, Senechal M., Flenk G. -- Boston: Birkhauser, 1988. pp. 80--92.
6. Mohar B., Thomassen C. Graphs on Surfaces, Johns Hopkins University Press, 2001.
7. West D.B. Introduction to Graph Theory, 2nd edition, Prentice Hall, 2001.