

FIZIK MASALALARNI YECHISHDA DIFFERENSIAL VA INTEGRAL HISOBLASHLARDAN FOYDALANISH

X.A.Qayumov

O'zbekiston Respublikasi FVV

Shahrisabz "Temurbeklar maktabi" harbiy-akademik litseyi

fizika fani o'qituvchisi, f-m.f.f.d (PhD)

tel: +998939792699, e-mail: kayumov0130@gmail.com

Annotatsiya: Maqolada umumiy fizika kursining mexanika, molekulyar fizika va elektrostatika bo'limlariga tegishli yuqori qiyinlik darajasidagi masalalarni yechishda differensial va integral hisoblashlardan foydalanish usullari keltirilgan.

Kalit so'zlar: differensial, integral, inersiya momenti, massa markazi, geometrik markazi, elektr maydon kuchlanganligi, politropik jarayon.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Х.А.Каюмов

МЧС Республики Узбекистан

Шахрисабзский военно-академический лицей «Темурбеклар мактаби»

учитель физики, ф-м.ф.ф.д (PhD)

тел: +998939792699, e-mail: kayumov0130@gmail.com

Аннотация: В статье представлены методы использования дифференциальных и интегральных вычислений при решении задач высокого уровня сложности в разделах механики, молекулярной физики и электростатики курса общей физики.

Ключевые слова: дифференциал, интеграл, момент инерции, центр масс, геометрический центр, напряженность электрического поля, политропный процесс.

USING DIFFERENTIAL AND INTEGRAL CALCULATIONS IN SOLVING PHYSICAL PROBLEMS

H.A.Kayumov

MES of the Republic of Uzbekistan
Shakhrisabz Military Academic Lyceum “Temurbeklar maktabi”
physics teacher, Ph.D

tel: +998939792699, e-mail: kayumov0130@gmail.com

Annotation: The article presents methods of using differential and integral calculations in solving high-complexity problems in the sections of mechanics, molecular physics and electrostatics of the general physics course.

Key words: differential, integral, moment of inertia, center of mass, geometric center, electric field strength, polytropic process.

Har qanday davlatda fizika fanini rivojlanishi uning iqtisodiy, sanoat, harbiy sohadagi rivojlanishiga bevosita ijobiy ta'sir ko'rsatadi. Fizika fanidan fundamental va amaliy bilimlarning rivojlanishi ta'lim tizimida olib borilayotgan islohotlarga bog'liq. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020-yil 29-dekabrda Oliy Majlisga Murojaatnomasida fizika fanini rivojlantirish uchun belgilab bergan asosiy vazifalari, 2021-yil 19-martdagi PQ-5032-son “Fizika sohasidagi ta'lim sifatini oshirish va ilmiy tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to'g'risida” gi qarori va shunga o'xshash boshqa huquqiy hujjatlar davlatimizda fizika fanini yanada rivojlanishi uchun muhim ahamiyat kasb etadi.

Fizika sohasida yangi yutuqlarga erishish uchun o'quvchilarga fizikaning hozirda mavjud nazariy va amaliy bilimlarni mukammal o'rgatib borish kerak. O'quvchilarga fizika qonunlarini keltirib chiqarishda, murakkab masalalarni yechishda har tomonlama qulay bo'lgan usullardan foydalanish muhimdir. Shunday usullardan biri, differensial va integral hisoblashlardan foydalanish usulidir. Funksiyaning hosilasi va integrali haqida ma'lumotlar olgach, ularni murakkab masalalarni yechishda qo'llasa, masalani yechish davomida ortiqcha savollar tug'ilmaydi.

Yuqoridagilardan kelib chiqib ushbu maqolada umumiy fizika kursining mexanika, molekulyar fizika va elektrostatika bo'limlariga tegishli ba'zi murakkab masalalarni yechishda differensial va integral hisoblashlardan foydalanish usullarini ko'rsatish maqsad qilib qo'yilgan. Quyida shularni qarab chiqamiz.

1-masala. Radiusi R bo'lgan yarim aylananing massa markazi koordinatalarni aniqlang.

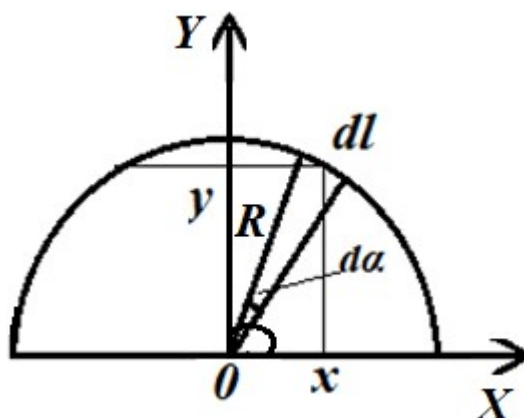
Yechish: Ushbu masalani yechishda, moddiy nuqtalar sistemasining massa markazi koordinatalarini aniqlash uchun ma'lum bo'lgan quyidagi formuladan foydalanamiz [1]:

$$x_0 = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{m} \quad (1)$$

$$y_0 = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{m} \quad (2)$$

Bu yerda $m_1, m_2, \dots, m_n$ – sistemadagi moddiy nuqtalarning massasi, $(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n)$ – sistemadagi moddiy nuqtalarning koordinatasi, $m_1 + m_2 + \dots + m_n = m$ – sistemaning umumiy massasi.

Yarim aylanani Dekart koordinatalari sistemasiga shunday joylashtiraylikki, uning geometrik markazi koordinata boshida bo'lsin (1-rasm). U holda 1-rasmdan ko'rish mumkinki, yarim aylana massa markazining absissasi $x_0 = 0$ bo'ladi.



1-rasm. Geometrik markazi koordinata boshida bo'lgan yarim aylana

Yarim aylanani juda kichik dm massali moddiy nuqtalar sistemasidan iborat deb qarash mumkin. Agar aylananing ixtiyoriy qismidan ajratib olingan dl qismining koordinatasi $(x; y)$ bo'lsa, u holda aylana massa markazining ordinatasi uchun quyidagi ifodani yozish mumkin:

$$y_0 = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{m} = \frac{1}{m} \int y dm \quad (3)$$

Aylananing dl qismining massasi $dm = \tau dl$ ga teng bo'ladi. Bu yerda $\tau = m/l$ - aylananing chiziqli zichligi. Shuningdek, $dl = R d\alpha$ ekanligini hisobga olsak:

$$y_0 = \frac{1}{m} \int y \tau dl = \frac{1}{m} \int y \tau R d\alpha \quad (4)$$

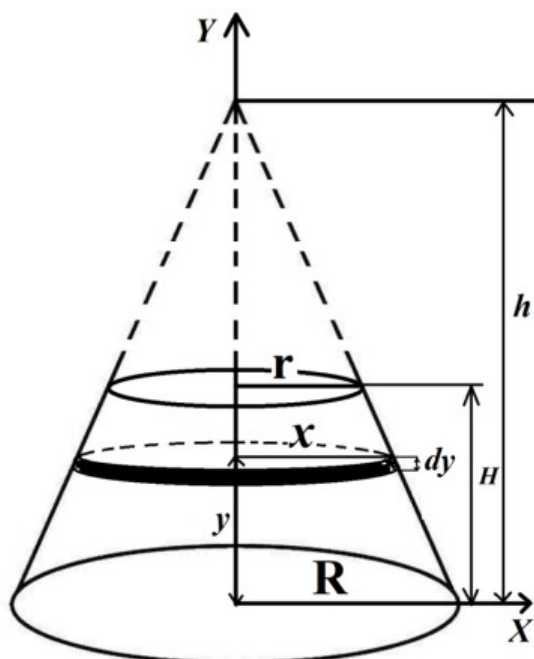
y ni o'rniga $y = R \sin \alpha$ qo'yamiz va y_0 ni topish uchun (4) tenglamani 0 dan π gacha integrallash kerak:

$$y_0 = \frac{\tau R^2}{m} \int_0^{\pi} \sin \alpha d\alpha = -\frac{\tau R^2}{m} \cdot \cos \alpha \Big|_0^{\pi} = \frac{2\tau R^2}{m} = \frac{2R^2}{m} \cdot \frac{m}{\pi R} = \frac{2R}{\pi} \quad (5)$$

Demak, Yarim aylana massa markazining koordinatasi $(0; 2R/\pi)$.

2-Masala: Zichligi ρ bo'lgan bir jinsli kesik konusni asoslarining markazidan o'tgan o'qqa nisbatan inersiya momentini aniqlang. Kesik konusning asoslarini radiusi R va r , balandligi H ga teng.

Yechish: Dastlab kesik konusni 2-rasmda ko'rsatilgandek Dekart koordinatalar sistemasiga joylashtiramiz. Masalaning shartidan kesik konusning Oy o'qqa nisbatan inersiya momentini hisoblash kerakligi kelib chiqadi. Endi, kesik konusni hayolan qalinligi dy bo'lgan disklarga bo'lib chiqamiz.



2-rasm. OY o'qida erkin aylana oladigan kesik konus

Bu disklardan ixtiyoriy bittasini tanlab olamiz. Tanlangan diskning massasi dm va uning radiusi x hamda markazi Oy o'qidan y uzoqlikda joylashgan bo'lsin. U holda tanlangan disk uchun inersiya momenti quyidagiga teng bo'ladi [2]:

$$dI = \frac{x^2 dm}{2} \quad (6)$$

(6) ifodaga $dm = \rho \pi x^2 dy$ tenglikni olib borib qo'ysak, quyidagi ko'rinishga keladi:

$$dI = \frac{\rho \pi x^4 dy}{2} \quad (7)$$

Kesik konusning kichik asosini hayolan davom ettirsak, balandligi h bo'lgan konus hosil bo'ladi va u balandligi $h-y$ va $h-H$ bo'lgan konuslarga o'xshash bo'ladi. O'xshashlik alomatlaridan quyidagi ifodalarni hosil qilamiz:

$$\begin{cases} \frac{h}{R} = \frac{h-y}{x} \\ \frac{h}{R} = \frac{h-H}{r} \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} x = \frac{R(h-y)}{h} \\ h = \frac{RH}{R-r} \end{cases} \quad (9)$$

(9) ifodadagi x ni (7) ifodaga olib borib qo'yamiz:

$$dI = \frac{\rho\pi R^4 (h-y)^4 dy}{2h^4} \quad (10)$$

(10) ifoda kesib olingan diskning inersiya momenti. Kesik konusning inersiya momentini aniqlash uchun (10) ifodani 0 dan H gacha bo'lgan chegarada integrallash kerak:

$$I = \frac{\rho\pi R^4}{2h^4} \int_0^H (h-y)^4 dy = -\frac{\rho\pi R^4}{2h^4} \cdot \frac{(h-y)^5}{5} \Big|_0^H = -\frac{\rho\pi R^4}{10h^4} \cdot ((h-H)^5 - h^5) = \frac{\rho\pi (R^5 - r^5) h}{10R} \quad (11)$$

Endi (9) ifodadagi h ni (11) ifodaga olib kelib qo'yamiz, natijada kesik konusning inersiya momenti hosil bo'ladi:

$$I = \frac{\rho\pi (R^5 - r^5) H}{10(R-r)} \quad (12)$$

3-masala: Modda miqdori ν bo'lgan ideal gaz T_1 temperaturali holatdan T_2 temperaturali holatga politropik ravishda o'tganda, gazning tashqi kuchlarga qarshi bajargan ishini aniqlang. Politropa ko'rsatkichi n .

Yechish: Ideal gaz juda kichik dV hajmga kengayganda uning bosimi P deyarli o'zgarmaydi deb hisoblash mumkin. U holda gaz tashqi kuchlarga qarshi quyidagi ifoda orqali aniqlanadigan ish bajaradi:

$$dA = PdV \quad (13)$$

Ma'lumki, gaz bir holatdan ikkinchi holatga politropik ravishda o'tganda quyidagi qonuniyat o'rinli bo'ladi:

$$PV^n = \text{const} \quad (14)$$

(14) ifodani $PV^n = k$ ko'rinishida yozib olamiz va undan P ni aniqlab, (13) ifodaga qo'yamiz:

$$dA = k \frac{dV}{V^n} \quad (15)$$

Endi (15) tenglikni V_1 dan V_2 gacha oraliqda integrallaymiz:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} k \frac{dV}{V^n} = k \frac{V^{1-n}}{1-n} \Big|_{V_1}^{V_2} = k \frac{V_2^{1-n} - V_1^{1-n}}{1-n} \quad (16)$$

Endi, Mendeleyev-Klapeyron tenglamasidan foydalanib, gazning birinchi holati uchun $k = PV^n$ kattalikni quyidagicha yozib olamiz:

$$k = PV_1^n = \nu RT_1 V_1^{n-1} \quad (17)$$

(17) tenglikni (16) dagi k ning o'rniga qo'ysak, quyidagicha bo'ladi:

$$A = \frac{\nu RT_1 V_1^{n-1} (V_2^{1-n} - V_1^{1-n})}{1-n} = \frac{\nu RT_1}{n-1} \cdot \left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{n-1} \right) \quad (18)$$

Gazning 1 va 2 holatlari uchun Mendeleyev-Klapeyron va politropik jarayon tenglamalari quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\begin{cases} P_1 V_1 = \nu R T_1 \\ P_2 V_2 = \nu R T_2 \\ P_1 V_1^n = P_2 V_2^n \end{cases} \quad (19)$$

(19) sistemadan $(V_1/V_2)^{n-1}$ kattalik uchun quyidagi ifodani keltirib chiqaramiz:

$$\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{n-1} = \frac{T_2}{T_1} \quad (20)$$

(20) tenglikni (18) ga olib borib qo'yamiz, natijada masala shartida so'ralgan ish formulasi kelib chiqadi:

$$A = \frac{\nu R T_1}{n-1} \cdot \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right) \quad (21)$$

4-masala: Bir tekis zaryadlangan, sirt zichligi σ bo'lgan yarim sferaning geometrik markazidagi elektr maydon kuchlanganligini aniqlang.

Yechish: Sferaning geometrik markazidan biror masofada, radiusi r va qalinligi dr bo'lgan halqani ajratib olamiz (3-rasm). Halqaning zaryadi $dq = \sigma dS$ bo'ladi. Halqaning yuzi esa, $dS = 2\pi r dr$ ga teng bo'ladi. Bu yerda $dr = R d\alpha$ ga teng bo'ladi. Yuqoridagilardan foydalanib halqaning sferani geometrik markazidagi elektr maydon kuchlanganligi dE uchun quyidagi ifodani yozish mumkin:

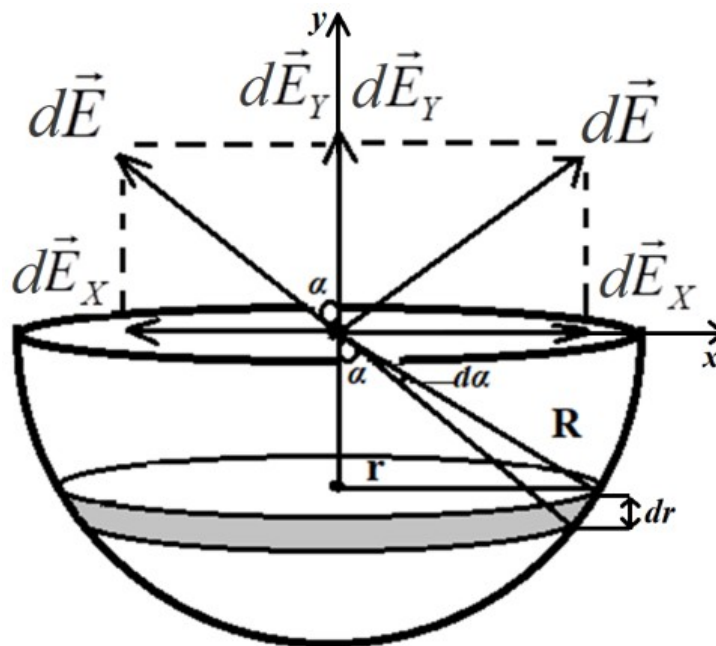
$$dE = k \frac{dq}{R^2} = k \frac{\sigma dS}{R^2} = k \frac{2\pi \sigma r dr}{R^2} = k \frac{2\pi \sigma r d\alpha}{R} \quad (22)$$

Bu yerda $k = 1/4\pi\epsilon_0 = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{Kl}^2$

3-rasmdan ko‘rish mumkinki, $r=R\sin\alpha$ bo‘ladi. Buni (22) ga qo‘ysak quyidagicha bo‘ladi:

$$dE = k \frac{2\pi\sigma R \sin\alpha d\alpha}{R} = 2\pi\sigma k \sin\alpha d\alpha \quad (23)$$

Halqaning sfera geometrik markazidagi elektr maydon kuchlanganlik kuch chiziqlari tasviridan ko‘rish mumkinki, maydon kuchlanganlik vektorining Ox o‘qdagi tashkil etuvchilari dE_x lar o‘zaro qarama-qarshi yo‘nalgan.



3-rasm. Geometrik markazi koordinata boshida bo‘lgan yarim sfera

Shuning uchun dE_x ning umumiy qiymati nolga teng. Maydon kuchlanganlik vektorining Oy o‘qdagi tashkil etuvchilari dE_y lar bir tomonga yo‘nalgan. dE ning Oy o‘qi bilan tashkil qilgan burchagi α ga teng bo‘lsa, u holda dE_y uchun quyidagi ifoda kelib chiqadi:

$$dE_y = dE \cos\alpha = 2\pi\sigma k \sin\alpha \cos\alpha d\alpha = \pi\sigma k \sin 2\alpha d\alpha \quad (24)$$

Endi E_y ni topish uchun (24) tenglikni $\pi/2$ dan $-\pi/2$ gacha bo‘lgan oraliqda integrallash kerak:

$$E_y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \pi \sigma k \sin 2\alpha d\alpha = - \frac{\pi \sigma k \cos 2\alpha}{2} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi \sigma k = \pi \sigma \frac{1}{4\pi \epsilon_0} = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \quad (25)$$

Endi masalaning shartida so'ralayotgan elektr maydon kuchlanganligi uchun quyidagi ifodani yozish mumkin:

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = E_y = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \quad (26)$$

Xulosa o'rnida shuni aytish mumkinki, yuqorida keltirilgan usullardan foydalanib o'quvchilar fizikadan shunga o'xshash olimpiada masalalarini ham ortiqcha savollarni qoldirmasdan, osongina yechishi mumkin.

Adabiyotlar:

1. A.G.Zagusta, G.A.Makeyeva, A.S.Mikulich, I.F.Saviskaya M.S.Sedrik. Umumiy fizika kursidan masalalar to'plami. Toshkent-O'qituvchi. 1991 y
2. A.G.Chertov, A.A.Vorobyev. Fizika masalalar to'plami. Toshkent-O'zbekiston. 1997
3. S.P.Strelkov. Umumiy fizika kursi. Toshkent-O'qituvchi. 1977 y