

Hasanov Anvarjon

V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika Instituti

Yuldasheva Madinabonu Rustamjon qizi

Namangan davlat universiteti

abbosbekyuldashev501@gmail.com

**APPELNING $F_2(a, b_1, b_2; c_1, c_2; x, y)$ FUNKSIYASI TA'RIFIDAN KELIB CHIQUVCHI BA'ZI
FUNKSIONAL MUNOSABATLAR**

Annotatsiya: Ushbu ishda $F_2(a, b_1, b_2; c_1, c_2; x, y)$ gipergeometrik funksiyasi va Kampe de Ferietning $F_{0;3;3}^{2;2;2}[x, y]$ funksiyasi orasidagi munosabatlar olingan. Bunda Appelning gipergeometrik funksiyasining darajali qatorga yoyilmasidan hamda tekis yaqinlashuvchi darajali qatorlarning hadlarini gruppalash hossalardan foydalanilgan.

Kalit so'zlar: gipergeometrik funksiyalar, Appel funksiyalari, Kampe de Feriet funksiyasi.

Хасанов Анваржан

Институт математика им. В.И. Романовского

Юлдашева Мадинабону Рустамжон кизи

Наманганский государственный университет

**НЕКОТОРЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ, ВЫВОДИМЫЕ ИЗ
ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ АППЕЛЯ $F_2(a, b_1, b_2; c_1, c_2; x, y)$**

Аннотация: В этой статье рассматривается новая взаимосвязь между гипергеометрической функцией Аппеля $F_2(a, b_1, b_2; c_1, c_2; x, y)$ и функцией Кампе де Ферьет $F_{0;3;3}^{2;2;2}[x, y]$. Рассмотрено метод разложение на степенный ряд гипергеометрической функции Аппеля, а также использовано свойств группировки членов равномерно сходящегося степенного ряда.

Ключевые слова: гипергеометрические функции, функцией Аппеля, функцией Кампе де Ферьет.

Hasanov Anvarjon

V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics

Yuldasheva Madinabonu

Namangan state university

**SOME FUNCTIONAL RELATIONS DERIVED FROM THE DEFINITION OF THE APPELL
HYPERGEOMETRIC FUNCTION $F_2(a, b_1, b_2; c_1, c_2; x, y)$**

Abstract: In this paper, we get a new relationship between Appell's hypergeometric function $F_2(a, b_1, b_2; c_1, c_2; x, y)$ and Campe de Feriet's function $F_{0;3;3}^{2;2;2}[x, y]$. We use expansion of series Appell's hypergeometric function and the method of grouping terms of smooth convergent power series.

Keywords: hypergeometric functions, Appell function, Campe de Feriet function.

Введение. Гипергеометрические функции представляют собой важную часть

математического анализа и теории специальных функций, охватывая широкий

спектр разнообразных типов. Среди них особое место занимают гипергеометрические функции Аппеля, зависящие от двух или более переменных. Их широкое применение наблюдается в различных областях, включая математическую физику, теорию вероятностей и математическое моделирование.

Гипергеометрические функции Аппеля обладают сложной структурой и уникальными свойствами, связанными с многомерностью. Их основная ценность заключается в способности описывать взаимосвязи между многопараметрическими системами и решать различные дифференциальные и интегральные уравнения [1-3]. Функциональные соотношения и производные этих функций играют ключевую роль в научных исследованиях, особенно при анализе сложных моделей в математике и физике.

В этой работе мы устанавливаем некоторые интересные и полезные тождества, связанные с функцией Аппеля [4]

$$F_2(a, b_1, b_2; c_1, c_2; x, y) = \sum_{m, n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n} (b_1)_m (b_2)_n}{(c_1)_m (c_2)_n m! n!} x^m y^n$$

и функциями Кампе де Ферьет $F_{0;3;3}^{2;2;2}[x, y]$, где [5]

$$F_{l;m;n}^{p;q;k} \left(\begin{matrix} (a_p): (b_q); (c_k) \\ (\alpha_l): (\beta_m); (\gamma_n) \end{matrix} ; x, y \right) = \sum_{r,s=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^p (a_j)_{r+s} \prod_{j=1}^q (b_j)_r \prod_{j=1}^k (c_j)_s}{\prod_{j=1}^l (\alpha_j)_{r+s} \prod_{j=1}^m (\beta_j)_r \prod_{j=1}^n (\gamma_n)_s} \frac{x^r y^s}{r! s!}.$$

Для этого мы суммируем заданную функцию по степеням, x^m, y^n в случае, когда остатки при делении m, n на 2. По факту, для любых комплексных чисел $c_1, c_2 \in C \setminus Z_0^-$ ряд

$F_2(a, b_1, b_2; c_1, c_2; x, y)$ абсолютно сходится в области $(|x| < 1, |y| < 1)$ и поэтому может быть представлена как следующие 4 слагаемые:

$$\begin{aligned} F_2(a, b_1, b_2; c_1, c_2; x, y) = & \sum_{p,q=0}^{\infty} \frac{(a)_{2p+2q} (b_1)_{2p} (b_2)_{2q}}{(c_1)_{2p} (c_2)_{2q} (2p)!(2q)!} x^{2p} y^{2q} + \\ & + \sum_{p,q=0}^{\infty} \frac{(a)_{2p+2q+2} (b_1)_{2p+1} (b_2)_{2q+1}}{(c_1)_{2p+1} (c_2)_{2q+1} (2p+1)!(2q+1)!} x^{2p+1} y^{2q+1} \\ & + \sum_{p,q=0}^{\infty} \frac{(a)_{2p+2q+1} (b_1)_{2p} (b_2)_{2q+1}}{(c_1)_{2p} (c_2)_{2q+1} (2p)!(2q+1)!} x^{2p} y^{2q+1} + \\ & + \sum_{p,q=0}^{\infty} \frac{(a)_{2p+1+2q} (b_1)_{2p+1} (b_2)_{2q}}{(c_1)_{2p+1} (c_2)_{2q} (2p+1)!(2q)!} x^{2p+1} y^{2q}. \quad (1) \end{aligned}$$

Затем, применяя соотношения [6]

$$(2p)! = \Gamma(2p+1) = (1)_{2p},$$

$$(2p+1)! = \Gamma(2p+1+1) = (2)_{2p},$$

$$(a)_{2p+2q+2} = a(a+1)(a+2)_{2p+2q},$$

$$(a)_{2(p+q)} = 4^{p+q} \left(\frac{a}{2} \right)_{p+q} \left(\frac{a+1}{2} \right)_{p+q},$$

$$(1)_{2p} = 4^p \left(\frac{1}{2} \right)_p p!, \quad (2)_{2p} = 4^p \left(\frac{3}{2} \right)_p p!,$$

приходим к формуле

$$\begin{aligned} F_2(a, b_1, b_2; c_1, c_2; x, y) = & A_1 + \\ & + \frac{a(a+1)b_1b_2}{c_1c_2} xyA_2 + \frac{ab_2}{c_2} yA_3 + \frac{ab_1}{c_1} xA_4, \end{aligned}$$

где

$$A_1 = F_{0;3;3}^{2;2;2} \left[\begin{matrix} \frac{a}{2}, \frac{a+1}{2}; & \frac{b_1}{2}, \frac{b_1+1}{2}; & \frac{b_2}{2}, \frac{b_2+1}{2}; \\ -; & \frac{c_1}{2}, \frac{c_1+1}{2}, \frac{1}{2}; & \frac{c_2}{2}, \frac{c_2+1}{2}, \frac{1}{2}; \end{matrix} ; x^2, y^2 \right],$$

$$A_2 = F_{0;3;3}^{2;2;2} \left[\begin{matrix} \frac{a+2}{2}, \frac{a+3}{2}; & \frac{b_1+1}{2}, \frac{b_1+2}{2}; & \frac{b_2+1}{2}, \frac{b_2+2}{2}; \\ -; & \frac{c_1+1}{2}, \frac{c_1+2}{2}, \frac{3}{2}; & \frac{c_2+1}{2}, \frac{c_2+2}{2}, \frac{3}{2}; \end{matrix} ; x^2, y^2 \right],$$

$$A_3 = F_{0;3;3}^{2;2;2} \left[\begin{array}{c} \frac{a+1}{2}, \frac{a+2}{2}; \quad \frac{b_1}{2}, \frac{b_1+1}{2}; \quad \frac{b_2+1}{2}, \frac{b_2+2}{2}; \\ -; \quad \frac{c_1}{2}, \frac{c_1+1}{2}, \frac{1}{2}; \quad \frac{c_2+1}{2}, \frac{c_2+2}{2}, \frac{3}{2}; \end{array} x^2, y^2 \right],$$

$$A_4 = F_{0;3;3}^{2;2;2} \left[\begin{array}{c} \frac{a+1}{2}, \frac{a+2}{2}; \quad \frac{b_1+1}{2}, \frac{b_1+2}{2}; \quad \frac{b_2}{2}, \frac{b_2+1}{2}; \\ -; \quad \frac{c_1+1}{2}, \frac{c_1+2}{2}, \frac{3}{2}; \quad \frac{c_2}{2}, \frac{c_2+1}{2}, \frac{1}{2}; \end{array} x^2, y^2 \right].$$

Следствие 1. Имеет место тождество

$$A_1 = \frac{1}{4} [F_2(a, b_1, b_2; c_1, c_2; x, y) + \\ + F_2(a, b_1, b_2; c_1, c_2; -x, y) + \\ + F_2(a, b_1, b_2; c_1, c_2; x, -y) + \\ + F_2(a, b_1, b_2; c_1, c_2; -x, -y)].$$

Следствие 2. Имеет место тождество

$$A_2 = \frac{c_1 c_2}{4a(a+1)b_1 b_2 xy} [F_2(a, b_1, b_2; c_1, c_2; x, y) - \\ - F_2(a, b_1, b_2; c_1, c_2; -x, y) - \\ - F_2(a, b_1, b_2; c_1, c_2; x, -y) + \\ + F_2(a, b_1, b_2; c_1, c_2; -x, -y)].$$

Следствие 3. Имеет место тождество

$$A_3 = \frac{c_2}{4ab_2 y} [F_2(a, b_1, b_2; c_1, c_2; x, y) + \\ + F_2(a, b_1, b_2; c_1, c_2; -x, y) - \\ - F_2(a, b_1, b_2; c_1, c_2; x, -y) - \\ - F_2(a, b_1, b_2; c_1, c_2; -x, -y)].$$

Следствие 4. Имеет место тождество

$$A_4 = \frac{c_1}{x4ab_1} [F_2(a, b_1, b_2; c_1, c_2; x, y) + \\ + F_2(a, b_1, b_2; c_1, c_2; x, -y) - \\ - F_2(a, b_1, b_2; c_1, c_2; -x, y) - \\ - F_2(a, b_1, b_2; c_1, c_2; -x, -y)].$$

Теорема 1. Имеет место тождество

$${}_1F_1(b_1; c_1; x) {}_1F_1(b_2; c_2; y) = \\ = {}_2F_3\left(\frac{b_1}{2}, \frac{b_1+1}{2}; \frac{c_1}{2}, \frac{c_1+1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{x^2}{4}\right) \times \\ \times {}_2F_3\left(\frac{b_2}{2}, \frac{b_2+1}{2}; \frac{c_2}{2}, \frac{c_2+1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{y^2}{4}\right) + \\ + \frac{b_1 b_2}{c_1 c_2} xy {}_2F_3\left(\frac{b_1+1}{2}, \frac{b_1+2}{2}; \frac{c_1+1}{2}, \frac{c_1+2}{2}, \frac{3}{2}; \frac{x^2}{4}\right) \times \\ \times {}_2F_3\left(\frac{b_2+1}{2}, \frac{b_2+2}{2}; \frac{c_2+1}{2}, \frac{c_2+2}{2}, \frac{3}{2}; \frac{y^2}{4}\right) + \\ + \frac{b_2}{c_2} y {}_2F_3\left(\frac{b_1}{2}, \frac{b_1+1}{2}; \frac{c_1}{2}, \frac{c_1+1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{x^2}{4}\right) \times \\ \times {}_2F_3\left(\frac{b_2+1}{2}, \frac{b_2+2}{2}; \frac{c_2+1}{2}, \frac{c_2+2}{2}, \frac{3}{2}; \frac{y^2}{4}\right) + \\ + \frac{b_1}{c_1} x {}_2F_3\left(\frac{b_1+1}{2}, \frac{b_1+2}{2}; \frac{c_1+1}{2}, \frac{c_1+2}{2}, \frac{3}{2}; \frac{x^2}{4}\right) \times \\ \times {}_2F_3\left(\frac{b_2}{2}, \frac{b_2+1}{2}; \frac{c_2}{2}, \frac{c_2+1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{y^2}{4}\right).$$

Доказательство. В равенстве (1),

вводя обозначения $a = \frac{1}{\varepsilon}$, $x = \varepsilon x$, $y = \varepsilon y$,

имеем

$$F_2\left(\frac{1}{\varepsilon}, b_1, b_2; c_1, c_2; \varepsilon x, \varepsilon y\right) = \\ = F_{0;3;3}^{2;2;2} \left[\begin{array}{c} \frac{1}{2\varepsilon}, \frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon}; \quad \frac{b_1}{2}, \frac{b_1+1}{2}; \quad \frac{b_2}{2}, \frac{b_2+1}{2}; \\ -; \quad \frac{c_1}{2}, \frac{c_1+1}{2}, \frac{1}{2}; \quad \frac{c_2}{2}, \frac{c_2+1}{2}, \frac{1}{2}; \end{array} (\varepsilon x)^2, (\varepsilon y)^2 \right] \\ + \frac{b_1 b_2}{c_1 c_2} xy F_{0;3;3}^{2;2;2} \left[\begin{array}{c} \frac{1+2\varepsilon}{2\varepsilon}, \frac{1+3\varepsilon}{2\varepsilon}; \quad \frac{b_1+1}{2}, \frac{b_1+2}{2}; \quad \frac{b_2+1}{2}, \frac{b_2+2}{2}; \\ -; \quad \frac{c_1+1}{2}, \frac{c_1+2}{2}, \frac{3}{2}; \quad \frac{c_2+1}{2}, \frac{c_2+2}{2}, \frac{3}{2}; \end{array} (\varepsilon x)^2, (\varepsilon y)^2 \right] \\ + \frac{b_2}{c_2} y F_{0;3;3}^{2;2;2} \left[\begin{array}{c} \frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon}, \frac{1+2\varepsilon}{2\varepsilon}; \quad \frac{b_1}{2}, \frac{b_1+1}{2}; \quad \frac{b_2+1}{2}, \frac{b_2+2}{2}; \\ -; \quad \frac{c_1}{2}, \frac{c_1+1}{2}, \frac{1}{2}; \quad \frac{c_2+1}{2}, \frac{c_2+2}{2}, \frac{3}{2}; \end{array} (\varepsilon x)^2, (\varepsilon y)^2 \right] \\ + \frac{b_1}{c_1} x F_{0;3;3}^{2;2;2} \left[\begin{array}{c} \frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon}, \frac{1+2\varepsilon}{2\varepsilon}; \quad \frac{b_1+1}{2}, \frac{b_1+2}{2}; \quad \frac{b_2}{2}, \frac{b_2+1}{2}; \\ -; \quad \frac{c_1+1}{2}, \frac{c_1+2}{2}, \frac{3}{2}; \quad \frac{c_2}{2}, \frac{c_2+1}{2}, \frac{1}{2}; \end{array} (\varepsilon x)^2, (\varepsilon y)^2 \right].$$

Предполагая, что

$$\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)_{m+n} = \frac{1}{2\varepsilon} \left(\frac{1}{2\varepsilon} + 1\right) \dots \left(\frac{1}{2\varepsilon} + m + n - 1\right),$$

$$\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)_{m+n} (2\varepsilon)^{m+n} = (1 + 2\varepsilon) \dots (1 + 2\varepsilon(m + n - 1)),$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)_{m+n} (2\varepsilon)^{m+n} = 1,$$

получим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_2 \left(\frac{1}{\varepsilon}, b_1, b_2; c_1, c_2; \varepsilon x, \varepsilon y \right) = {}_1F_1(b_1; c_1; x) \times$$

$$\times {}_1F_1(b_2; c_2; y),$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_{0;3;3}^{2;2;2} \left[\begin{matrix} \frac{1}{2\varepsilon}, \frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon}; & \frac{b_1}{2}, \frac{b_1+1}{2}; & \frac{b_2}{2}, \frac{b_2+1}{2}; \\ -; & \frac{c_1}{2}, \frac{c_1+1}{2}, \frac{1}{2}; & \frac{c_2}{2}, \frac{c_2+1}{2}, \frac{1}{2}; \end{matrix} \right. \left. (\varepsilon x)^2, (y\varepsilon)^2 \right] =$$

$$= {}_2F_3 \left(\frac{b_1}{2}, \frac{b_1+1}{2}; \frac{c_1}{2}, \frac{c_1+1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{x^2}{4} \right) {}_2F_3 \left(\frac{b_2}{2}, \frac{b_2+1}{2}; \frac{c_2}{2}, \frac{c_2+1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{y^2}{4} \right)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{b_1 b_2}{c_1 c_2} xy F_{0;3;3}^{2;2;2} \left[\begin{matrix} \frac{1+2\varepsilon}{2\varepsilon}, \frac{1+3\varepsilon}{2\varepsilon}; & \frac{b_1+1}{2}, \frac{b_1+2}{2}; & \frac{b_2+1}{2}, \frac{b_2+2}{2}; \\ -; & \frac{c_1+1}{2}, \frac{c_1+2}{2}, \frac{3}{2}; & \frac{c_2+1}{2}, \frac{c_2+2}{2}, \frac{3}{2}; \end{matrix} \right. \left. (\varepsilon x)^2, (y\varepsilon)^2 \right] =$$

$$= \frac{b_1 b_2}{c_1 c_2} xy {}_2F_3 \left(\frac{b_1+1}{2}, \frac{b_1+2}{2}; \frac{c_1+1}{2}, \frac{c_1+2}{2}, \frac{3}{2}; \frac{x^2}{4} \right) \times$$

$$\times {}_2F_3 \left(\frac{b_2+1}{2}, \frac{b_2+2}{2}; \frac{c_2+1}{2}, \frac{c_2+2}{2}, \frac{3}{2}; \frac{y^2}{4} \right)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{b_2}{c_2} y F_{0;3;3}^{2;2;2} \left[\begin{matrix} \frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon}, \frac{1+2\varepsilon}{2\varepsilon}; & \frac{b_1}{2}, \frac{b_1+1}{2}; & \frac{b_2+1}{2}, \frac{b_2+2}{2}; \\ -; & \frac{c_1}{2}, \frac{c_1+1}{2}, \frac{1}{2}; & \frac{c_2+1}{2}, \frac{c_2+2}{2}, \frac{3}{2}; \end{matrix} \right. \left. (\varepsilon x)^2, (y\varepsilon)^2 \right] =$$

$$= \frac{b_2}{c_2} y {}_2F_3 \left(\frac{b_1}{2}, \frac{b_1+1}{2}; \frac{c_1}{2}, \frac{c_1+1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{x^2}{4} \right) \times$$

$$\times {}_2F_3 \left(\frac{b_2+1}{2}, \frac{b_2+2}{2}; \frac{c_2+1}{2}, \frac{c_2+2}{2}, \frac{3}{2}; \frac{y^2}{4} \right)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{b_1}{c_1} x F_{0;3;3}^{2;2;2} \left[\begin{matrix} \frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon}, \frac{1+2\varepsilon}{2\varepsilon}; & \frac{b_1}{2}, \frac{b_1+1}{2}; & \frac{b_2+1}{2}, \frac{b_2+2}{2}; \\ -; & \frac{c_1}{2}, \frac{c_1+1}{2}, \frac{1}{2}; & \frac{c_2+1}{2}, \frac{c_2+2}{2}, \frac{3}{2}; \end{matrix} \right. \left. (\varepsilon x)^2, (y\varepsilon)^2 \right] =$$

$$= \frac{b_1}{c_1} x {}_2F_3 \left(\frac{b_1+1}{2}, \frac{b_1+2}{2}; \frac{c_1+1}{2}, \frac{c_1+2}{2}, \frac{3}{2}; \frac{x^2}{4} \right) \times$$

$$\times {}_2F_3 \left(\frac{b_2}{2}, \frac{b_2+1}{2}; \frac{c_2}{2}, \frac{c_2+1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{y^2}{4} \right)$$

Подставляя полученные результаты в (1),
имеем утверждение теоремы. Теорема 1
доказана.

Используя следствия 1-4 и метод
доказательства теоремы 1, мы получаем
следующие теоремы.

Теорема 2. Имеет место тождество

$$4 {}_2F_3 \left(\frac{b_1}{2}, \frac{b_1+1}{2}; \frac{c_1}{2}, \frac{c_1+1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{x^2}{4} \right) \times$$

$$\times {}_2F_3 \left(\frac{b_2}{2}, \frac{b_2+1}{2}; \frac{c_2}{2}, \frac{c_2+1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{y^2}{4} \right) =$$

$$= {}_1F_1(b_1; c_1; x) {}_1F_1(b_2; c_2; y) +$$

$$+ {}_1F_1(b_1; c_1; -x) {}_1F_1(b_2; c_2; y) +$$

$$+ {}_1F_1(b_1; c_1; x) {}_1F_1(b_2; c_2; -y) +$$

$$+ {}_1F_1(b_1; c_1; -x) {}_1F_1(b_2; c_2; -y).$$

Теорема 3. Имеет место тождество

$$\frac{4b_1 b_2 xy}{c_1 c_2} {}_2F_3 \left(\frac{b_1+1}{2}, \frac{b_1+2}{2}; \frac{c_1+1}{2}, \frac{c_1+2}{2}, \frac{3}{2}; \frac{x^2}{4} \right) \times$$

$$\times {}_2F_3 \left(\frac{b_2+1}{2}, \frac{b_2+2}{2}; \frac{c_2+1}{2}, \frac{c_2+2}{2}, \frac{3}{2}; \frac{y^2}{4} \right)$$

$$= [{}_1F_1(b_1; c_1; x) - {}_1F_1(b_1; c_1; -x)] \times$$

$$\times [{}_1F_1(b_2; c_2; y) - {}_1F_1(b_2; c_2; -y)]$$

Теорема 4. Имеет место тождество

$$\frac{4b_2 y}{c_2} {}_2F_3 \left(\frac{b_1}{2}, \frac{b_1+1}{2}; \frac{c_1}{2}, \frac{c_1+1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{x^2}{4} \right) \times$$

$$\times {}_2F_3 \left(\frac{b_2+1}{2}, \frac{b_2+2}{2}; \frac{c_2+1}{2}, \frac{c_2+2}{2}, \frac{3}{2}; \frac{y^2}{4} \right) =$$

$$= [{}_1F_1(b_1; c_1; x) + {}_1F_1(b_1; c_1; -x)] \times$$

$$\times [{}_1F_1(b_2; c_2; y) - {}_1F_1(b_2; c_2; -y)]$$

Заметим, что в работе [7] получены
некоторые функциональные соотношения для
функции F_1 .

Литература

1. Komilova, N. J., A. Hasanov, and T. G. Ergashev. "Expansions of Kampe de Feriet hypergeometric functions." *Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science* 122.2 (2024): 50-66.
2. Ergashev, T. G., A. Hasanov, and T. K. Yuldashev. "Some Infinite Expansions of the Lauricella Functions and Their Application in the Study of Fundamental Solutions of a Singular Elliptic Equation." *Lobachevskii Journal of Mathematics* 45.3 (2024): 1072-1085.
3. Ergashev TG, Hasanov A. Holmgren problem for elliptic equation with singular coefficients. Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2020;32(3):114-26.
4. P. Appell and J. Kampe de Ferriet, *Fonctions Hypergeometriques et Hyperspheriques; Polynomes d'Hermite*, Gauthier - Villars, Paris, 1926.
5. A. Erdelyi, W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi, *Higher Transcendental Functions*, Vol. 1, McGrawHill Book Company, New York, Toronto and London
6. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Т.3. Специальные функции. Дополнительные главы.-2-е изд., исправ. - М.:ФИЗМАТЛИТ, 2003. - 668 с.
7. Хасанов А., Толашева Ё.И. Функциональные соотношения, выводимые из определения гипергеометрической функций Аппеля, Научный вестник. ФерГУ