

Nasirov Tulkun Zakirovich
Geologiya fanlari universiteti, kafedra mudiri, f.-m.f.n., dotsent
Mirxodjayeva Najibaxon Shaxsuvarovna
Toshkent davlat iqtisodiyot universiteti, katta o'qituvchi

Tel: 90 000-83-90, e-mail: tulkunnasirov@yandex.ru

UDK 537.1

Ikki o'lchamli fazodagi elektronning holati

Annotatsiya. Ikki o'lchamli fazodagi elektronning holatini relyativistik yaqinlasuvda Shvinger-Dayson tenglamasini Kulon potentsiali holida qo'llab o'rganish bo'yicha olib borilgan tadqiqotlar natijalarining tahlili keltirilgan. Har qanday uzoqlashish va singulyarliklardan holi bo'lgan qayta normalash sxemasi taklif qilingan. Elektronning ikki o'lchamli fazodagi holatini ifodalovchi radial tenglama olingan bo'lib, uning yechimlari orqali elektronning ikki o'lchamli elektron gazidagi bog'langan holatlarini tadqiq qilish mumkin bo'ladi. Elektron fazaviy funksiyasi uchun sonli yechimlar keltirilgan bo'lib, ular erkin elektron uchun Shvinger-Dayson tenglamasi yechimlariga, ayniqsa, kichik impulslarda juda yaqin. Kichik impulslarda elektron manfiy qiymatlarni qabul qilishi ko'rsatilgan. Bu hol elektronning kichik impulslarda bo'lgan holatda bo'lishi, katta impulslarda esa o'zini erkin zarra kabi tutishidan dalolat beradi.

Kalit so'zlar: Shvinger-Dayson tenglamasi, ikki o'lchamli fazo, fazaviy funksiya, Kulon potentsiali, bir zarrali energiya

Насиров Тулкун Закирович
Университет геологических наук, заведующий кафедрой, к.ф.-м.н., доцент
Мирходжаева Нажибахон Шахсуваровна
Ташкентский государственный экономический университет, старший преподаватель

Состояние электрона в двумерном пространстве

Аннотация. Представлен анализ результатов исследований, проведенных по изучению состояния электрона в двумерном пространстве в релятивистском приближении с применением уравнения Швингера-Дайсона с кулоновским потенциалом. Предложена схема перенормировки, свободная от каких-либо расходимостей и сингулярностей. Получено радиальное уравнение, описывающее состояние электрона в двумерном пространстве, решением которого можно будет исследовать связанные состояния электрона в двумерном электронном газе. Представлены численные решения для фазовой функции электрона, которые очень близки со случаем решения уравнения Швингера-Дайсона для свободного электрона, особенно при малых импульсах. Показано, что при малых значениях импульса энергия электрона принимает отрицательные значения. Данное обстоятельство свидетельствует в том, что электрон при малых импульсах будет находиться в связанном состоянии, а при больших же значениях импульса будет вести себя как свободная частица.

Ключевые слова: уравнение Швингера-Дайсона, двумерное пространство, фазовая функция, кулоновский потенциал, одночастичная энергия

Nasirov Tulkun Zakirovich

University of geological sciences, head of department, PhD, docent

Mirxodjayeva Najibaxon Shaxsuvarovna

Tashkent state economical university, senior teacher

phone: 90 000-83-90 e-mail: tulkunnasirov@yandex.ru

**Deterministic nature of the current-voltage characteristic $pSi-n(Si_2)_{1-x}(CdS)_x$ -
structure**

Abstract. The analysis of investigations carried out on studying electronic states in two dimensions space in the relativistic approximation using Schwinger-Dyson equation with Coulomb potential has been presented. The renormalization scheme, which is free from a divergences and singularities, has been proposed. The radial equation which describes the electronic state in two dimensions space, solution of one allows us investigate bound states of electron in two dimensions electronic gas, has been obtained. The numerical solutions for phase function of electron have been presented. These solutions very close with solution of Schwinger-Dyson equation for the free electron, especially on small impulses. It has been shown that electronic energy in small impulses has negative values. This circumstance indicates that electron in the small impulses will be in a bound state and in big impulses will behave like a free particle.

Keywords: Schwinger-Dyson equation, two-dimension space, phase function, Coulomb potential, single-particle energy

Введение

В последнее время в научной литературе интенсивно изучается поведение электрона в приближении двумерного потенциала при очень низких температурах. Это связано с тем, что данное состояние позволяет глубже понять картин в макром мире, объясняемых и видимо связанных с квантовым эффектом Холла.

В литературе аналогичные объекты широко изучаются как в экспериментальном, так и теоретическом плане. Однако, в большинстве теоретических подходах поведение электрона рассматривалось с применением уравнения Шредингера, являющегося с самого начала нерелятивистским.

Несмотря на то, в изучаемых объектах электрон рассматривается в ограниченном пространстве, необходимо помнить то, что он является ультрарелятивистской (пока наименьшей по массе, зарегистрированной)

частицей и при изучении возможных состояний электрона мы должны учесть и релятивистские эффекты.

Обзор литературы

Одним из подходов для описания релятивистских эффектов связанных состояний и широко применившихся в описании спектра масс и распадов мезонов является бислокальная релятивистская потенциальная модель [1], в которой массы и волновые функции связанного состояния находятся решением уравнений Швингера-Дайсона и Бете-Солпитера.

В последнее время уравнение Швингера-Дайсона использовался при описании суперсимметричной теории Янга-Миллса [2], 1+2-мерной квантовой электродинамики [3], в рамках модели взаимодействия скалярных полей [4]. В последней работе, в частности было показано существование критической константы связи, разделяющей область слабой связи с асимптотически свободным поведением и область сильной связи, в которой асимптотическое поведение пропагаторов полей меняется на ультралокальное.

В настоящей работе уравнение Швингера-Дайсона используется для описания состояний электрона в двумерном пространстве.

Теоретическая модель

Уравнение Швингера-Дайсона в импульсном представлении имеет вид [1]:

$$\begin{cases} E(p) \sin \varphi(p) = m_0 + \frac{1}{2} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} V(|p - q|) \sin \varphi(q) \\ E(p) \cos \varphi(p) = p + \frac{1}{2} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} V(|p - q|) \hat{p} \hat{q} \cos \varphi(q) \end{cases} \quad (1)$$

где $E(p)$ – одночастичная энергия и $\varphi(p)$ – фазовая функция электрона, являющимися искомыми функциями, p – импульс, m_0 – масса электрона, $V(|p - q|)$ – потенциал взаимодействия электрона с полем,

$$\hat{p} = \frac{p}{|p|};$$

$$\hat{q} = \frac{q}{|q|}.$$

Для решения уравнения (1) удобно преобразовать его в безразмерный вид подстановкой:

$$\begin{aligned} p / m_0 &\rightarrow p; \\ E(p) / m_0 &\rightarrow E(p); \\ m_0 &\rightarrow 1. \end{aligned} \quad (2)$$

После чего уравнение (1) примет вид:

$$\begin{cases} E(p) \sin \varphi(p) = 1 + \frac{1}{2} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} V(|p - q|) \sin \varphi(q) \\ E(p) \cos \varphi(p) = p + \frac{1}{2} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} V(|p - q|) \hat{p} \hat{q} \cos \varphi(q) \end{cases} \quad (3)$$

Считая, что по одному направлению (оси p_z) движение электрона ограничено, потенциал взаимодействия можно представить в виде

$$V(|p - q|) = \frac{4\pi\alpha}{|p - q|^2} \delta(p_z - q_z); \quad (4)$$

где α – постоянная тонкой структуры.

Далее, подставляя выражение (4) в уравнение (3) с использованием цилиндрической системы координат (q_z, q, θ) и интегрируя по переменной q_z , получим следующую систему уравнений.

$$\begin{cases} E(p) \sin \varphi(p) = 1 + \frac{\alpha}{4\pi^2} \int_0^\infty \sin \varphi(q) q dq \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{p^2 + q^2 - 2pq \cos \theta}; \\ E(p) \cos \varphi(p) = p + \frac{\alpha}{4\pi^2} \int_0^\infty \cos \varphi(q) q dq \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{p^2 + q^2 - 2pq \cos \theta}, \end{cases} \quad (5)$$

Интегрирование по полярной координате θ в первой строке уравнения (5) дает

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{p^2 + q^2 - 2pq \cos \theta} = \frac{8pq}{p^2 + q^2}. \quad (6)$$

Аналогично можно проинтегрировать и второй интеграл во второй строке этого же уравнения

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{p^2 + q^2 - 2pq \cos \theta} = \frac{2(1 - \pi)}{pq}. \quad (7)$$

Таким образом, с подстановкой выражений (6) и (7) уравнение (5) примет вид:

$$\begin{cases} E(p) \sin \varphi(p) = 1 + \frac{\alpha}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{\sin \varphi(q) q dq}{p^2 + q^2}; \\ E(p) \cos \varphi(p) = p + \frac{\alpha(1 - \pi)}{2\pi p} \int_0^\infty \cos \varphi(q) dq. \end{cases} \quad (8)$$

Итак, трехмерное интегральное уравнение (3) привели к одномерному (8).

Асимптотическое поведение решения уравнения Швингера-Дайсона

Теперь, прежде чем приступить к решению уравнения (8) мы должны исследовать его поведение для случаев:

- 1) $p \rightarrow 0$;
- 2) $0 < p \leq p_{\max} < \infty$;
- 3) $p \rightarrow \infty$.

Начнем с первого случая ($p \rightarrow 0$). Для этого интеграл в первой строке уравнения (8) удобно представить в виде:

$$\int_0^\infty \frac{\sin \varphi(q) dq}{q} = \int_0^h \frac{\sin \varphi(q) dq}{q} + \int_h^{p_{\max}} \frac{\sin \varphi(q) dq}{q} + \int_{p_{\max}}^\infty \frac{\sin \varphi(q) dq}{q}, \quad (9)$$

где $h \ll p_{\max}$ – достаточно малый импульс. Представляет интерес предел, когда в области $0 \leq q \leq h$ $\varphi(q)$ соответствует виду для свободного электрона. При этом ее можно представить в виде:

$$\sin \varphi(q) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{q^2 + 1}}.$$

В таком случае интегрирование первого члена в правой части выражения (9) дает:

$$\int_0^h \frac{dq}{q\sqrt{q^2+1}} = -\ln \left| \frac{1+\sqrt{q^2+1}}{q} \right| \Big|_0^h = \ln \frac{2}{0} - \ln \left| \frac{1+\sqrt{h^2+1}}{h} \right|. \quad (10)$$

Точно так же можно проинтегрировать и третий член выражения (9)

$$\int_{p_{\max}}^{\infty} \frac{dq}{q\sqrt{q^2+1}} = -\ln \left| \frac{1+\sqrt{q^2+1}}{q} \right| \Big|_{p_{\max}}^{\infty} = \ln \left| \frac{1+\sqrt{p_{\max}^2+1}}{p_{\max}} \right|. \quad (11)$$

Следует отметить, что в выражении (10) первый член является логарифмически расходящимся. Однако, его можно устранить переопределением входных параметров.

Во втором случае ($0 < p \leq p_{\max} < \infty$) имеем дело с областью взаимодействия электрона с полем и ее легче исследовать численным методом.

В третьем же случае ($p \rightarrow \infty$) также интеграл в первой строке уравнения (8) удобно разбить на две части следующим образом:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \varphi(q) q dq}{p^2 + q^2} = \int_0^{p_{\max}} \frac{\sin \varphi(q) q dq}{p^2 + q^2} + \int_{p_{\max}}^{\infty} \frac{\sin \varphi(q) q dq}{p^2 + q^2}. \quad (12)$$

Второй интеграл в правой части также удобно исследовать подстановкой для функции φ решения для свободного электрона. Тогда

$$\int_{p_{\max}}^{\infty} \frac{q dq}{\sqrt{q^2+1}(p^2+q^2)} = \frac{1}{\sqrt{p^2-1}} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\sqrt{p_{\max}^2+1}}{\sqrt{p^2-1}} \right). \quad (13)$$

Переходим к исследованию интеграла во второй строке уравнения (8), которое также удобно проводить для трех рассмотренных выше случаев.

Тогда для случаев $p \rightarrow 0$ и $p \rightarrow \infty$

$$\cos \varphi(q) \rightarrow \frac{q}{\sqrt{q^2+1}}.$$

и

$$\int_0^{\infty} \cos \varphi(q) dq = \int_0^h \frac{q}{\sqrt{q^2+1}} dq + \int_h^{p_{\max}} \cos \varphi(q) dq + \int_{p_{\max}}^{\infty} \frac{q}{\sqrt{q^2+1}} dq = h + \infty - p_{\max} + \int_h^{p_{\max}} \cos \varphi(q) dq. \quad (14)$$

Таким образом, мы исследовали возможные значения интегралов для случаев $p \rightarrow 0$ и $p \rightarrow \infty$. Теперь нам предстоит изучить решения уравнения (8) для случая $0 < p \leq p_{\max} < \infty$. Нетрудно заметить, что интегралы в этом уравнении

являются расходящимися, связанными с особенностями кулоновского потенциала, и в связи с чем решения уравнения (8) теряют какой-либо физический смысл.

Схема перенормировки для уравнения Швингера-Дайсона

Для получения решения уравнения Швингера-Дайсона с определенным физическим смыслом необходимо воспользоваться процедурой перенормировки. В литературе известны множество вариантов данной процедуры.

В данной работе мы используем схему перенормировки, в которой расходимости устраняются с добавлением в интеграл функции φ , соответствующей свободному электрону.

$$\begin{cases} E(p) \sin \varphi(p) = 1 + \frac{\alpha}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{dq}{q\sqrt{q^2+1}} + \frac{\alpha}{\pi^2} \int_0^\infty \left(\frac{\sin \varphi(q)q}{p^2+q^2} - \frac{1}{q\sqrt{q^2+1}} \right) dq; \\ E(p) \cos \varphi(p) = p + \frac{\alpha(1-\pi)}{2\pi p} \int_0^\infty \frac{q}{\sqrt{q^2+1}} dq + \frac{\alpha(1-\pi)}{2\pi p} \int_0^\infty \left(\cos \varphi(q) - \frac{q}{\sqrt{q^2+1}} \right) dq. \end{cases} \quad (15)$$

Теперь, если учесть то, что в первых интегралах первой и второй строк этого уравнения имеются расходимости (см. выражения (10) и (14)), уравнение (15) можно переписать следующим образом:

$$\begin{cases} E(p) \sin \varphi(p) = 1 - \frac{\alpha}{\pi^2} \left(\ln \left| \frac{1+\sqrt{h^2+1}}{h} \right| + \ln \left| \frac{1+\sqrt{p_{\max}^2+1}}{p_{\max}} \right| \right) + \frac{\alpha}{\pi^2} \int_0^\infty \left(\frac{\sin \varphi(q)q}{p^2+q^2} - \frac{1}{q\sqrt{q^2+1}} \right) dq; \\ E(p) \cos \varphi(p) = p + \frac{\alpha(1-\pi)}{2\pi p} (h - p_{\max}) + \frac{\alpha(1-\pi)}{2\pi p} \int_0^\infty \left(\cos \varphi(q) - \frac{q}{\sqrt{q^2+1}} \right) dq. \end{cases} \quad (16)$$

Заметим, что уравнение (16) теперь свободно от расходимостей, поскольку в нем единица в правой части первой строки (в которую входит масса электрона) и импульс в правой части второй строки переопределены.

Для решения уравнения (16) удобно привести его к уравнению для одной неизвестной. Умножая первую строку на $\cos \varphi(p)$ и вторую строку на

$\sin\varphi(p)$, затем вычитая из первой строки вторую, получим уравнение для одной функции $\varphi(p)$

$$(1 + A_1 + A_2)\cos\varphi(p) - (p + B_1 + B_2)\sin\varphi(p) = 0 \quad (17)$$

и с помощью уже известной $\varphi(p)$ можно определить значения для одночастичной энергии $E(p)$

$$E(p) = (1 + A_1 + A_2)\sin\varphi(p) + (p + B_1 + B_2)\cos\varphi(p), \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\alpha}{\pi^2} \left(\ln \left| \frac{1 + \sqrt{h^2 + 1}}{h} \right| + \ln \left| \frac{1 + \sqrt{p_{\max}^2 + 1}}{p_{\max}} \right| \right); \\ A_2(p) &= \frac{\alpha}{\pi^2} \int_0^\pi \left(\frac{\sin\varphi(q)q}{p^2 + q^2} - \frac{1}{q\sqrt{q^2 + 1}} \right) dq; \\ B_1(p) &= \frac{\alpha(1 - \pi)}{2\pi p} (h - p_{\max}); \\ B_2(p) &= \frac{\alpha(1 - \pi)}{2\pi p} \int_0^\pi \left(\cos\varphi(q) - \frac{q}{\sqrt{q^2 + 1}} \right) dq. \end{aligned} \quad (19)$$

Таким образом, мы получили нелинейное уравнение (17) без каких-либо расхождений и сингулярностей, которое будет описывать состояние электрона в двумерном пространстве, решением которого можно будет исследовать связанные состояния электрона в двумерном электронном газе, соответствующие квантовому эффекту Холла.

Численное исследование решения уравнения Швингера-Дайсона

Решение уравнения (17) получили численно с использованием непрерывного аналога метода Ньютона [5]. При этом значение параметра $p_{\max}$ определяли подбором и сравнением нескольких последовательных значений по невязке.

На рисунке 1 представлена зависимость фазовой функции электрона от значений импульса. Здесь же в целях выяснения роли кулоновского потенциала во взаимодействии электрона с электронным облаком (поле оставшихся электронов) в двумерном пространстве полученное решение

сопоставляли с решением уравнения Швингера-Дайсона для свободного электрона.

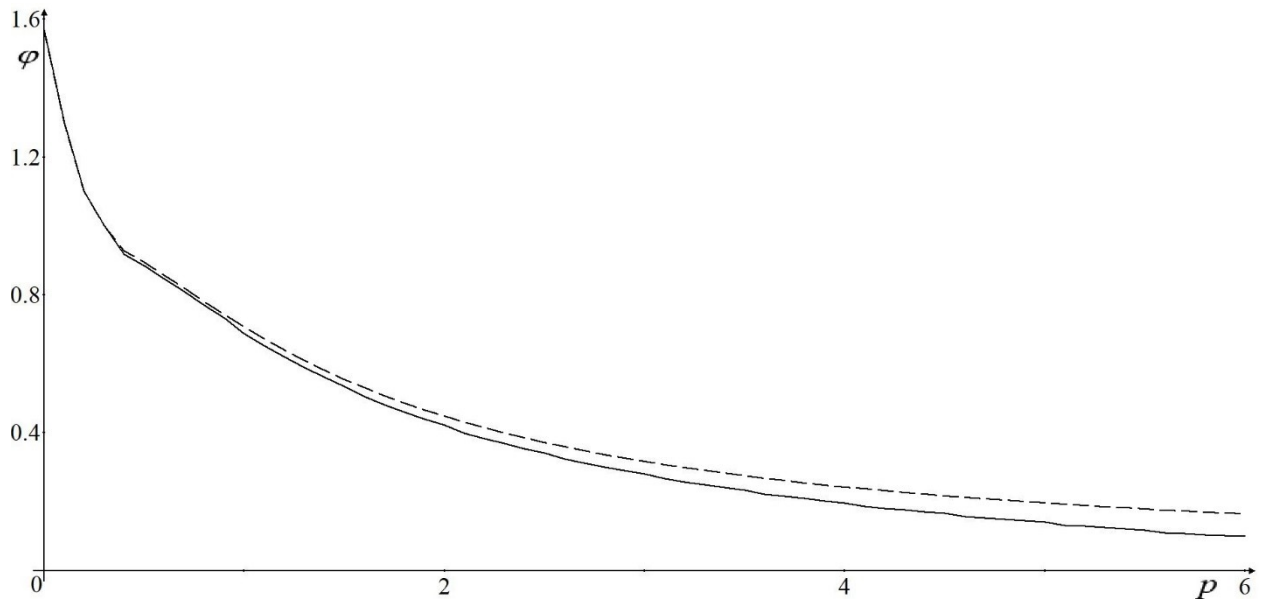


Рис.1. Численные решения уравнения Швингера-Дайсона с кулоновским потенциалом (сплошная линия) и для свободного электрона (пунктирная линия).

Из рисунка видно, что решения для фазовой функции электрона в двумерном пространстве отличаются несильно от случая свободных электронов внутри пространства, особенно при малых импульсах. Это связано с тем, что, на наш взгляд, поведение электрона в двумерном пространстве очень близко для случая со свободной частицей.

С использованием решений для функции $\varphi(p)$ можно вычислить значения энергии электрона $E(p)$ на основании выражения (18). На рисунке 2 представлена зависимость одночастичной энергии, полученная решением уравнения Швингера-Дайсона в приближении двухмерного пространства с кулоновским потенциалом. Здесь также приведена зависимость энергии для свободной частицы.

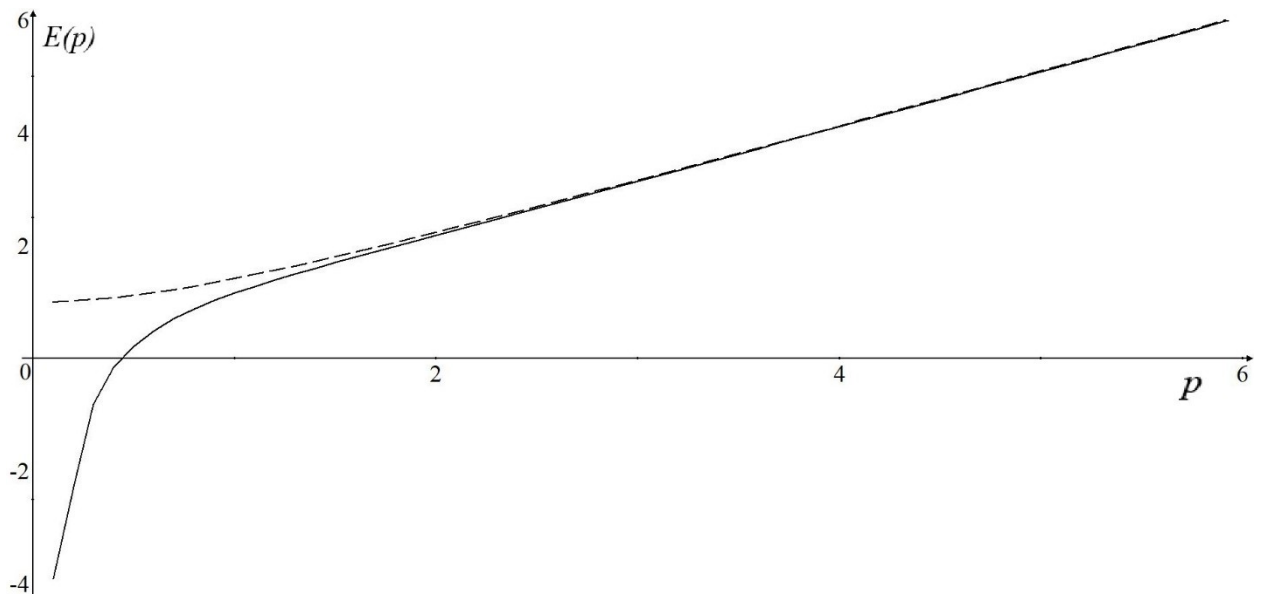


Рис.2. Зависимость одночастичной энергии от импульса с кулоновским потенциалом (сплошная линия) и для свободного электрона (пунктирная линия).

Из рисунка видно, что, в отличие от фазовой функции $\varphi(p)$, расхождение по энергии четко видно при малых значениях ($0 < p < 2$) импульса, где энергия электрона принимает и отрицательные значения. Это свидетельствует в том, что электрон при малых ($0 < p < 0,5$) импульсах будет находится в связанном состоянии. При больших же значениях импульса ($p > 2$) электрон будет вести себя как свободная частица.

Заключение

Итак, подытожим основные результаты исследований, проведенных по изучению состояния электрона в двумерном пространстве в релятивистском приближении с применением уравнения Швингера-Дайсона:

Исследовано уравнение Швингера-Дайсона для состояния электрона в двухмерном пределе кулоновского потенциала. Предложена схема перенормировки, свободная от каких-либо расходимостей и сингулярностей. Получено радиальное уравнение, которое описывает состояние электрона в двумерном пространстве, решением которого можно будет исследовать связанные состояния электрона в двумерном электронном газе.

Получены численные решения для фазовой функции электрона, которые очень близки со случаем решения уравнения Швингера-Дайсона для свободного электрона, особенно при малых импульсах. Это, на наш взгляд, связано с тем, что электрон в приближении двумерного пространства можно считать практически свободной частицей.

Показано, что при малых значениях импульса энергия электрона принимает и отрицательные значения. Данное обстоятельство свидетельствует в том, что электрон при малых импульсах будет находиться в связанном состоянии, а при больших же значениях импульса будет вести себя как свободная частица.

Литература

1. Nasyrov T.Z. Mass spectrum and leptonic decay constants of pseudoscalar mesons // Ukr. J. Phys. 2007. V. 52. 8. P. 723-728.
2. А.А. Солошенко, К.В. Степаньянц. Уравнение Швингера-Дайсона для $N=1$ суперсимметричной теории Янга-Миллса // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия. 2008. № 3. С. 40-42.
3. T. Inagaki. Schwinger-Dyson analysis of 1+2 dimensional QED // TSPU Bulletin. 2014. 12 (153). P. 100-102.
4. В.Е. Рочев. Система уравнений Швингера-Дайсона и асимптотическое поведение в евклидовой области // Ядерная физика. 2015. Т. 78. № 5. С. 475-478.
5. Э.Г. Никонов, Д.С. Казаков. Использование квадратичной интерполяции для ускорения сходимости непрерывного аналога метода Ньютона // Сетевое научное издание «Системный анализ в науке и образовании». 2019. № 3. С. 56-64.; Э.Г. Никонов, Д.С. Казаков. Вычислительная схема повышения устойчивости непрерывного аналога метода Ньютона для решения нелинейных уравнений // Modern high technologies. 2020. № 10. С. 68-72.