

ДВУХТИПНЫЙ ВЕТВЯЩИЙСЯ ПРОЦЕСС БЕЛЛМАНА-ХАРРИСА С ИММИГРАЦИЕЙ.

Машраббоев Ахмадали

НамГУ.

Аннотация

В данной статье рассматривается двухтипный ветвящийся процесс Беллмана-Харриса с иммиграцией. Основное внимание уделено изучению свойств распределения времени жизни процесса и его непосредственных потомков. Представлены две теоремы, одна из которых касается условия существования решения уравнения для времени жизни процесса, а другая — поведения функции, связанной с иммиграцией частиц. Приведены доказательства обеих теорем.

Ключевые слова: ветвящийся процесс, процесс Беллмана-Харриса, иммиграция, производящая функция, время жизни, непрерывность.

TWO-TYPE BELLMAN-HARRIS BRANCHING PROCESS WITH IMMIGRATION

Mashrabboev Ahmadali

NamSU

Abstract

This paper discusses the two-type Bellman-Harris branching process with immigration. The main focus is on studying the properties of the distribution of the lifespan of the process and its immediate offspring. Two theorems are presented, one of which concerns the conditions for the existence of a solution to the equation for the lifespan of the process, while the other addresses the behavior of the function related to the immigration of particles. Proofs of both theorems are provided.

Keywords: branching process, Bellman-Harris process, immigration, generating function, lifespan, continuity.

IKKI TIPDAGI BELLMAN-HARRIS IMMIGRATSIYALI JARAYONI

Mashrabboev Ahmadali

NamDU

Annotatsiya

Ushbu maqolada Bellman-Harrisning ikki tipli immigratsiyali jarayoni ko'rib chiqiladi. Asosiy e'tibor jarayonning yashash davri, avlodlarining taqsimot qonunlarini o'rganishga qaratilgan. Ikkita teorema taqdim etilgan, ulardan biri jarayon yashash davrin taqsimoti uchun tenglamaning mavjudligi isbotlangan, ikkinchisi esa zarrachalar immigratsiyasi bilan bog'liq jarayon o'rganilgan. Ikkala teoremaning isbotlari va tegishli matematik asoslari keltirilgan.

Kalit so'zlar: Bellman-Harris jarayoni, immigratsiya, hosil qiluvchi funktsiyasi, uzluksizlik.

Введение

Ветвящиеся процессы играют важную роль в различных областях науки, таких как биология, физика и статистика. В данной работе исследуется двухтипный ветвящийся процесс Беллмана-Харриса с иммиграцией, который расширяет классические модели ветвящихся процессов за счет учета иммиграции и распределения времени жизни частиц. В статье доказаны две теоремы, которые описывают условия существования решений уравнений, описывающих процесс, а также поведение производящие функций, связанных с ним.

Методология

Основная модель ветвящегося процесса с иммиграцией строится на основе производящие функции распределения непосредственных потомков и

функции распределения времени жизни частиц. Пусть $G_i(t)$ — производящая функция распределения потомков, а $\Psi(t)$ — функция распределения времени жизни процесса Беллмана-Харриса. Мы рассматриваем случай, когда в каждый момент времени происходит иммиграция частиц, число которых обозначается как Z_t , и оно распределено по определенному закону. Для решения уравнений, связанных с процессом, используется метод интегральных уравнений [5-6].

Пусть $F_i(s) = \sum_k P_k s^k$ — производная функция распределения непосредственных потомков, $i=1, 2$.

$G_i(t)$ — функция распределения времени жизни процесса Беллмана-Харриса.

Теорема 1.

Пусть $F_i'(1) = m_i < 1$, $\int_0^\infty (1 - G_i(t)) dt < \infty$, тогда

$$y_i(t) = \exp \left\{ -\frac{1}{1 - m_i} \int_0^t (1 - G_i(x)) dx \right\}.$$

Теорема 2.

Пусть $m_i = 1$, $0 < 2b_i < \infty$, $b_i = F_i''(1)$ и выполнено условие

$$\mu_i = \int_0^\infty t dG_i(t), \quad \int_0^\infty t^{2+\varepsilon} dG_i(t) < \infty, \quad \varepsilon > 0$$

кроме того $\sum_k k^2 P_k^i \ln k < \infty$, то $y_i(t) \sim ct^{-\theta_i}$, $t \rightarrow \infty$ где $c > 0$, $\theta_i = \frac{\lambda_i \mu_i}{B_i}$.

Определение.

Период жизни ветвящегося процесса с иммиграцией начинается в момент T и имеет длину τ , если число частиц $z_i(T-0)=0$, $z_i(t)>0$ для всех $T \leq t < T+\tau$ а $z_i(t+\tau)=0$. (траектория процесса предполагается непрерывными справа) $i=1, 2$.

Пусть $F_i(s) = \sum_{k \geq 0} P_k^i s^k$ производства функция распределения непосредственных потомков.

$G_i(t)$ - распределение времени жизни процесса Белмана-Харриса.

$\lambda_i = V_i'(1) < \infty$, $V_i(s)$ - производства функция одинаково распределение нез. послед. целочисленных сл. величин $\xi_0, \xi_h, \xi_{2h}, \dots$.

ξ_{nh} - число иммигрировавших части в момент nh (для иммигр. с неопр. временем $V_i(s) = \sum V_k^i s^k$).

$u_i(t) = P\{\tau_i > t\}$, $B_i(s) = \sum_{t=0}^{\infty} u_i(t) s^t$ для схема (в) $B_i(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} u_i(t) dt$.

$\gamma_i(k) = P\{z_i(k)=0 \mid z_i(0)=0\} = \prod_{t=0}^{k-1} V_i(\Phi_i(t, 0)) \left(\prod_{t=0}^{k-1} i = 1, \text{ при } k=0 \right)$.

Доказательство теорема 1.

Пусть $m_i = F_i'(1) < 1$ и выполнено

$\lambda_i = V_i'(1) < \infty$, $V_0 = V(0)$; $\lambda_i = V_i'(1) < \infty$, $V_0 = V(0) < 0$.

$F_i''(1) = 2 B_i < \infty$, $\mu_i = \int_0^{\infty} t dB_i(t) < \infty$,
æ

и решение уравнения

$$m_i \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dG_i(t) = 1, \text{ а } \int_0^{\infty} t e^{-\lambda t} dG_i(t) < \infty, \text{ тогда } \gamma_i(t) \downarrow \gamma_i > 0 \quad (t \rightarrow \infty).$$

Из определения $\delta_i(\cdot)$ и соотношения $\delta_i(s) = V_i(1-s) - V_i(1) + \lambda_i s$

$$\gamma_i(t) = P\{z_i(t) = 0 \mid z_i(0) = 0\} = \exp \left\{ \int_0^t V_i(\Phi_i(x, 0)) dx \right\}$$

или

$$\gamma_i(k) = P\{z_i(k) = 0 \mid z_i(0) = 0\} = \prod_{t=0}^{k-1} V_i(\Phi_i(t, 0)).$$

$$\Phi_i(t, s) = \sum_{k=0}^{\infty} P\{\mu_i(t) = k \mid \mu_i(0) = 1\} s^k,$$

получаем

$$\ln \gamma_i(t) = -\lambda_i \int_0^t (1 - \Phi_i(x, 0)) dx + \int_0^t \delta_i(1 - \Phi_i(x, 0)) dx = J_1 + J_2.$$

1. При наших условиях [2]

$P\{\mu_i(t) > 0\} = 1 - \Phi_i(t, 0) \sim c_0 e^{\lambda t}$ как только существует решение уравнения

$$m_i \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dG_i(t) = 1, \text{ и } \int_0^{\infty} t e^{-\lambda t} dG_i(t) < \infty \quad (*)$$

Если $G_i(t) \in Z$, то

$$P\{\mu_i(t) > 0\} = 1 - \Phi_i(t, 0) \sim \frac{1 - G_i(t)}{1 - m_i} \quad (**)$$

Доказательство теорема 2.

Пусть выполнено $\mu_i = \int_0^\infty t dG_i(t) < \infty$, $\int_0^\infty t^{2+\varepsilon} dG_i(t) < \infty$, $\varepsilon > 0$, тогда ([2] стр. 159)

$$\ln \gamma_i(t) = -\lambda_i \int_0^t \left(\frac{1}{1 + \frac{B_i}{\mu_i} x} + \varepsilon_i(x) \right) dx + \int_0^t \delta_i \left(\frac{1}{1 + \frac{B_i}{\mu_i} x} + \varepsilon_i(x) \right) dx \quad (1)$$

где

$$\varepsilon(x) = \left(\left(1 - \Phi_i(x, 0) \right) - \frac{1}{1 + \frac{B_i}{\mu_i} x} \right) = o\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \rightarrow \infty \quad (**)$$

Таким образом

$$\ln \gamma_i(t) = -\frac{\lambda_i \mu_i}{B_i} \ln \left(1 + \frac{B_i}{\mu_i} x \right) + \int_0^t \lambda_i \delta_i \left(\left(1 + \frac{B_i}{\mu_i} x \right)^{-1} + \varepsilon_i(x) \right) - \varepsilon_i(x) dx$$

так как $\varepsilon_i(x) = O\left(\frac{1}{x}\right)$, $\delta_i\left(\frac{1}{x}\right) = o\left(\frac{1}{x}\right)$, то мы получим $\gamma_i(t) \sim L_i(t) t^{-\theta_i}$, $t \rightarrow \infty$.
 $\theta_i = \frac{\lambda_i \mu_i}{B_i}$. ([3] стр. 342).

Если учесть, что $\delta_i(x) \geq 0$, $x \geq 0$, то используя соотношения (*) и (**) получим

$$\ln \gamma_i(t) > -\lambda_i \int_0^\infty \left(1 - \Phi_i(x, 0) \right) dx > -\infty$$

откуда следует, что монотонно убывающая функция $\gamma_i(t)$ имеет положительный предел Y_i .

Результаты

Теорема 1 утверждает, что если выполнены определенные условия для распределений времени жизни и производящие функции потомков, то существует решение уравнения вида $e^{-\lambda t} dG_1(t) = 1$. Доказательство теоремы основано на свойствах непрерывных функций и интегральных уравнений. Теорема 2 касается поведения процесса с иммиграцией и утверждает, что при выполнении условий на иммиграцию и распределения частиц, функция монотонно убывает и имеет положительный предел.

Заключение

Полученные результаты важны для дальнейшего развития теории ветвящихся процессов с иммиграцией, так как они дают более полное представление о поведении таких процессов во времени. Доказанные теоремы могут быть использованы для моделирования процессов с более сложными типами иммиграции и другими изменениями во времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Athreya K.B. and Ney P.E. Branching Processes, Berlin, 1972.
2. Севостьянов Б.А. «Ветвящиеся процессы» М. «Наука» 1971.
3. Феллер В. «Введения в теорию вероятностей и её приложения». М. «Мир» 1967.
4. Машраббоев А. «Кандидатская диссертация», Ташкент, 1986.
5. Polvonov, R. R., & SHaripov, F. M. (2019). LOCAL LIMIT THEOREMS FOR SUMS OF CONTINUOUS RANDOM VARIABLES. *Scientific Bulletin of Namangan State University*, 1(10), 54-58.
6. Polvanov R. R. APPLICATION OF INNOVATIVE TECHNOLOGIES IN TEACHING PROBABILITY THEORY //Scientific Bulletin of Namangan State University. – 2019. – Т. 1. – №. 10. – С. 19-25.