

Oqboyev Akmaljon Baxromjonovich

V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika Instituti

akmaljon12012@gmail.com

GAUSS GIPERGEOMETRIK FUNKSIYALARI QATNASHGAN BA'ZI AYNIYATLAR

Annotatsiya. Ushbu ishda Gaussning gipergeometrik funksiyasi ishtirok etgan ikkita ayniyatni Laplas almashtirishi yordamida isbotlangan. Isbotlash jarayonida maxsus funksiyalar nazariyasi elementidan foydalanilgan, bu esa natijani qat'iyroq asoslash imkonini berdi.

Kalit so'zlar. Gauss gipergeometrik funksiyasi, Kampe de Feriet funksiyasi, Laplas almashtirishi

Окбоев Акмалжон Бахромжонович

Институт математика им. В.И. Романовского

НЕКОТОРЫЕ ТОЖДЕСТВА С УЧАСТИЕМ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ГАУССА

Аннотация. В данной работе два тождества, содержащие гипергеометрическую функцию Гаусса, доказаны посредством применения преобразования Лапласа. В процессе доказательства был применён элемент теории специальных функций, что позволило обосновать результат более строго.

Ключевые слова. Гипергеометрическая функция Гаусса, функция Кампе де Ферьет, преобразование Лапласа.

Okboev Akmaljon

V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics

SOME IDENTITIES INVOLVING GAUSS HYPERGEOMETRIC FUNCTIONS

Abstract. In this paper, two identities containing the Gauss hypergeometric function are proved by applying the Laplace transform. In the process of proof, an element of the theory of special functions was applied, which allowed us to justify the result more rigorously.

Key words: Gauss hypergeometric function, Campe de Feriet function, Laplace transform.

Гипергеометрические функции имеют широкий спектр практических применений в физике, технике, математической статистике и других областях. Они используются для анализа и решения различных задач теории дифференциальных уравнений. Например, в работах [1-6] задача решалась с использованием свойств гипергеометрических функций.

В работах [7-11] явные решения задачи было найдено с помощью тождеств, содержащих гипергеометрических функций.

В этой статье мы доказываем тождество, с участием гипергеометрических функций.

Теорема 1. Если $a \geq b > 0$, $x \geq 0$, то имеет место равенство

$$\sum_{k_1=0}^{n_1} \dots \sum_{k_m=0}^{n_m} \prod_{i=1}^m \binom{n_i}{k_i} \frac{(-1)^k (1/2 - b)_k}{(n+a)_k} \times \\ \times (4x)^k F \left(\begin{matrix} n-k+b, -n+k-b+1; \\ n+k+a; \end{matrix} x \right) = \\ = F \left(\begin{matrix} 1+n-b, -n+b; \\ n+a; \end{matrix} x \right), \quad (1)$$

где $m, n_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, 2, \dots, m$,

$n = n_1 + \dots + n_m$, $k = k_1 + \dots + k_m$,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = (-1)^k \frac{(-n)_k}{k!},$$

$$(a)_k = \begin{cases} 1, & k=0; \\ a(a+1) \dots (a+k-1), & k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Тождество (1) было доказано Н. К. Мамадалиевым при $m=1$ и $b=a-1$

[8]. В работе [10] тождество (1) доказана при $m=2$ и $b=a-1$.

Согласно этому обозначению

$$F_{C:D^{(1)}; \dots; D^{(n)}}^{A:B^{(1)}; \dots; B^{(n)}} \left(\begin{matrix} [a: \theta^{(1)}, \dots, \theta^{(n)}] : [b^{(1)}: \varphi^{(1)}]; \dots \\ [c: \psi^{(1)}, \dots, \psi^{(n)}] : [d^{(1)}: \delta^{(1)}]; \dots \\ \dots; [b^{(n)}: \varphi^{(n)}]; \\ \dots; [d^{(n)}: \delta^{(n)}]; \end{matrix} x_1, \dots, x_n \right) =$$

$$= \sum_{m_1, \dots, m_n=0}^{\infty} \Omega(m_1, \dots, m_n) \frac{x_1^{m_1}}{m_1!} \dots \frac{x_n^{m_n}}{m_n!},$$

$$\Omega(m_1, \dots, m_n) = \frac{\prod_{j=1}^A (a_j)_{m_1 \varphi_j^{(1)} + \dots + m_n \varphi_j^{(n)}}}{\prod_{j=1}^C (c_j)_{m_1 \psi_j^{(1)} + \dots + m_n \psi_j^{(n)}}} \times$$

$$\times \frac{\prod_{j=1}^{B^{(1)}} (b_j^{(1)})_{m_1 \varphi_j^{(1)}} \dots \prod_{j=1}^{B^{(n)}} (b_j^{(n)})_{m_n \varphi_j^{(n)}}}{\prod_{j=1}^{D^{(1)}} (d_j^{(1)})_{m_1 \delta_j^{(1)}} \dots \prod_{j=1}^{D^{(n)}} (d_j^{(n)})_{m_n \delta_j^{(n)}}},$$

введенному Сиривастава и Даоустом [12], левая часть утверждения (1) может быть записана следующим образом

$$\sum_{k_1=0}^{n_1} \dots \sum_{k_m=0}^{n_m} \prod_{i=1}^m \binom{n_i}{k_i} \frac{(-1)^k (1/2 - b)_k}{(n+a)_k} \times \\ \times (4x)^k F \left(\begin{matrix} n-k+b, -n+k-b+1; \\ n+k+a; \end{matrix} x \right) = \\ \sum_{k_1=0}^{n_1} \dots \sum_{k_m=0}^{n_m} \sum_{l=0}^{\infty} \prod_{i=1}^m \frac{(-n_i)_{k_i} (1/2 - b)_{k_i}}{(n+a)_{k_i}} \times \\ \times \frac{(n-k+b)_l (-n+k-b+1)_l (4x)^{k_l}}{(n+k+a)_l} \frac{x^l}{k_l! l!} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k_1=0}^{n_1} \dots \sum_{k_m=0}^{n_m} \prod_{i=1}^m \frac{(-n_i)_{k_i} (1/2-b)_k}{(n+a)_k} \times \\
&\quad \times \frac{(-1)^l (1-n-b)_{k+l} (4x)^{k_l} x^l}{(1-n-b)_{k+l} k_l! l!} = \\
&F_{2:m;0;\dots;0}^{2:0;0;\dots;0} \left(\begin{matrix} [1/2-b:1,\dots,1,0], [1-n-b:1,\dots,1,1]: \\ [n+a:1,\dots,1,1], [1-n-b:1,\dots,1,-1]: \\ [-n_1:1], \dots, [-n_m:1]; -; \dots; - \\ \dots; -; \dots; -; \end{matrix} \quad 4x, \dots, 4x, -x \right).
\end{aligned}$$

Доказательство. Докажем лемму методом преобразование Лапласа. Напишем левую часть тождество (1) в виде

$$\begin{aligned}
&\sum_{k_1=0}^{n_1} \dots \sum_{k_m=0}^{n_m} \prod_{i=1}^m \frac{(-1)^{k_i} (1/2-b)_k}{(n+a)_k} \times \\
&\times (4x)^k F \left(\begin{matrix} n-k+b, -n+k-b+1; \\ n+k+a; \end{matrix} x \right) = \\
&= x^{-a-n+1} B \left(\begin{matrix} a, b; \\ n_m; \end{matrix} x \right), \quad (2)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
B \left(\begin{matrix} a, b; \\ n; \end{matrix} x \right) &= \sum_{k_1=0}^{n_1} \dots \sum_{k_m=0}^{n_m} \prod_{i=1}^m \frac{(-1)^{k_i} (1/2-b)_k}{(n+a)_k} 4^k \times \\
&\times x^{a+n+k-1} F \left(\begin{matrix} n-k+b, -n+k-b+1; \\ n+k+a; \end{matrix} x \right). \quad (3)
\end{aligned}$$

Сделав замену $x = 1 - e^{-t}$, $t > 0$ в (3), получим

$$\begin{aligned}
B \left(\begin{matrix} a, b; \\ n; 1-e^{-t} \end{matrix} \right) &= \sum_{k_1=0}^{n_1} \dots \sum_{k_m=0}^{n_m} \prod_{i=1}^m \frac{(-1)^{k_i} (1/2-b)_k}{(n+a)_k} 4^k (1-e^{-t})^{a+n+k-1} \times \\
&\times F \left(\begin{matrix} n-k+b, -n+k-b+1; \\ n+k+a; \end{matrix} 1-e^{-t} \right).
\end{aligned}$$

Пусть

$$\begin{aligned}
\Phi \left(\begin{matrix} a, b; \\ n; p \end{matrix} \right) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} B \left(\begin{matrix} a, b; \\ n; 1-e^{-t} \end{matrix} \right) dt \leftrightarrow \\
&\leftrightarrow B \left(\begin{matrix} a, b; \\ n; 1-e^{-t} \end{matrix} \right).
\end{aligned}$$

Пользуясь таблицей изображений [13]

$$\begin{aligned}
(1-e^{-t})^{c-1} F \left(\begin{matrix} a, b; \\ c; 1-e^{-t} \end{matrix} \right) &\leftrightarrow \\
&\leftrightarrow \frac{\Gamma(p)\Gamma(c-a-b+p)\Gamma(c)}{\Gamma(c-a+p)\Gamma(c-b+p)} \quad (4)
\end{aligned}$$

найдем изображение $\Phi(a, b; n; p)$:

$$\begin{aligned}
\Phi \left(\begin{matrix} a, b; \\ n; p \end{matrix} \right) &= \sum_{k_1=0}^{n_1} \dots \sum_{k_m=0}^{n_m} \prod_{i=1}^m \frac{(-1)^{k_i} (1/2-b)_k}{(n+a)_k} (-4)^k \times \\
&\times \frac{\Gamma(p)\Gamma(a+k+n+p-1)\Gamma(a+n+k)}{\Gamma(a+2k-b+p)\Gamma(a+2n+b+p-1)}.
\end{aligned}$$

Используя обобщенную формулу понижения

$$\Gamma(n+y) = (y)_n \Gamma(y), \quad y > 0 \quad (5)$$

и формулы

$$(a)_{2k} = 4^k (a/2)_k (a/2+1/2)_k, \quad (6)$$

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (a)_k (b)_k}{k!(c)_k (d)_k} = {}_3F_2 \left(\begin{matrix} -n, a, b; 1 \\ c, d \end{matrix} \right),$$

имеем

$$\begin{aligned}
\Phi \left(\begin{matrix} a, b; \\ n; p \end{matrix} \right) &= \frac{\Gamma(p)\Gamma(a+n+p-1)\Gamma(a+n)}{\Gamma(a-b+p)\Gamma(a+2n+b+p-1)} \times \\
&\times \sum_{k_1=0}^{n_1} \dots \sum_{k_m=0}^{n_m} \frac{\prod_{i=1}^m (-n_i)_{k_i} \left(\frac{1}{2}-b \right)_k (a+n+p-1)_k}{\prod_{i=1}^m k_i! \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2} + \frac{p}{2} \right)_k \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2} + \frac{p}{2} + \frac{1}{2} \right)_k}
\end{aligned}$$

или

$$\Phi \left(\begin{matrix} a, b; \\ n; p \end{matrix} \right) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(a+n+p-1)\Gamma(a+n)}{\Gamma(a-b+p)\Gamma(a+2n+b+p-1)} \times$$

$$\times F_{2,0;1,0}^{2,1,\dots,1} \left(\begin{matrix} \frac{1}{2} - b, & a+n+p-1; -n_1; \dots; -n_m \\ \frac{a}{2} - \frac{b}{2} + \frac{p}{2}, \frac{a}{2} - \frac{b}{2} + \frac{p}{2} + \frac{1}{2}; -; \dots; - \end{matrix} \right)_{1, \dots, 1},$$

где $F_{1;n_1; \dots; n_m}^{p;q_1; \dots; q_m}(\square)$ - функция Кампе де Ферриета (Kamp'e de F'eriet) [12]

$$\begin{aligned} F_{1;n_1; \dots; n_m}^{p;q_1; \dots; q_m} \left(\begin{matrix} (a_p); (b_{q_1}^{(1)}); \dots; (b_{q_m}^{(m)}) \\ (\alpha_j); (\beta_{n_1}^{(1)}); \dots; (\beta_{n_m}^{(m)}) \end{matrix} \right)_{x_1, \dots, x_m} = \\ = \sum_{k_1, \dots, k_m=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^p (a_j)_{k_1 + \dots + k_m} \prod_{j=1}^{q_1} (b_j^{(1)})_{k_1} \dots \prod_{j=1}^{q_m} (b_j^{(m)})_{k_m}}{\prod_{j=1}^1 (\alpha_j)_{k_1 + \dots + k_m} \prod_{j=1}^{n_1} (\beta_j^{(1)})_{k_1} \dots \prod_{j=1}^{n_m} (\beta_j^{(m)})_{k_m}} \times \\ \times \frac{x_1^{k_1}}{k_1!} \dots \frac{x_m^{k_m}}{k_m!}. \end{aligned}$$

Используя формулу [12. Ст. 39, ф. 32]

$$\begin{aligned} F_{q;0; \dots; 0}^{p;1; \dots; 1} \left(\begin{matrix} (a_p); \nu_1; \dots; \nu_m \\ (b_q); -; \dots; - \end{matrix} \right)_{x, \dots, x} = \\ = {}_{p+1}F_q \left(\begin{matrix} (a_p); \nu_1 + \dots + \nu_m; x \\ (b_q) \end{matrix} \right), \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned} \Phi \left(\begin{matrix} a, b; \\ n; p \end{matrix} \right) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(a+n+p-1)\Gamma(a+n)}{\Gamma(a-b+p)\Gamma(a+2n+b+p-1)} \times \\ \times {}_3F_2 \left(\begin{matrix} -n, \frac{1}{2} - b, a+n+p-1; 1 \\ \frac{a}{2} - \frac{b}{2} + \frac{p}{2}, \frac{a}{2} - \frac{b}{2} + \frac{p}{2} + \frac{1}{2} \end{matrix} \right). \end{aligned}$$

Применяя формулу [14, ст.454, ф. 87]

$${}_3F_2 \left(\begin{matrix} -n, a, b; 1 \\ c, 1+a+b-c-n \end{matrix} \right) = \frac{(c-a)_n (c-b)_n}{(c)_n (c-a-b)_n},$$

получаем выражение

$$\begin{aligned} \Phi \left(\begin{matrix} a, b; \\ n; p \end{matrix} \right) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(a+n+p-1)\Gamma(a+n)}{\Gamma(a-b+p)\Gamma(a+2n+b+p-1)} \times \\ \times \frac{\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{p}{2} - \frac{1}{2} \right)_n}{\left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2} + \frac{p}{2} \right)_n} \times \\ \times \frac{\left(-\frac{a}{2} - \frac{b}{2} - \frac{p}{2} - n + 1 \right)_n}{\left(-\frac{a}{2} + \frac{b}{2} - \frac{p}{2} + \frac{1}{2} - n \right)_n}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание формулы

$$(a-n)_n = (-1)^n (1-a)_n,$$

(5) и (6) получаем

$$\begin{aligned} \Phi \left(\begin{matrix} a, b; \\ n; p \end{matrix} \right) = \frac{\Gamma(a+n+p-1)}{\Gamma(a-b+p+2n)} \times \\ \times \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(p)}{\Gamma(a+b+p-1)}. \end{aligned}$$

Согласно формулу (4) находим оригинал

$$\begin{aligned} \Phi \left(\begin{matrix} a, b; \\ n; p \end{matrix} \right) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(a+n+p-1)\Gamma(a+n)}{\Gamma(a-b+p+2n)\Gamma(a+b+p-1)} \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (1-e^{-t})^{a+n-1} F \left(\begin{matrix} b-n, 1-b+n; \\ a+n; 1-e^{-t} \end{matrix} \right) = \\ = B \left(\begin{matrix} a, b; \\ n; 1-e^{-t} \end{matrix} \right), a+n > 0. \end{aligned}$$

Сделав замену $e^{-t} = 1-x$, имеем

$$B \left(\begin{matrix} a, b; \\ n; x \end{matrix} \right) = x^{a+n-1} F \left(\begin{matrix} b-n, 1-b+n; \\ a+n; x \end{matrix} \right).$$

Затем, подставив $B(a, b; n; x)$ в (2), получим (1). Теорема 1 доказана.

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 2. Если $a \geq b > 0, x \geq 0$, то

$$\sum_{k_1=0}^{n_1} \dots \sum_{k_m=0}^{n_m} \prod_{i=1}^m \binom{n_i}{k_i} \frac{(a-n)_k}{(1/2+b)_k} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \times \\ \times F\left(\begin{matrix} c+k, a+b+2k-2n; \\ 2b+2k; x \end{matrix}\right) = \frac{\Gamma(2b)\Gamma(a)}{\Gamma(a+b)\Gamma(b)} \times \\ \times x^{1-2b} (1-x)^{a-1} F\left(\begin{matrix} 1-a-b, 1-b; \\ 1-a; 1-x \end{matrix}\right).$$

Заключение

Доказанные выше тождества могут быть использованы для исследования различных краевых задач, связанных с уравнениями сильно вырождающегося гиперболического и смешанного типов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Salakhitdinov MS, Urinov AK. Eigenvalue problems for a mixed-type equation with two singular coefficients. *Siberian Mathematical Journal*. 2007 Jul 1;48(4):707-17.
2. Т.Д.Джураев, Ю.П.Апаков, “Об автомодельном решении одного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками”, Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2(15) (2007), 18–26
3. Hasanov A. Fundamental solutions of generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation. *Complex Variables and Elliptic Equations*. 2007 Aug 1;52(8):673-83.
4. A. K. Urinov, T. G. Ergashev, “Confluent hypergeometric functions of many variables and their application to the finding of fundamental solutions of the generalized helmholtz equation with singular coefficients”, *Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh.*, 2018, no. 55, 45–56
5. Hasanov A, Karimov ET. Fundamental solutions for a class of three-dimensional elliptic equations with singular coefficients. *Applied Mathematics Letters*. 2009 Dec 1;22(12):1828-32.
6. B. Y. Irgashev (2023) Application of hypergeometric functions to the construction of particular solutions, *Complex Variables and Elliptic Equations*, DOI: [10.1080/17476933.2023.2270910](https://doi.org/10.1080/17476933.2023.2270910)
7. Салахитдинов М.С., Эргашев Т.Г. Интегральное представление обобщенного решения задачи Коши в классе $R^{\lambda_{2k}}$ для одного уравнения гиперболического типа второго рода, *Узбекский математический журнал*, 1995, №1. С.67-75
8. Mamadaliev, N. K. (2014). Tricomi problem for an elliptic-hyperbolic equation of the second kind. *Eurasian Mathematical Journal*, 5(3), 80-92.
9. Ergashev T.G., Komilova N.J. The Kampe de Fariet series and the regular solution of the Cauchy problem for degenerating hyperbolic equation of the second kind. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2022 Nov;43(11):3112-24.

10. Okboev A.B., (2020) Tricomi problem for second kind parabolic hyperbolic type equation. Lobachevskii Journal of Mathematics, 41(1), pp.58-70.
11. Urinov, A. K., Okboev, A. B. (2020). Nonlocal boundary-value problem for a parabolic-hyperbolic equation of the second kind. Lobachevskii Journal of Mathematics, 41(9), 1886-1897.
12. Н. М. Srivastava, М. С. Daoust. On Eulerian integrals associated with Kampé de Fériet's function. Publ. Inst. Math. (Beograd)
13. Г. Бейтман А. Эрдейи и др., Таблицы интегральных преобразований, Т 1.
14. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Т.3. Специальные функции. Дополнительные главы. -2-е изд., исправ. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 668 с.
15. Н. М. Srivastava and P. W. Karlsson(1985), Multiple Gaussian Hypergeometric Series, Halsted Press (Ellis Horwood Limited, Chichester); Wiley, New York, Chichester, Brisbane, and Toronto.