

Kommutativ kvaternion sonlar va ularning ba'zi xossalari

Jo'raboyev Saidaxbor Solijonovich

Farg'ona davlat universiteti

Fizika-matematika fanlari bo'yicha falasafa doktori (PhD),

Ro'zikov Maxammadjon Mamirali og'li

Farg'ona davlat universiteti, o'qituvchi

E.mail. saidaxbor.juraboyev@mail.ru, ruzikov91uz@mail.ru

Annotatsiya. Ushbu maqolada kommutativ kvaternion sonlarning ba'zi xususiyatlari o'rganilgan

Tayanch so'zlar: kvaternion sonlar, kommutativ kvaternion sonlar

КОММУТАТИВНЫЕ КВАТЕРНИОНЫ И НЕКОТОРЫЕ ИХ СВОЙСТВА

Журабоев Саидахбор Солижонович

Ферганский государственный университет,

Доктор философии (PhD) по физико-математическим наукам,

Рузигов Махаммаджон Мамиралли угли

Ферганский государственный университет, преподаватель

E.mail. saidaxbor.juraboyev@mail.ru, ruzikov91uz@mail.ru

Аннотация: В данной статье изучаются некоторые свойства коммутативных кватернионов.

Ключевые слова: кватернионные числа, коммутативные кватернионные числа.

COMMUTATIVE QUATERNIONS AND SOME OF THEIR PROPERTIES

Juraboyev Saidakhbor Solyjonovich

Fergana state university,

Doctor of Philosophy (PhD) in Physical and Mathematical Sciences,

Ruzikov Makhammadjon Mamirali ugli

Fergana state university, teacher

E.mail. saidaxbor.juraboyev@mail.ru, ruzikov91uz@mail.ru

Abstract: This paper studies some properties of commutative quaternions.

Key words: quaternion numbers, commutative quaternion numbers.

Kirish

Ma'lumki, Gamilton (1805-1865) tomonidan kiritilgan kvaternion sonlar bugungi kunda geometriya, mexanika, astronomiya, matematik analiz kabi fan soxalarida o'zining muhim tadbirlariga ega. Quyida ushbu sonlarning ta'rifi va muhim xossalari keltirib o'tamiz:

1. Kvaternion sonlar

1-ta'rif. Kvaternion son deb i, j, k noma'lumli $a + bi + cj + dk$ ko'rinishidagi ifodalarga aytiladi, bu yerda a, b, c, d - haqiqiy sonlar, [1].

1-ta'rifda keltirilgan i, j, k - noma'lumlar $q = a + bi + cj + dk$ kvaternionning mavhum birliklari va ular quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1; ij = -ji = k; jk = -kj = i; ki = -ik = j.$$

Kvaternion sonlar orasidagi tenglik munosabati, qo'shish, ko'paytirish amallari xuddi i, j, k noma'lumli ko'phadlardagi kabi amalga oshiriladi, ya'ni agar $q_1 = a_1 + b_1i + c_1j + d_1k$, $q_2 = a_2 + b_2i + c_2j + d_2k$ bo'lsa,

$$1) q_1 = q_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2, d_1 = d_2;$$

$$2) q_1 + q_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k;$$

$$3) q_1 \cdot q_2 = (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)i + \\ + (a_1c_2 + c_1a_2 + d_1b_2 - b_1d_2)j + (a_1d_2 + d_1a_2 + b_1c_2 - c_1b_2)k.$$

Odatda, 3) ko'paytma Grassman ko'paytmasi deyiladi, [1].

Aytaylik, H barcha kvaternion sonlar to'plami bo'lsin. Tekshirib ko'rish qiyin emaski, H to'plam yuqorida kiritilgan 2) qo'shish amaliga nisbatan *additiv grupp*a bo'ladi. Bu holda, *birlik va teskari elementlar* sifatida mos holda, $0 = 0 + 0i + 0j + 0k$ va $-q = -a - bi - cj - dk$ kvaternionlar olinadi. Bu ko'rinishda aniqlangan kvaternionlar H additiv gruppani mos holda, *nol va qarama-qarshi elementlari* deyiladi. Shuningdek, ixtiyoriy $q \in H$ kvaternion uchun $a - bi - cj - dk$ ko'rinishida aniqlangan kvaternion q kvaternionning *Ermit qo'shmasi* (qisqacha, qo'shmasi) deyiladi va $\bar{q}$ ko'rinishida belgilanadi.

Har qanday kvaternion sonlarning qo'shmasi uchun quyidagi shartlar o'rinli:

$$a) \quad \bar{\bar{q}} = q, \quad \overline{(q_1 + q_2)} = \bar{q}_1 + \bar{q}_2, \quad \bar{0} = 0;$$

shuningdek, agar $q = a + bi + cj + dk$ kvaternionning *haqiqiy qismi* (a) va *mavhum qismi* ($bi + cj + dk$) mos holda, $\text{Re}(q)$ va $\text{Im}(q)$ orqali belgilansa, ular uchun

$$b) \quad \text{Re}(q) = \frac{q + \bar{q}}{2}, \quad \text{Im}(q) = \frac{q - \bar{q}}{2};$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.

Ma'lumki, noldan farqli kvaternion sonlar to'plami 3) ko'paytirish amaliga nisbatan *nokommutativ grupp*a hosil qiladi, [1]. Bu holda, ushbu multiplikativ gruppaning birlik va teskari elementlari sifatida mos holda, $1 = 1 + 0i + 0j + 0k$

hamda $q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}$, ($q \neq 0$) kvaternionlar olinadi, bu yerda

$|q| = \sqrt{q \cdot \bar{q}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ haqiqiy son bo'lib, q kvaternionning *normasi* deyiladi. Bulardan tashqari, H to'plamda 2), 3) ko'rinishda aniqlangan qo'shish va ko'paytirish amallari uchun *distributivlik xossasi* bajariladi, ya'ni ixtiyoriy $q, q_1, q_2 \in H$ kvaternionlar uchun

$$q \cdot (q_1 + q_2) = q \cdot q_1 + q \cdot q_2, \quad (q_1 + q_2) \cdot q = q_1 \cdot q + q_2 \cdot q.$$

Yuqorida keltirilgan barcha xossalardan quyidagi natija kelib chiqadi:

Natija. $(H, ; +)$ to'plam kvaternion sonlar jismini ifodalaydi.

Ammo, kvaternion sonlarni ko'paytirish amaliga nisbatan nokommutativ bo'lishi ko'plab tadqiqot ishlaridagi hisoblashlarni murakkab ko'rinishga olib keladi. Shuningdek, algebra, matematik analizga tegishli ko'plab tushunchalar, jumladan determinant, uzluksizlik, hosila kabi muhim tushunchalar o'zining tabiiy xususiyatlaridan chetga chiqishiga olib keladi.

Adabiyotlar tahlili

XIX asrning 90-yillarida C.Segre ko'paytirish amaliga nisbatan kommutativlik xususiyatini saqlovchi *kommutativ kvaternion sonlarni* fanga olib kirdi, [2]. Shu davrda F.Catoni, R.Cannata, P.Zampeti kabi olimlar tomonidan

kommutativ kvaternion sonlarni kompleks sonlar nazariyasi yordamida atroflicha tahlil qilindi, [3].

XXI asrda H. H. Kosal va Murat Tosun tomonidan kommutativ kvaternion sonlar va kommutativ kvaternion matritsalar tushunchalari o'rganilgan. Shuningdek bu olimlar tomonidan funksional analizning muhim teoremlari kommutativ kvaternion matritsalar to'plamida isbotlangan, [4].

Yuqorida sanab o'tilgan ishlarda kommutativ kvaternion sonlar to'plami kiritilgan amallarga nisbatan qanday algebraik struktura hosil qilishi haqidagi masalalar ochiq qoldirilgan. Quyida kommutativ kvaternion sonlar to'plamini ba'zi xususiyatlarini o'rganamiz va olingan natijalar yordamida kvaternion sonlar to'plamining qanday struktura tashkil qilishi haqidagi dastlabki hulosalarni beramiz.

Tadqiqot metodologiyasi

2. Kommutativ kvaternion sonlar.

Aytaylik, H to'plam $q = t + xi + yj + zk$ ko'rinishida aniqlangan sonlar to'plami bo'lsin, bu yerda $t, x, y, z \in R; i, j, k \notin R$ bo'lib,

$$i^2 = k^2 = -1; j^2 = 1; ij = ji = k; jk = kj = i; ki = ik = -j$$

shartlar o'rinli. H to'plam elementlari orasida qo'shish va ko'paytirish amallari to'rt no'malumli $t_1 + x_1i + y_1j + z_1k$ ko'phadlarni qo'shish va ko'paytirish kabi aniqlanadi. Quyida qo'shish amali va uning xossalarini ko'rib chiqamiz:

$\forall q_1, q_2 \in H$ elementlar mos holda $q_1 = t_1 + x_1i + y_1j + z_1k$, $q_2 = t_2 + x_2i + y_2j + z_2k$ ko'rinishda berilgan bo'lsin. Bu ko'rinishdagi sonlarni qo'shish amali avvalgidek, yani

$$q_1 + q_2 = (t_1 + t_2) + (x_1 + x_2)i + (y_1 + y_2)j + (z_1 + z_2)k, (q_1 + q_2 \in H)$$

ko'rinishda aniqlangan bo'lib, bu amalga nisbatan

1. $q_1 + q_2 = q_2 + q_1$;
2. $q_1 + (q_2 + q_3) = (q_1 + q_2) + q_3$;

$$3. \quad q + 0 = 0 + q = q$$

$$4. \quad q + (-q) = (-q) + q = 0$$

shartlar bajariladi, bu yerda $0 = 0 + 0i + 0j + 0k$.

Yuqoridagi mulohazalardan quyidagi natijaga ega bo'lamiz.

1-natija. $\langle H, + \rangle$ algebraik sistema additiv gruppaga tashkil qiladi.

Asosiy natijalar

Endi H to'plam elementlari ustida ko'paytirish amali va uning xossalarini o'rganamiz. Ma'lumki $\forall q_1, q_2 \in H$ komutativ kvaternion sonlarni ko'paytirish amali quyidagicha aniqlanadi

$$\begin{aligned} q_1 q_2 = & (t_1 t_2 - x_1 x_2 + y_1 y_2 - z_1 z_2) + (t_1 x_2 + y_1 z_2 + x_1 t_2 + z_1 y_2) i + \\ & + (t_1 y_2 + y_1 t_2 - x_1 z_2 - z_1 x_2) j + (t_1 z_2 + x_1 y_2 + y_1 x_2 + z_1 t_2) k \end{aligned} \quad (1)$$

H to'plam elementlari (1) ko'paytirish amaliga nisbatan kommutativlik, ya'ni $q_1 \cdot q_2 = q_2 \cdot q_1$ hamda assosiativlik $q_1(q_2 q_3) = (q_1 q_2)q_3$ shartlarini qanoatlantiradi. Buni ko'paytirishni to'g'ridan to'g'ri bajarib ko'rsatish mumkin; faraz qilaylik, H to'plamda shunday e element mavjud bo'lib, $qe = eq = q$ shartni qanoatlantirsin. Quyida, e elementni ko'rinishini aniqlaymiz:

Aytaylik, $e = e_1 + e_2 i + e_3 j + e_4 k$ bo'lsin. U holda

$$\begin{aligned} qe = & (t + xi + yj + zk)(e_1 + e_2 i + e_3 j + e_4 k) = \\ & (te_1 - xe_2 + ye_3 - ze_4) + (te_2 + ye_4 + xe_1 + ze_3)i + \\ & + (te_3 + ye_1 - xe_4 - ze_2)j + (te_4 + xe_3 + ye_2 + ze_1)k = t + xi + yj + zk \end{aligned}$$

tenglikdan

$$\begin{cases} te_1 - xe_2 + ye_3 - ze_4 = t \\ te_2 + ye_4 + xe_1 + ze_3 = x \\ te_3 + ye_1 - xe_4 - ze_2 = y \\ te_4 + xe_3 + ye_2 + ze_1 = z \end{cases}$$

sistemaga ega bo'lamiz. Sistemani ko'rinishidan $e_1=1, e_2=e_3=e_4=0$ tengliklar osongina kelib chiqadi, ya'ni $e=1+0i+0j+0k=1$; endi $\forall q \in H \setminus \{0\}$ kommutativ kvaternion son uchun ko'paytirish amaliga nisbatan teskari elementni aniqlaymiz:

Faraz qilaylik, $\forall q \in H \setminus \{0\}$ uchun shunday $\forall q^{-1} \in H$ mavjud bo'lib, $q^{-1}q=q^{-1}q=1$ tenglik o'rinli bo'lsin. U holda, q^{-1} elementni $q^{-1}=\alpha_1+\alpha_2i+\alpha_3j+\alpha_4k$ ko'rinishda qidiramiz. $q^{-1}q=1$ tenglikni o'rinli ekanligidan

$$\begin{cases} t\alpha_1 - x\alpha_2 + y\alpha_3 - z\alpha_4 = 1 \\ x\alpha_1 + t\alpha_2 + z\alpha_3 + y\alpha_4 = 0 \\ y\alpha_1 - z\alpha_2 + t\alpha_3 - x\alpha_4 = 0 \\ z\alpha_1 + y\alpha_2 + x\alpha_3 + t\alpha_4 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

sistemaga ega bo'lamiz. Bu sistema uchun Kramer usulini qo'llab,

$$\Delta = \begin{vmatrix} t & -x & y & -z \\ x & t & z & y \\ y & -z & t & -x \\ z & y & x & t \end{vmatrix} \quad \Delta_{\alpha_1} = \begin{vmatrix} 1 & -x & y & -z \\ 0 & t & z & y \\ 0 & -z & t & -x \\ 0 & y & x & t \end{vmatrix} \quad \Delta_{\alpha_2} = \begin{vmatrix} t & 1 & y & -z \\ x & 0 & z & y \\ y & 0 & t & -x \\ z & 0 & x & t \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{\alpha_3} = \begin{vmatrix} t & -x & 1 & -z \\ x & t & 0 & y \\ y & -z & 0 & -x \\ z & y & 0 & t \end{vmatrix} \quad \Delta_{\alpha_4} = \begin{vmatrix} t & -x & y & 1 \\ x & t & z & 0 \\ y & -z & t & 0 \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}$$

determinantlarni quramiz. Ushbu determinantlar, mos holda

$$\begin{aligned} \Delta &= t^4 + x^4 + y^4 + z^4 + 2t^2x^2 + 2t^2z^2 + 2x^2y^2 + 2y^2z^2 - 2t^2y^2 - 2x^2z^2 - 8xyzt = \\ &= (t^2 - y^2)^2 + (x^2 - z^2)^2 + 2(xt - yz)^2 + 2(zt - xy)^2, \end{aligned}$$

$$\Delta_{\alpha_1} = t^3 - y^2t + x^2t + z^2t - 2xyz, \quad \Delta_{\alpha_2} = -x^3 - t^2x - y^2x + z^2x - 2tyz,$$

$$\Delta_{\alpha_3} = y^3 - t^2y + x^2y + z^2y - 2xtz, \quad \Delta_{\alpha_4} = -z^3 - y^2z + x^2z - t^2z + 2xyt$$

tengliklar bilan aniqlanadi. Kramer teoremasiga asosan, sistema yagona yechimga ega bo'lishi uchun asosiy determinant uchun $\Delta \neq 0$ munosabatni bajarilishi zarur va yetarli. Ushbu talabdan

$$t^2 \neq y^2; x^2 \neq z^2; xt - yz \neq 0; zt - xy \neq 0 \quad (3)$$

shartlarning kamida bittasi bajarilishi zarurligi kelib chiqadi. Ushbu shartlarni bajarilishidan, (2) sistema yagona yechimga ega va bu yechim

$$\alpha_1 = \frac{\Delta_{\alpha_1}}{\Delta}, \alpha_2 = \frac{\Delta_{\alpha_2}}{\Delta}, \alpha_3 = \frac{\Delta_{\alpha_3}}{\Delta}, \alpha_4 = \frac{\Delta_{\alpha_4}}{\Delta}$$

tengliklar bilan aniqlanishi, hamda $q^{-1} = \frac{\Delta_{\alpha_1}}{\Delta} + \frac{\Delta_{\alpha_2}}{\Delta}i + \frac{\Delta_{\alpha_3}}{\Delta}j + \frac{\Delta_{\alpha_4}}{\Delta}k$ tenglik kelib chiqadi.

Yuqoridagi mulohaza va hisoblashlardan quyidagi natijaga ega bo'lamiz:

2-natija. (3) shartni qanoatlantiruvchi $H \setminus \{0\}$ to'plam elementlari ko'paytirish amaliga nisbatan kommutativ gruppaga hosil qiladi.

Ma'lumki, $\forall q \in H$ kommutativ kvaternion son uchun

$$\begin{cases} q = t + ix + jy + kz \\ q^{(1)} = t - ix + jy - kz \\ q^{(2)} = t + ix - jy - kz \\ q^{(3)} = t - ix - jy + kz \end{cases}$$

tengliklar bilan aniqlangan sonlar $q \in H$ songa qo'shma kvaternion sonlar deyiladi, [4]. Tekshirib ko'rish mumkinki, $\Delta = qq^{(1)}q^{(2)}q^{(3)}$ tenglik o'rinli. U holda, (3) shartlarini qanoatlantiruvchi $q \in H$ kommutativ kvaternion son uchun

$$q^{-1} = \frac{q^{(1)}q^{(2)}q^{(3)}}{\Delta}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Odatda, $\Delta = qq^{(1)}q^{(2)}q^{(3)}$ ko'paytma $q \in H$ kommutativ kvaternion sonning normasi deyiladi, [4].

3. Kommutativ kvaternion sonlarni matritsaviy tasvirlari.

Ma'lumki, ixtiyoriy G grupp uchun $\varphi: G \rightarrow GL(L, R)$ akslantirish gomomorfizm bo'lsa, φ -akslantirish G grupaning matritsaviy tasviri deyiladi, [5].

2-natija shartlarini qanoatlantiruvchi kommutativ kvaternion sonlarning multiplikativ grupasini G orqali belgilaymiz.

3-natija. $\forall q \in G$ uchun

$$\varphi(q) = \begin{pmatrix} t - x & y - z \\ x & t & z & y \\ y - z & t - x \\ z & y & x & t \end{pmatrix}$$

ko‘rinishda aniqlangan $\varphi: G \rightarrow GL(L, R)$ akslantirish gomomorfizm bo‘ladi.

Isbot. Aytaylik, $q_1 q_2 \in G$ elementlar $q_1 = t_1 + ix_1 + jy_1 + kz_1$, $q_2 = t_2 + ix_2 + jy_2 + kz_2$ ko‘rinishda berilgan bo‘lsin. U holda, $q_1 q_2$ ko‘paytmani $a + ib + jc + kd$ ko‘rinishda belgilaymiz, bu yerda

$$\begin{aligned} a &= t_1 t_2 - x_1 x_2 + y_1 y_2 - z_1 z_2, & b &= t_1 x_2 + y_1 z_2 + x_1 t_2 + z_1 y_2, \\ c &= t_1 y_2 + y_1 t_2 - x_1 z_2 - z_1 x_2, & d &= t_1 z_2 + x_1 y_2 + y_1 x_2 + z_1 t_2. \end{aligned}$$

Bundan

$$\varphi(q_1 q_2) = \begin{pmatrix} a - b & c - d \\ b & a & d & c \\ c - d & a - b \\ d & c & b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 - x_1 & y_1 - z_1 \\ x_1 & t_1 & z_1 & y_1 \\ y_1 - z_1 & t_1 - x_1 \\ z_1 & y_1 & x_1 & t_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_2 - x_2 & y_2 - z_2 \\ x_2 & t_2 & z_2 & y_2 \\ y_2 - z_2 & t_2 - x_2 \\ z_2 & y_2 & x_2 & t_2 \end{pmatrix} = \varphi(q_1) \varphi(q_2)$$

tenglik o‘rinli bo‘lishi osongina kelib chiqadi. Demak, φ -akslantirish gomomorfizm bo‘ladi.

Ushbu gomomorfizm uchun quyidagi xossalar o‘rinli.

1. $1 \in H$ uchun $\varphi(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ tenglik o‘rinli;
2. (2) shartni qanoatlantiruvchi $q \in H$ uchun $\varphi(q^{-1}) = \varphi^{-1}(q)$;
3. $q_1 q_2 = q_2 q_1$ va $\varphi(q_1 q_2) = \varphi(q_1) \varphi(q_2)$ shartlardan $\varphi(q_1) \varphi(q_2) = \varphi(q_2) \varphi(q_1)$ kelib chiqadi;
4. $\varphi(q) = \varphi^T(q^{(1)})$, $\varphi(q^{(2)}) = \varphi^T(q^{(3)})$.

1- va 2-natijalardan quyidagi xulosaga ega bo‘lamiz.

Xulosa. *Kommutativ kvaternion sonlar to‘plami qo‘shish va ko‘paytirish amaliga nisbatan kommutativ, birlik xalqani tashkil qiladi, lekin maydon bo‘la olmaydi.*

Adabiyotlar ro‘yxati

1. W. R. Hamilton. *Lecturies on quaternions*, Hodges and Smith, Dublin, 1853.
2. C. Segre, *The real representation of Complex elements and Extension to Bicomplex Systems*, Math. Ann. 40 (1892), 413-467.
3. F. Catoni, R. Cannata and P. Zampetti, *An Introduction to Commutative Quaternions*, Adv. Appl. Clifford Algebras **16** (2005), 1-28.
4. H. H. Kosal And M. Tosun, *Commutative Quaternion Matrices*, Adv, Appl. Clifords Algebras **24** (2014), 769-779.
5. Наймарк. *М.А. Теория представлений групп*. М.: Наука, 1976. 560 с.
6. К. К. Муминов и С.С. Журабоев, *Эквивалентность путей относительно действия группы вещественных представлений кватернионных чисел* // Научный вестник НамГУ 9, (2021), с.14-21.