

УДК 517.951.2

**ЎЗГАРУВЧАН КОЭФФИЦИЕНТЛИ УЧИНЧИ ТАРТИБЛИ БИР
ЖИНСЛИ БЎЛМАГАН ТЕНГЛАМА УЧУН БИТТА ЧЕГАРАВИЙ
МАСАЛА ҲАҚИДА**

Умаров Рахматилла Акрамович

Наманган муҳандислик қурилиш институти

E-mail: r.umarov1975@mail.ru

Аннотация: Мақолада тўртбурчак соҳада учинчи тартибли каррالي характеристикали, ўзгарувчан коэффицентли, бир жинсли бўлмаган ҳусусий ҳосилали дифференциал тенглама учун чегаравий масала кўриб чиқилган. Қўйилган масала ечимининг ягоналиги энергия интеграллари усули билан исботланган. Ягоналик ҳақидаги теоремасининг шартларини бузилган ҳолат учун контр мисол тузилган. Масаланинг ечими Грин функцияси қуриш орқали ёзилган.

Калит сўзлар: Дифференциал тенглама, учинчи тартиб, каррالي характеристикалар, чегаравий масала, ругуляр ечим, ягоналик, мавжудлик, Грин функцияси.

**ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО
УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ
КОЭФФИЦИЕНТАМИ**

Умаров Рахматилла Акрамович

Наманганский инженерно-строительный институт.

E-mail: r.umarov1975@mail.ru

Аннотация: В работе рассматривается краевая задача в прямоугольной области для неоднородного дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка с кратными характеристиками с переменными коэффициентами. Единственность решения поставленной задачи, доказана методом интегралов энергии. Построен контрпример в

случае нарушения условий теоремы единственности. Решение задачи выписано через построенную функцию Грина.

Ключевые слова: Дифференциальное уравнение, третий порядок, кратные характеристики, вторая краевая задача, регулярное решение, единственность, существование, функция Грина.

ABOUT ONE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR AN INHOMOGENEOUS THIRD ORDER EQUATION WITH VARIABLE COEFFICIENTS

Umarov Raxmatilla Akramovich

Namangan Engineering-Construction Institute

E-mail:r.umarov1975@mail.ru

Annotation: The paper considers a boundary value problem in a rectangular domains for an inhomogeneous differential equation in partial third-order derivatives with multiple characteristics and variable coefficients. The uniqueness of the solution to the problem posed is proven by the method of energy integrals. A counterexample was constructed in case of violation of the conditions of the uniqueness theorem. The solution of the problem written through the constructed Green's function.

Key words: Differential equation, third order, multiple characteristics, second boundary value problem, regular solution, uniqueness, existence, Green's function.

ВВЕДЕНИЕ

Дифференциальные уравнения в частных производных третьего порядка рассматриваются при решении задач теории нелинейной акустики и в гидродинамической теории космической плазмы, фильтрации жидкости в пористых средах [1].

В совокупности, всех уравнений третьего порядка особое место по специфическому характеру занимают, уравнения с кратными характеристиками.

В работе [2], учитывая свойства вязкости и теплопроводности газа, из системы Навье-Стокса было получено уравнение третьего порядка с кратными характеристиками, содержащее вторую производную по времени

$$u_{xxx} + u_{yy} - \frac{\nu}{y} u_y = u_x u_{xx}, \quad \nu = \text{const.}$$

Это уравнение при $\nu = 1$ описывает осесимметричный поток, а при $\nu = 0$ описывает плоско - параллельный поток [3].

Первые результаты по уравнению третьего порядка с кратными характеристиками были получены в работах Н. Block [4], E. DelVecchio [5].

L. Catabriga в работе [6] для уравнения $D_x^{2n+1} u - D_y^2 u = 0$ построил фундаментальное решение в виде двойного несобственного интеграла и изучил свойства потенциала, решил краевые задачи.

В работах [7-8] построены фундаментальные решения уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, содержащие вторые производные по времени, выраженные через вырожденные гипергеометрические функции, изучены их свойства, найдены оценки при $|t| \rightarrow \infty$.

В работах [9-13], рассмотрены краевые задачи для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками, при помощи построения функции Грина. Также, отметим работы [14-19], в которых, рассмотрены краевые задачи для уравнений третьего порядка. В работах [21-23] решена краевая задача для неоднородного уравнения третьего порядка с постоянными коэффициентами, а в работе [24] с переменными коэффициентами с другим краевым условием.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В области $D = \{(x, y): 0 < x < p, 0 < y < q\}$ рассмотрим следующее уравнение третьего порядка в виде

$$U_{xxx} - U_{yy} + A_1(x)U_{xx} + A_2(x)U_x + A_3(x)U + A_4U_y = g_1(x, y), \quad (1)$$

где $p, q, A_i \in R, A_i(x), i = \overline{1,3}, g_1(x, y)$ заданная, достаточно гладкая функция.

Заменой

$$U(x, y) = \exp \left(-\frac{1}{3} \int_0^x A_1(\xi) d\xi + \frac{A_4}{2} y \right) u(x, y),$$

уравнение (1) можно привести к виду

$$L(u) = u_{xxx} - u_{yy} + a_1(x)u_x + a_2(x)u = g(x, y), \quad (2)$$

где

$$a_1(x) = -A_1'(x) - \frac{1}{3}A_1^2(x) + A_2(x),$$

$$a_2(x) = -\frac{1}{3}A_1''(x) + \frac{2}{27}A_1^3(x) - \frac{1}{3}A_1(x)A_2(x) + A_3(x) + \frac{A_4^2}{4},$$

$$g(x, y) = \exp \left(\frac{1}{3} \int_0^x A_1(\xi) d\xi - \frac{A_4}{2} y \right) g_1(x, y).$$

$$a_1(x), a_2(x) \in C^1[0, p], \quad g_{xy}(x, y) \in C(\bar{D}).$$

Задача B_3 . Найти функцию $u(x, y)$ из класса $C_{x,y}^{3,2}(D) \cap C_{x,y}^{2,1}(\bar{D})$,

удовлетворяющую уравнению (2) и следующим краевым условиям:

$$\begin{cases} \alpha u(x, 0) + \beta u_y(x, 0) = 0, \\ \gamma u(x, q) + \delta u_y(x, q) = 0, \end{cases} \quad 0 \leq x \leq p, \quad (3)$$

$$u(0, y) = \psi_1(y), \quad u_x(p, y) = \psi_2(y), \quad u_{xx}(p, y) = \psi_3(y), \quad 0 \leq y \leq q, \quad (4)$$

где $\psi_i(y), i = \overline{1,3}, g(x, y)$ заданные функции, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R \setminus \{0\}$.

ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ

Теорема 1. Если задача B_3 имеет решение, то при выполнении условий

$$a_1(x) \geq 0, \quad a_2(x) - \frac{1}{2}a_1'(x) \geq 0, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in R \setminus \{0\}$$

оно единственно.

Доказательство. Предположим, обратное. Пусть задача B_3 имеет два решения $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$. Тогда функция $u(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$ удовлетворяет однородному уравнению (2) с однородными краевыми условиями. Докажем, что $u(x, y) \equiv 0$ в $\bar{D}$.

В области D справедливо тождество

$$uL(u) = uu_{xx} - uu_{yy} + a_1(x)uu_x + a_2(x)u^2 = 0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(uu_x - \frac{1}{2}u_x^2 + \frac{1}{2}a_1(x)u^2 \right) - \frac{\partial}{\partial y} (uu_y) + u_y^2 + \left(a_2(x) - \frac{1}{2}a_1'(x) \right) u^2 = 0. \quad (5)$$

Интегрируя тождество (5) по области D , требуя $\alpha \neq 0, \gamma \neq 0$ и учитывая однородные краевые условия, получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^q a_1(x) u^2(p, y) dy + \frac{1}{2} \int_0^q u_x^2(0, y) dy + \frac{\delta}{\gamma} \int_0^p u_y^2(x, q) dx - \\ & - \frac{\beta}{\alpha} \int_0^p u_y^2(x, 0) dx + \iint_D u_y^2 dx dy + \iint_D \left(a_2(x) - \frac{1}{2}a_1'(x) \right) u^2 dx dy = 0. \end{aligned}$$

При $a_2(x) - \frac{1}{2}a_1'(x) > 0$, из последнего слагаемого получим $u(x, y) \equiv 0$.

Если $a_2(x) - \frac{1}{2}a_1'(x) = 0$, тогда из пятого слагаемого имеем $u(x, y) = f(x)$, поставив это равенство в условие (3) имеем $\alpha f(x) + \beta \cdot 0 = 0$, отсюда $f(x) = 0$. Тогда $u(x, y) \equiv 0, (x, y) \in \bar{D}$. Теорема 1 доказана.

Замечание. Отметим, что при нарушении условия теоремы 1 однородная задача B_3 для однородного уравнения (2) может иметь нетривиальные решения. Например, можно легко убедиться, что когда $p = 1, q = \pi, a_1(x) = 0, a_2 = -(\mu^3 + 1) < 0$ задача

$$\begin{cases} u_{xx}(x, y) - (\mu^3 + 1)u(x, y) - u_{yy}(x, y) = 0, \\ \alpha u(x, 0) + \beta u_y(x, 0) = 0, \gamma u(x, q) + \delta u_y(x, q) = 0, \\ u(0, y) = u_x(1, y) = u_{xx}(1, y) = 0, \end{cases}$$

где μ решения уравнение

$$e^{-\frac{3}{2}\mu} + 2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mu\right) = 0,$$

имеет нетривиальные решения вида

$$u(x, y) = \left(e^{\mu x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mu - \frac{\pi}{3}\right) - e^{-\frac{1}{2}\mu x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mu(1-x) - \frac{\pi}{3}\right) + e^{\frac{1}{2}\mu(3-x)} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mu x\right) \right) Y_n(y),$$

где λ_n собственные значения, $Y_n(y)$ соответствующие собственные функции задачи

$$\begin{cases} Y''(y) + \lambda_n^3 Y(y) = 0, \\ \alpha Y(0) + \beta Y'(0) = 0, \quad \gamma Y(q) + \delta Y'(q) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Отсюда, следует, что если a_2 является параметром разделения, тогда при $a_2 \geq 0$ задача корректно поставлена, при $a_2 < 0$ задача не корректна, т.е. существует спектр.

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ

Теорема 2. Если выполняются следующие условия:

$$1) \quad \alpha \psi_i^{(m)}(0) + \beta \psi_i^{(m+1)}(0) = 0, \quad \gamma \psi_i^{(m)}(q) + \delta \psi_i^{(m+1)}(q) = 0, \quad m = 0, 2,$$

$$\psi_i(y) \in C^4[0, q], \quad i = \overline{1, 3};$$

$$2) \quad \alpha g(x, 0) + \beta g'(x, 0) = 0, \quad \gamma g(x, q) + \delta g'(x, q) = 0;$$

$$3) \quad 0 \leq C < \frac{\lambda_1^2}{Kp(1 + \lambda_1)},$$

$$4) \quad a_1(p) = 0, \text{ то решение задачи } B_3 \text{ существует.}$$

$$\text{Здесь } C = \max \left| a_1(x), \left| a_1'(x) - a_2(x) \right|, x \in [0, p] \right|, \quad K = \frac{16}{3} \left(1 - \exp \left(- \frac{2\sqrt{3}\tau}{3} \right) \right)^{-1},$$

λ_1 - первая собственная значения задачи (6).

Доказательство. Рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля (6). Известно (см [20]), что для задачи (6) собственные значения λ_n существует только при $\lambda_n > 0$ и

$$\lambda_n^3 = O(n^2). \quad (7)$$

собственные функции имеют вид:

$$Y_n(y) = \frac{H_n(y)}{\|H_n(y)\|_{L_2[0,q]}} \quad H_n(y) = \alpha \sin \sqrt{\lambda_n^3} y - \beta \sqrt{\lambda_n^3} \cos \sqrt{\lambda_n^3} y, \quad n \in N, \quad (8)$$

В [25], доказана теорема о возможности разложения функций по собственным функциям $\{Y_n(y)\}$.

Разложим $g(x, y)$ в ряд Фурье по $\{Y_n(y)\}$:

$$g(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) Y_n(y),$$

где
$$g_n(x) = \int_0^q g(x, \eta) Y_n(\eta) d\eta$$

Учитывая условия 2, теоремы 2 интегрируем функцию $g_n(x)$ по частям два раза и имеем оценку

$$|g_n(x)| \leq M \frac{|F_n(x)|}{\lambda_n^3}, \quad (9)$$

здесь
$$F_n(x) = \int_0^q g_{\eta\eta}(x, \eta) Y_n(\eta) d\eta$$

В дальнейшем для все известные положительные постоянные будем обозначать одной буквой M .

Решение задачи B_3 ищем в виде

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} X_n(x) Y_n(y). \quad (10)$$

Поставляя (10) в уравнение (2) получим следующую задачу:

$$\begin{cases} X_n''' + a_1(x)X_n' + a_2(x)X_n + \lambda_n^3 X_n = g_n(x), \\ X_n(0) = \psi'_{2n}, \quad X_n'(p) = \psi'_{3n}, \quad X_n''(p) = \psi'_{1n}, \end{cases} \quad (11)$$

где $\psi'_{in} = \int_0^q \psi'_i(\eta) Y_n(\eta) d\eta, i = \overline{1,3}$.

Учитывая условия 1 теоремы 2, интегрируем по частям ψ'_{in} четыре раза находим оценку

$$|\psi'_{in}| \leq \frac{|\Psi_{in}|}{\lambda_n^6}, i = \overline{1,3} \quad (12)$$

где $\Psi_{in} = \int_0^q \psi_i^{IV}(\eta) Y(\eta) d\eta, i = \overline{1,3}$.

Введём новую функцию $V(x)$, по формуле

$$V_n(x) = X_n(x) - \rho_n(x), \quad (13)$$

где $\rho_n(x)$ имеет вид:

$$\rho_n(x) = \psi'_{1n} + x\psi'_{2n} + \frac{x^2 - 2xp}{2} \psi'_{3n}.$$

Подставляя (13) в (11) получим задачу

$$\begin{cases} V''' + \lambda_n^3 V = \lambda_n^3 f_n(x) - a_1(x)V' - a_2(x)V, \\ V(0) = V'(p) = V''(p) = 0, \end{cases} \quad (14)$$

здесь

$$\begin{aligned} f_n(x) = & - \left(\frac{a_2(x)}{\lambda_n^3} + 1 \right) \psi'_{1n} - \left(\frac{xa_2(x) + a_1(x)}{\lambda_n^3} + x \right) \psi'_{2n} - \\ & - \left(\frac{xa_1(x) - pa_1(x) - xa_2(x)p}{\lambda_n^3} + \frac{a_2(x)}{\lambda_n^3} x^2 + \frac{x^2 - 2xp}{2} \right) \psi'_{3n} + \frac{g_n(x)}{\lambda_n^3}. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая оценки (9), (12) имеем

$$|f_n(x)| \leq M |\psi'_{1n}| + M |\psi'_{2n}| + M |\psi'_{3n}| + M \frac{|F_n(x)|}{\lambda_n^6} \leq M \left(\frac{|\Psi_{1n}|}{\lambda_n^6} + \frac{|\Psi_{2n}|}{\lambda_n^6} + \frac{|\Psi_{3n}|}{\lambda_n^6} + \frac{F_n(x)}{\lambda_n^6} \right).$$

Учитывая это, получим следующие оценки

$$|f'_n(x)| \leq \frac{M}{\lambda_n^6} (|\Psi_{1n}| + |\Psi_{2n}| + |\Psi_{3n}| + |F'_n(x)|). \quad (15)$$

Задача (14) эквивалентно на интегро-дифференциальное уравнение

$$V_n(x) = \lambda_n^3 \int_0^p G_n(x, \xi) f_n(\xi) d\xi - \int_0^p G_n(x, \xi) a_1(\xi) V'_n(\xi) d\xi - \int_0^p G_n(x, \xi) a_2(\xi) V_n(\xi) d\xi, \quad (16)$$

где $G_n(x, \xi)$ функция Грина задачи

$$\begin{cases} V''' + \lambda_n^3 V = 0, \\ V(0) = V'(p) = V''(p) = 0, \end{cases}$$

которая имеет вид:

$$G_n(x, \xi) = \begin{cases} G_{1n}(x, \xi), & 0 \leq x \leq \xi, \\ G_{2n}(x, \xi), & \xi \leq x \leq p. \end{cases} \quad (17)$$

Здесь

$$\begin{aligned} G_{1n}(x, \xi) &= \frac{1}{\sqrt{3}\lambda_n^2\Delta} \left(-e^{\lambda_n \left| p-x-\frac{\xi}{2} \right|} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \lambda_n \xi + \frac{\pi}{6} \right) - e^{\lambda_n \left| \xi-x-\frac{p}{2} \right|} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \lambda_n p \right) + \right. \\ &e^{\lambda_n \left| \xi+\frac{x}{2}-\frac{p}{2} \right|} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \lambda_n (x-p) \right) + e^{\lambda_n \left| p+\frac{x}{2}-\frac{\xi}{2} \right|} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \lambda_n (\xi-x) + \frac{\pi}{6} \right) - \\ &\left. 2e^{-\lambda_n \left| \frac{\xi}{2}+\frac{p}{2}-\frac{x}{2} \right|} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \lambda_n x \right) \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \lambda_n (\xi-p) + \frac{\pi}{6} \right) \right) \\ G_{2n}(x, \xi) &= \frac{1}{\sqrt{3}\lambda_n^2\Delta} \left(1 - 2e^{-\frac{3\lambda_n}{2}\xi} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \lambda_n \xi + \frac{\pi}{6} \right) \right) \cdot \\ &\cdot \left(\frac{1}{2} e^{\lambda_n(\xi+p-x)} + e^{\lambda_n \left| \xi-\frac{p}{2}+\frac{x}{2} \right|} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \lambda_n (x-p) \right) \right). \end{aligned}$$

Оценка $G_n(x, \xi)$ имеет вид

$$|G_n(x, \xi)| \leq \frac{K}{\lambda_n^2}, \quad \left| \frac{\partial G_n(x, \xi)}{\partial \xi} \right| \leq \frac{K}{\lambda_n}. \quad (18)$$

Интегрируем по частям второй интеграл в (16), и введём обозначения

$$V_{0n}(x) = \lambda_n^3 \int_0^p G_n(x, \xi) f_n(\xi) d\xi, \\ \bar{G}_n(x, \xi) = \frac{\partial G_n(x, \xi)}{\partial \xi} a_1(\xi) + G_n(x, \xi) (a_1'(\xi) - a_2(\xi)) \quad (19)$$

тогда (19) примет вид

$$V_n(x) = V_{0n}(x) + \int_0^p \bar{G}_n(x, \xi) V_n(\xi) d\xi. \quad (20)$$

Используя равенство (19), имеем оценку для $\bar{G}_n(x, \xi)$ в виде

$$|\bar{G}_n| \leq |a_1(\xi)| \left| \frac{\partial G_n(x, \xi)}{\partial \xi} \right| + |a_1'(\xi) - a_2(\xi)| |G_n| \leq \left(\frac{1}{\lambda_n} + \frac{1}{\lambda_n^2} \right) KC.$$

Уравнения (20) является интегральным уравнением Фредгольма второго рода. Запишем решение (20) с помощью резольвенты в виде

$$V_n(x) = V_{0n}(x) + \int_0^p R_n(x, \xi) V_{0n}(\xi) d\xi,$$

где

$$R_n(x, \xi) = \bar{G}_n(x, \xi) + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{G}_{mn}(x, \xi). \quad (21)$$

Здесь

$$\bar{G}_{mn}(x, \xi) = \int_0^p \bar{G}_n(x, s) \bar{G}_{(m-1)n}(s, \xi) ds, \quad m = 1, 2, \dots, \quad \bar{G}_{0n}(x, \xi) = \bar{G}_n(x, \xi).$$

Оценим резольвента (21). Из

$$R_n(x, \xi) = \bar{G}_{0n}(x, \xi) + \bar{G}_{1n}(x, \xi) + \bar{G}_{2n}(x, \xi) + \dots + \bar{G}_{mn}(x, \xi) + \dots$$

найдем оценку

$$|R_n(x, \xi)| \leq |\bar{G}_{0n}(x, \xi)| + |\bar{G}_{1n}(x, \xi)| + |\bar{G}_{2n}(x, \xi)| + \dots + |\bar{G}_{mn}(x, \xi)| + \dots$$

Для правой части этого неравенство составим мажорирующий ряд.
Введя обозначение

$$J = \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_1^2} \right) KC,$$

находим

$$|\bar{G}_{1n}(x, \xi)| \leq |\bar{G}_n(x, \xi)| \leq KC \left(\frac{1}{\lambda_n} + \frac{1}{\lambda_n^2} \right) \leq \frac{1}{p} Jp,$$

$$|\bar{G}_{2n}(x, \xi)| \leq \int_0^p |\bar{G}_{1n}(x, s)| |\bar{G}_{1n}(s, \xi)| ds \leq \frac{1}{p} J^2 p^2,$$

$$|\bar{G}_{3n}(x, \xi)| \leq \int_0^p |\bar{G}_{1n}(x, s)| |\bar{G}_{2n}(s, \xi)| ds \leq \frac{1}{p} J^3 p^3,$$

.....

$$|\bar{G}_{in}(x, \xi)| \leq \int_0^p |\bar{G}_{1n}(x, s)| |\bar{G}_{(i-1)n}(s, \xi)| ds \leq \frac{1}{p} J^i p^i, i = 2, 3, \dots,$$

.....

Тогда мажорирующий ряд имеет вид

$$\frac{1}{p} \sum_{m=1}^{\infty} (Jp)^m. \quad (22)$$

Из условия теоремы 2 имеем $C < \frac{\lambda_1^2}{Kp(1+\lambda_1)}$. Это неравенство можно записать в виде

$$\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_1^2} \right) KC < \frac{1}{p},$$

отсюда

$$Jp < 1,$$

тогда мажорирующий ряд (22) является бесконечно убывающей геометрической прогрессией. В этом случае резольвента равномерно сходится, и его оценка имеет вид

$$|R(x, \xi)| \leq \frac{J}{1 - Jp} \leq M \quad (23)$$

Подставляя $G_n(x, \xi) = -\frac{1}{\lambda_n^3} G_{n\xi\xi\xi}(x, \xi)$ в $V_{0n}(x)$ и интегрируя, имеем

$$V_{0n}(x) = f_n(x) + G_{n\xi\xi\xi}(x, 0)f_n(0) + \int_0^p G_{n\xi\xi\xi}(x, \xi)f_n'(\xi)d\xi.$$

Учитывая оценки (18) и

$$|G_{2n\xi\xi\xi}(x, 0)| \leq K, \quad |G_{1n\xi\xi\xi}(x, p)| \leq K, \quad |G_{1n\xi\xi\xi}(x, \xi)| \leq K,$$

получим

$$|V_{0n}(x)| \leq \frac{M}{\lambda_n^6} (|\Psi_{1n}| + |\Psi_{2n}| + |\Psi_{3n}| + |F_n(x)| + |F_n(0)| + |F_n'(x)|) \quad (24)$$

Из (23) и (24) имеем оценку

$$\begin{aligned} |V_n(x)| &\leq |V_{0n}(x)| + \int_0^p |R(x, \xi)| |V_{0n}(\xi)| d\xi \leq \\ &\leq \frac{M}{\lambda_n^6} \left(\sum_{i=1}^3 |\Psi_{in}| + |F_n(x)| + |F_n(0)| + |F_n'(x)| \right). \end{aligned}$$

В силу (13) и (10) решение задачи B_3 имеет вид

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (V_n(x) + \rho_n(x)) Y_n(y).$$

Проверим это решение на сходимость. Учитывая оценку

$$|\rho_n(x)| \leq \frac{M}{\lambda_n^6} (|\Psi_{1n}| + |\Psi_{2n}| + |\Psi_{3n}|),$$

имеем

$$\begin{aligned} |u(x, y)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} (|V_n(x)| + |\rho_n(x)|) \leq \\ &\leq M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^6} \left(\sum_{i=1}^3 |\Psi_{in}| + |F_n(x)| + |F_n(0)| + |F_n'(x)| \right) < \infty. \end{aligned}$$

Покажем сходимость $u_{xxx}(x, y)$. Имеем

$$u_{xxx}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (V_n''(x) + \rho_n'''(x)) Y_n(y).$$

После некоторых вычислений, учитывая свойства функции Грина находим $V_n''(x)$ в следующем виде.

$$V_n''(x) = \lambda_n^3 f_n(x) - a_1 \left(V_{0n}'(x) + \int_0^p R_{nx}(x, \xi) V_{0n}(\xi) d\xi \right) - \\ - a_2 \left(V_{0n}(x) + \int_0^p R_n(x, \xi) V_{0n}(\xi) d\xi \right) - \lambda_n^3 \left(V_{0n}(x) + \int_0^p R_n(x, \xi) V_{0n}(\xi) d\xi \right).$$

Здесь

$$V_{0n}(x) = f_n(x) + G_{n\xi\xi}(x, 0) f_n(0) + \int_0^p G_{n\xi\xi}(x, \xi) f_n'(\xi) d\xi, \\ V_{0n}'(x) = G_{n\xi\xi x}(x, 0) f_n(0) + \int_0^p G_{n\xi\xi x}(x, \xi) f_n'(\xi) d\xi.$$

Используя оценки (9), (12) и (18) находим

$$|V_{0n}'(x)| \leq \frac{M}{\lambda_n^4} (|\Psi_{1n}| + |\Psi_{2n}| + |\Psi_{3n}| + |F_n(x)| + |F_n(0)| + |F_n'(x)|), \\ |R_{nx}(x, \xi)| \leq \lambda_n M,$$

отсюда

$$|V_n''(x)| \leq \frac{M}{\lambda_n^3} \left(\sum_{i=1}^3 |\Psi_{in}| + |F_n(x)| + |F_n(0)| + |F_n'(x)| \right).$$

Тогда имеем

$$|u_{xxx}(x, y)| \leq M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^3} (|\Psi_{1n}| + |\Psi_{2n}| + |\Psi_{3n}| + |F_n(x)| + |F_n(0)| + |F_n'(x)|).$$

Учитывая (7), $u_{xxx}(x, y)$ сходятся абсолютно и равномерно.

Из неравенство

$$|u_{yy}(x, y)| \leq |u_{xxx}(x, y)| + |a_1(x)| |u_x(x, y)| + |a_2(x)| |u(x, y)|,$$

можно заключить что и u_{yy} тоже сходится.

Тогда решение задачи B_3 можно представить в следующем явном виде:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^3 Y_n(y) \int_0^p G_n(x, \xi) f_n(\xi) d\xi + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^3 Y_n(y) \left(\int_0^p R_n(x, \xi) \int_0^p G_n(x, s) f_n(s) ds d\xi \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\psi'_{1n} + x\psi'_{2n} + \frac{x^2 - 2xp}{2} \psi'_{3n} \right) Y_n(y).$$

Таким образом, доказана теорема 2.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В прямоугольной области рассмотрена краевая задача для неоднородного дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка с кратными характеристиками, с переменными коэффициентами. Единственность решения доказана методом интегралов энергии. Построен контрпример в случае нарушения условий теоремы единственности. Методом функции Грина построено решение поставленной задачи. Доказана абсолютная и равномерная сходимость построенного решения и его производных, входящих в уравнение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Юлдашев Т.К. Обратная задача для одного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных третьего порядка// Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, - Самара, 2014. - № 1(34). - С.56-65.
2. Рыжов О.С. Асимптотическая картина обтекания тел вращения со звуковым потоком вязкого и теплопроводящего газа // Прикл. Матем. и механ., - Москва, 1965. - Т. 29. Вып. 6. - С. 1004-1014.
3. Диесперов В.Н. О функции Грина, линеаризованного вязкого трансзвукового уравнения // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. - Москва, 1972. - Т. 12. - № 5. - С. 1265-1279.
4. Block H. Sur les equations lineaires aux derives partielles a carateristiques multiples // Ark. Mat. Astron. Fus. Note 1, - 1912, 7(13), - pp. 1-34; Note 2, 1912, ibid. 7(21),- pp. 1-30; Note 3, 1912 - 1913, ibid. 8(23). - pp. 1-51.

5. Del Vicchio E. Sulle equazioni , // Memorie R. Accad. Sci. Ser.2. - Torino, 1915, 66. - pp. 1-41.
6. Cattabriga L. Potenziali di linea e di dominio per equazioni non paraboliche in due variabili caratteristiche multiple // Rendiconti del seminario matematico della univ. di Padova. - 1961, 31. - pp. 1-45.
7. Джураев Т.Д, Апаков Ю.П. Об автомодельном решении одного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, - Самара, 2007. - № 2(15). - С.18-26.
8. Джураев Т.Д, Апаков Ю.П. К теории уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, содержащего вторую производную по времени // Украинский математический журнал. – Киев, 2010, том 62. № 1.- С. 40-51.
9. Apakov Y.P., Rutkauskas S. On a boundary problem to third order PDE with multiple characteristics // Nonlinear Analysis: Modeling and Control. -Vilnius, 2011. - Vol. 16. -№ 3. - pp. 255-269.
10. Апаков Ю.П. О решении краевой задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Украинский математический журнал. -Киев. 2012. Т.64. № 1. С. 1-11.
11. Апаков Ю.П., Жураев А.Х. О решении краевой задачи для уравнения третьего порядка с помощью функции Грина // Узбекский математический журнал. 2011, №3, - С.36-42.
12. Yuldashev T.K., Apakov Y.P., Zhuraev A.Kh. Boundary value problem for third order partial integro-differential equation with a degenerate kernel. Lobachevski Journal of Mathematics.2021 Vol, 42, № 6, -pp. 1316-1326.
13. Иргашев Б. Ю. Краевая задача для одного вырождающего уравнения высокого порядка с младшими членами //Bulletin of the Institute of Mathematics. – 2019. – №. 6. – С. 23-29.
14. Сабитов К. Б. Задача Дирихле для уравнение смешанного типа третьего порядка //ДАН России. – Москва. 2009.-Т.427.-№5.-С.593-596.
15. Балкизов Ж.А., Кадзаков А.Х. О представлении решения краевой задачи для неоднородного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками //

Известия Кабардино - Балкарского научного центра РАН. - Нальчик, 2010. - № 4. - С. 64-69.

16. Лукина Г.А. Краевые задачи с интегральными граничными условиями для линеаризованного уравнения Кортевега - де Фриза // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Матем. модель. и програм. - Челябинск, 2011. - № 17 (234), - С. 52-61.
17. Шубин В.В. Краевые задачи для уравнений третьего порядка с разрывным коэффициентом // Вестник НГУ. Сер. Матем., мех., информ. - Новосибирск, 2012. -Т. 12. -№ 1. - С. 126-138.
18. Ashyralyev A., Belakroum K., Guezane-Lakoud A. Stability of boundary-value problems for third-order partial differential equations //Electronic Journal of Differential Equations. – 2017. – Т. 2017. – №. 53. – С. 1-11.
19. Кожанов А.И., Дюжева А.В. Нелокальные задачи с интегральным условием для дифференциальных уравнений третьего порядка // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.- мат. науки, 2020. Т. 24, № 4. С. 607–620.
20. Апаков Ю.П. К теории уравнений третьего порядка с кратными характеристиками, Т., «Фан ва технология» 2019 й. 154 с.
21. Apakov Y. P., Umarov R. A. Solution of the Boundary Value Problem for a Third Order Equation with Little Terms. Construction of the Green's Function // Lobachevskii Journal of Mathematics, 43:3 (2022), 738–748.
22. Apakov, Y.P., Umarov, R.A. Construction of the Solution of a Boundary-Value Problem for the Third-Order Equation with Lower Terms with the Help of the Green Function // *J Math Sci* (2023). <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06644-2>
23. Apakov Yu.P., Umarov R.A. On the third boundary problem for a nonhomogeneous third order equation with multiple characteristics // *Uzbek Mathematical Journal*. 2023, Volume 67, Issue 1, pp.4-14.
24. Апаков Ю.П., Умаров Р.А. Построение решения краевой задачи для уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами // Доклады Академии наук Республики Узбекистан. 2023, №2, С 3-10

25. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Операторы Штурма-Лиувилля и Драка // М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. литер. – 1988. – 432 с.