

Параметрический алгоритм поиска минимальной нижней единицы монотонных булевых функций

А.А. Байжуманов¹, М.А. Бердимуродов²

¹к.ф.-м.н., доцент кафедры «Математика» Южно Казахстанского государственного педагогического университета, Шымкент.

²PhD, доцент кафедры «Цифровые технологии» Perfect university, Ташкент.

Аннотация. В данной статье приводятся методы расшифровки монотонных функций логики в решении задач минимизации булевых функций и логической отделимости, описываются методы кодирования э.к. парами чисел в десятичной системе исчисления и даются критерии преобразования логических выражений над кодами э.к., определяются сложности существующих методов и приближенных алгоритмов минимизации булевых функций.

Ключевые слова. дизъюнктивных нормальных форма, алгебры логики, цепь, минимальной нижней единицы, монотонных булевых функций, минимизации.

Monoton mantiqiy funksiyalarning minimal pastki birni izlashning parametrik algoritmi

Annotatsiya. Ushbu maqola mantiqiy funksiyalarni minimallashtirish va mantiqiy bo'linish muammolarini hal qilishda mantiqning monoton funksiyalarni qurush usullarini tadqiq qilinadi va elementar konyunksiyalarni (e.k.) o'nlik sistemadagi sonlar juftligi va mantiqiy ifodalarni elementar konyunksiya hadlari bo'yicha o'zgartirish mezonlari berilgan, mavjud usullarning murakkabliklari va mantiqiy funksiyalarni minimallashtirishning abstrakt algoritmlari keltirilgan.

Kalit so'zlar. Disyunktiv normal shakllar, mantiq algebrasi, zanjir, minimal pastki bir, monoton mantiqiy funktsiyalar, minimallashtirish.

Введение. В данной статье приводятся методы расшифровки монотонных функций логики в решении задач минимизации булевых функций и логической отделимости, описываются методы кодирования э.к. парами чисел в десятичной системе исчисления и даются критерии преобразования логических выражений над кодами э.к., определяются сложности существующих методов и приближенных алгоритмов минимизации булевых функций.

Решается задача о совместной минимизации систем булевых функций на основе поиска м.в.н. монотонных булевых функций, дается алгоритмическая схема решения дискретных экстремальных задач методами расшифровки и поиска м.в.н. д.м.ф., вычисляются параметры алгоритма поиска м.в.н. монотонных булевых функций для решения отдельных классов дискретных экстремальных задач.

В процессе синтеза управляющих автоматов возникает необходимость решения различных дискретных экстремальных задач таких, как задачи минимизации булевых функций f в классе дизъюнктивных нормальных форм (д.н.ф.), поиска минимальных покрытий, минимальной совокупности существенных переменных частичных булевых функций и т.д. Эти задачи сводятся к задаче поиска минимальной нижней единицы (м.н.ед.) монотонных булевых функций $F(x_1, x_2, \dots, x_m)$, заданных операторами O_F . В

частности, для минимизации булевых функций f от n переменных функция $F(x_1, x_2, \dots, x_m)$ определяется следующим образом:

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = \begin{cases} 1, & \text{если } f = \kappa_{i_1} \vee \kappa_{i_2} \vee \dots \vee \kappa_{i_l} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$\alpha_{i_1} = \alpha_{i_2} = \dots = \alpha_{i_l} = 1$$

где $\kappa_{i_1} \vee \kappa_{i_2} \vee \dots \vee \kappa_{i_l}$ – сокращенная д.н.ф. функции f . Задача поиска м.н.ед. монотонных функций в Шенноновской постановке решена Н.Н.Катериночкиной в работе[1], из результатов которых вытекает, что при увеличении числа переменных сложность процесса решения задачи значительно возрастает. Для задач минимизации булевых функций m имеет порядок $2^n n^{\log \log n}$ для почти всех функций f от n переменных.

Пусть L - произвольное подмножество вершин E_n^2 n - мерного двоичного куба, $|L|=m$, G_n - групповой код в E_n^2 с расстоянием d и $|G_n|=B$. Тогда существует подмножество $L_d \subseteq L$, все точки которого лежат друг от друга на расстоянии, не меньшем d , и которое содержит не менее $B \frac{m}{2^n}$ точек. Из результатов работы [5,6] следует, что в E_n^2 существует групповой код с расстоянием $2r+1$ числом элементов

$$B(n, r) \geq C \frac{2^n}{n^r}, \quad (1 < C < 2).$$

Пусть

$$L = U_i \subseteq E_n^2, |U_i| = C_n^i, i = \overline{0, n}, r = 1, M \subseteq U_i \text{ для } \forall \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in M, \text{ где } i = 0, 2, 4, \dots.$$

$$C \frac{C_n^i}{n^i} \leq \frac{B(n, i)}{2^n} C_n^i \leq |M|.$$

В силу утверждения [2,3] можно считать, что

$$|M| \leq \frac{C_n^i}{1 + C_{n-i}^i C_i^i + \dots + C_{n-i}^{i/2} C_i^{i/2}} \leq C' \frac{C_n^i}{n^i}.$$

Нетрудно заметить в [1,2], что

$$C \frac{C_n^i}{n^i} \leq |M| \leq C' \frac{C_n^i}{n^i}.$$

Таким образом,

Рассмотрим параметрический алгоритм $A(\rho, r, h, H)$ поиска м.н.ед. монотонной булевой функции $f(M_n)$ заданной в E_n^2 , где ρ -уровень порога исследования нижних единиц, r -число цепей, по которым ведется начальный поиск нижних единиц, h -шаг исследования на уровнях и H -число шагов по достижении цели. Для всех уровней U_k

куба E_n^2 находим расстояние $q_k = \left\lceil \frac{U_k}{r} \right\rceil, k = l - \rho, l - \rho + 1, \dots, l + \rho.$

Построим r цепей, проходящих через точки куба E_n^2 таким образом, чтобы для

любых $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ из различных цепей $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ было максимальным $(\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \geq q_k)$.

Построение цепей производится индукцией по $i = \overline{1, \rho}$, начиная с уровня U_l и кончая $U_{l+\rho}$.

Пусть $M_i = \{\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_r\}$. На первом шаге за минимальные элементы r цепей примем $\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_r$. Пусть на $(i-1)$ -м шаге построены цепи длиной $(i-1)$. Для любых $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in M_{i-1}$ справедливо равенство $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \geq q_{i-1}$.

i -й шаг. Для каждого набора $\tilde{\alpha}_j \in M_{i-1}, j = \overline{1, r}$ имеется $l = n - i + 1$ сравнимых наборов из i -го уровня: $\tilde{\beta}_{i1}^{\tilde{\alpha}_j}, \dots, \tilde{\beta}_{il}^{\tilde{\alpha}_j}$.

Для $\tilde{\alpha}_1$ выбираем произвольный набор $\tilde{\beta}_i^{\tilde{\alpha}_1}$. Для $\tilde{\alpha}_2$ выбираем $\tilde{\beta}_i^{\tilde{\alpha}_2}$, который не входит в шар радиуса $2q_i$ центром $\tilde{\beta}_i^{\tilde{\alpha}_1}$. Для $\tilde{\alpha}_j$ выберем $\tilde{\beta}_i^{\tilde{\alpha}_j}$, не входящий в шары, имеющие $2q_i$ с центрами $\tilde{\beta}_i^{\tilde{\alpha}_1}, \dots, \tilde{\beta}_i^{\tilde{\alpha}_{j-1}}$. Если такого не существует, то выбираем набор $\tilde{\beta}_i^{\tilde{\alpha}_j}$, находящийся на максимальном расстоянии от $\tilde{\beta}_i^{\tilde{\alpha}_1}, \dots, \tilde{\beta}_i^{\tilde{\alpha}_{j-1}}$.

Цепи на уровнях с U_l до $U_{l+\rho}$ строятся аналогично. Таким образом, получаем r цепей длиной 2ρ . Далее, обращаясь к оператору A_f , вычисляем функцию на наборах построенных цепей. В результате для каждой цепи находим локальный минимум.

Среди локальных минимумов выбирается единица с минимальной формой. Затем функцию будем вычислять на наборах, лежащих на один уровень ниже чем $\tilde{\alpha}$, и не входящих в множество $\{\tilde{y}\}$ вершин $\tilde{y}$, сравнимых хотя бы с одним локальным минимумом. Причем значение функции будем вычислять не на каждом наборе, а через h наборов в $(1 \leq h \leq H)$, начиная с некоторого фиксированного набора.

Если существует $\tilde{\alpha}$ такой что $f(\tilde{\alpha}) \neq 0$, то будем искать нижнюю единицу среди наборов $\tilde{\beta}$ таких, что $\tilde{\beta} \leq \tilde{\alpha}$. Дальнейшее исследование будем производить так же, как и на предыдущем уровне.

Когда количество обращений к оператору A_f достигает H поиск прекращается. Последнюю найденную нижнюю единицу функции $f(\tilde{x})$ принимаем за минимальную.

Если найденная м.н.ед. не удовлетворяет поставленным требованиям, то, изменив параметры r, H, ρ, h , можем продолжить поиск до нахождения приемлемой единицы f .

Для задач минимизации булевых функций число конъюнкций m сокращенной д.н.ф. имеет порядок $2^n n^{\log \log n}$ для почти всех функций f от n переменных.

Предлагается параметрический алгоритм $A(p, r, h, H)$ поиска м.н.ед. монотонных булевых функций, где p – уровень порога исследования, r – число цепей, по которым ведется начальный поиск нижних единиц, h – шаг исследования на уровнях и H – число шагов для достижения цели. Для построения m – мерный двоичный куб E_m^2 разбивается по уровням $U_0, U_1, \dots, U_m$, где U_i – множество всех вершин α в E_m^2 , норма $|\alpha|$ которых равна i . Определяются цепи $C_1, C_2, \dots, C_r$ длины P и содержащие элементы $U_l, U_{l+1}, \dots, U_{l+P}$, где l – номер уровня с которого начинается разбиение цепей. Элементы цепей на уровне максимально удалены друг от друга. Исходя из существующих метрических характеристик функций алгебры логики [2] от n переменных в задачах минимизации булевых функций можно утверждать, что номер начального уровня l не меньше величины

$$\frac{2^{n-1}}{\log n \log \log n} \text{ и не больше } \frac{2^n}{\log n}$$

т.к. для почти всех функций алгебры логики длина кратчайшей д.н.ф., а значит и номер уровня расположения м.н.ед., не меньше данной величины.

В процессе работы алгоритма исследуются наборы цепей $C_1, C_2, \dots, C_r$. Для каждой цепи C_i находится локальная нижняя единица, среди которых определяется набор α такой, что $F(\alpha) = 1$ и на всех наборах β цепей C_i при $|\beta| < |\alpha|$ $F(\beta) = 0$. Затем вычисление функции F будем производить на наборах, лежащих на один уровень ниже, чем α . Причем, значение функции F будем вычислять не на каждом наборе уровня, а через h наборов, начиная с некоторого фиксированного набора. Если существует набор α такой, что $F(\alpha) = 1$, то будем искать нижнюю единицу среди наборов β таких, что $|\beta| \leq |\alpha|$. Дальнейшее исследование будем проводить так же, как и на предыдущем уровне. Поиск м.н.ед. прекращается в том случае, когда определяется набор α уровня U_i такой, что $F(\alpha) = 1$ и на всех наборах β уровня U_{i-1} $F(\beta) = 0$. Поиск прекращается и в том случае, когда количество обращений к оператору O_F равно H . Последнюю найденную единицу принимаем за минимальную.

Следую [4,5] не трудно доказать, что для сложности ϕ_A алгоритма $A(p, r, h, H)$ поиска минимальной нижней единицы монотонных булевых функций $F(x_1, x_2, \dots, x_m)$ справедливо равенство:

$$\phi_A = \begin{cases} p \cdot r + H & , \quad \text{если } H \leq C_m^{\lfloor m/2 \rfloor} \\ p \cdot r + C_m^{\lfloor m/2 \rfloor} & , \quad \text{если } H > C_m^{\lfloor m/2 \rfloor} \end{cases}$$

Заключение

Предложенные методы позволяют находить достаточно близко к оптимальным допустимым решениям задач в условиях ограниченных ресурсов (при недостатке различных видов памяти ЭВМ или времени на поиск решения) на основе:

- задания исходных параметров поиска экстремумов;
- разбиения области локальных экстремумов на равномерные подобласти;
- отсеечения областей, не содержащих локальные экстремумы задач.

Литература.

1. Катериночкина Н.Н. Поиск максимального верхнего нуля монотонной булевой функции. ДАН СССР, т. 224 №3, 1975.
2. Васильев Ю.Л., Глаголев В.В. Метрические свойства дизъюнктивных нормальных форм. В кн: Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. М., "Наука", 1974, с. 99-148.
3. Яблонский С.В. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики.- М,Наука,1974.
4. Байжуманов А.А «Дискреттік математика» Шымкент 2007 жыл
5. Байжұманов А.А Арнайы кластағы сызықты емес логикалық теңдеулер жүйесін ықшамдау критеріі. «Педагогикалық кадрларды дайындаудың қазіргі заманғы өзекті мәселелері» Халықаралық ғылыми – практикалық конференция материалы. Шымкент, 2007ж.
6. Mendelson E. Introduction to mathematical logic. Fifth edition. – NY.: «Chapman&Hall/CRC» , 2010.
7. Гиндикин С.Г. Алгебра логики в задачах. - М.: «Наука», 1972.
8. Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика. - М.: «Наука», 2011.
9. Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов. -М.: «Наука», 2008.
10. Клини С.К. Математическая логика. - М.: «Мир», 1973.