

TO‘RTINCHI TARTIBLI O‘ZGARMAS KOEFFITSIYENTLI BIR JINSLI BO‘LMAGAN TENGLAMA UCHUN BIR MASALANI GRIN FUNKSIYASI YORDAMIDA YECHISH

¹Apakov Yusupjon Pulatovich, ²Mamajonov Sanjarbek Mirzayevich,

³Nuritdinova Zuxraxon Nosirjon qizi

¹O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasi V.I.Romanovskiy nomidagi
matematika instituti yetakchi ilmiy xodimi

¹Namangan muhandislik-qurilish instituti professori

²Qo‘qon universiteti dotsenti

³Namangan Davlat Universiteti magistranti

¹yusupjonapakov@gmail.com, ²sanjarbekmamajonov@gmail.com,

³zuhraahmadzonova60@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu maqolada o‘zgarmas koeffitsiyentli kichik hadlarga ega bo‘lgan to‘rtinchi tartibli tenglama uchun to‘rtburchak sohada bitta chegaraviy masala ko‘rib chiqilgan. Qo‘yilgan masala yechimining yagonaligi energiya integrallari usuli bilan isbotlangan. Yechim Grin funksiyasi yordamida yoziladi. Tekis yaqinlashishni isbotlashda “kichik maxraj” nolga teng bo‘lmasligi ko‘rsatiladi.

Kalit so‘zlar: to‘rtinchi tartibli tenglama, karrali xarakteristikalar, kichik hadlar, chegaraviy masala, yagonalik, mavjudlik, Grin funksiyasi.

О РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЕ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИИ ГРИНА

¹Апаков Юсупжон Пулатович, ²Мамажонов Санжарбек Мирзаевич,

³Нуритдинова Зухрахон Носиржон кизи

¹Ведущий научный сотрудник института математики имени В.И.
Романовского АН РУз.

¹Профессор Наманганского инженерно-строительного института

²Доцент Кокандского университета

³Магистрант Наманганского государственного университета

¹yusupjonapakov@gmail.com, ²sanjarbekmamajonov@gmail.com,

³zuhraahmadzonova60@gmail.com

Аннотация: В работе для неоднородного уравнения четвертого порядка с младшими членами с постоянными коэффициентами рассмотрена одна краевая задача в прямоугольной области. Единственность решения поставленной задачи доказана методом интегралов энергии. Решение выписано через построенную функцию Грина. При обосновании равномерной сходимости установлена отличность от нуля “малого знаменателя”.

Ключевые слова: уравнение четвертого порядка, кратные характеристики, младшие члены, краевая задача, единственность, существование, функция Грина.

SOLUTION OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A FOURTH ORDER INHOMOGENEOUS EQUATION WITH CONSTANT COEFFICIENTS USING GREEN’S FUNCTION

¹Apakov Yusupjon Pulatovich, ²Mamajonov Sanjarbek Mirzayevich,

³Nuritdinova Zuxraxon Nosirjon qizi

¹Leading researcher at the Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky
Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan

¹Professor of Namangan Institute of Civil Engineering

²Docent at Kokand University

³Master's student at Namangan State University

¹yusupjonapakov@gmail.com, ²sanjarbekmamajonov@gmail.com,

³zuhraahmadzonova60@gmail.com

Annotation: In this paper, for an inhomogeneous fourth-order equation with lower terms with constant coefficients, one boundary value problem in a rectangular domain is considered. The uniqueness of the solution of the stated problem is proved by the method of energy integrals. The solution is written with

the help of the constructed Green's function. In substantiating the uniform convergence, the "small denominator" is established to be nonzero.

Keywords: fourth-order equation, multiple characteristics, lower terms, boundary value problem, uniqueness, existence, Green's function.

KIRISH.

Ushbu maqolada $D = \{(x, y) : 0 < x < p, 0 < y < q\}$ sohada to'rtinchi tartibli

$$U_{xxxx} + A_1 U_{xx} + A_2 U + A_3 U_y - U_{yy} = F(x, y),$$

ko'rinishdagi tenglamani qaraymiz. Bu yerda $p, q, A_i \in R, i = \overline{1, 3}$ va $F(x, y)$ yetarlicha silliq funksiya.

Ushbu

$$U(x, y) = u(x, y) \exp\left(\frac{A_3}{2} y\right)$$

almashtirish yordamida yuqoridagi tenglamani

$$L[u] = u_{xxxx} + a_1 u_{xx} + a_2 u - u_{yy} = f(x, y), \quad (1)$$

ko'rinishga keltirish mumkin, bu yerda

$$a_1 = A_1, \quad a_2 = A_2 + \frac{A_3^2}{4}, \quad f(x, y) = F(x, y) \exp\left(-\frac{A_3}{2} y\right), \quad f_{xyy}(x, y) \in C(\bar{D}).$$

Odatda (1) tenglama vaqt bo'yicha ikkinchi tartibli hosilaga ega bo'lgan to'rtinchi tartibli karrali xarakteristikali xususiy hosilali differensial tenglama deb ataladi.

ADABIYOT TAHLILI:

Gaz dinamikasi, elastiklik nazariyasi, plitalar va qobiqlar nazariyasining ko'plab masalalari yuqori tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalarni o'rganishga keltiriladi. Fizikaviy jarayonlarda qo'llanilishi nuqtai nazaridan to'rtinchi tartibli differensial tenglamalar ham katta qiziqish uyg'otadi (qarang [1], [2], [3], [4]).

Jo'rayev T.D. va Sopuyev A. larning [5] monografiyasi to'rtinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalarni turlarga ajratish va ular uchun ayrim

chegaraviy masalalarni yechishga bag'ishlangan. Shuning uchun, tabiiyki, "kun tartibida" to'rtinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar va aralash tenglamalar nazariyasini ishlab chiqish masalasi paydo bo'ldi.

[6], [7], [8], [9], [10], [11] ishlarda uchinchi tartibli karrali xarakteristikali tenglama uchun korrekt chegaraviy masalalar o'rganilgan bo'lib, ularda ishlab chiqilgan usullarni to'rtinchi tartibli karrali xarakteristikali tenglamalarga qo'llaymiz.

Amanov D., Murzambetova M.B. lar [12] ishda bitta kichik had qatnashgan bir jinsli bo'lmagan tenglama uchun chegaraviy masalani yechishgan. Sabitov K. B., Fadeeva O.V. lar tomonidan [13] da konsolli balkaning majburiy tebranishlari uchun boshlang'ich va chegaraviy shartli masala yechilgan. Irgashev B.Yu. [14] maqolasida karrali xarakteristikali yuqori tartibli tenglama uchun chegaraviy masalani Green funksiyasini qurish orqali o'rgangan. O'rinov A.K., Azizov M.S. [15] da o'ng tomoni noma'lum bo'lgan to'rtinchi tartibli tenglama uchun masalani o'rgandilar.

TADQIQOT METODOLOGIYASI.

Ushbu maqolada o'rganilgan masala yuqorida aytib o'tilgan ishlardan ko'p jihatdan farq qiladi. Birinchidan, tenglamada kichik tartibli hosilalar qatnashgan. Ikkinchidan, yuqorida qayd etilgan ishlarda xos funksiyalar x o'zgaruvchi bo'yicha topiladi hamda qolgan hisob-kitoblar y o'zgaruvchi bo'yicha amalga oshiriladi. Bizning ishimizda y o'zgaruvchidan xos funksiyalarni topamiz, x dan esa Grin funksiyasini qurib, ikkinchi turdagi Fredgolm integral tenglamasiga kelamiz. Bu tenglamani yechish orqali biz qo'yilgan masalaning yechimini topamiz.

TAHLILLAR VA NATIJALAR.

D sohada (1) tenglama uchun ushbu masalani qaraymiz:

A_1 **Masala.** D sohada (1) tenglamani qanoatlantiruvchi, $C_{x,y}^{4,2}(D) \cap C_{x,y}^{3,1}(\bar{D})$ sinfga tegishli hamda ushbu chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,y)$ funksiyani toping:

$$u(x,0)=0, \quad u(x,q)=0, \quad 0 \leq x \leq p, \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial^m}{\partial x^m} u \right|_{x=0} = \psi_m(y), \quad \left. \frac{\partial^m}{\partial x^m} u \right|_{x=p} = \psi_{m+1}(y), \quad m=1,3, \quad 0 \leq y \leq q, \quad (3)$$

bu yerda $\psi_i(y)$, $i=\overline{1,4}$ lar berilgan yetarlicha silliq funksiyalar.

Aytib o'tish kerakki, [13], [15], [16], [17] ishlarda to'rtinchi tartibli karrali xarakteristikali model tenglamalar uchun chegaraviy masalalar spektral usul yordamida o'rganilgan. [18] da Furiye usuli yordamida ixtiyoriy juft tartibli model tenglama uchun chegaraviy masala yechilgan. [19], [20], [21] ishlarda x o'zgaruvchi bo'yicha birinchi tartibli hosila ham qatnashgan o'zgarmas koeffitsiyentli, [22], [23], [24], [25] ishlarda esa o'zgaruvchan koeffitsiyentli (1) tenglama uchun chegaraviy masalalar o'rganilgan. Ushbu maqolada ko'rilgan masala yuqorida keltirilgan ishlarning xususiy holi bo'lmay, balki yangi natijadir.

1-teorema. Agar A_1 masala yechimga ega bo'lsa, u holda $a_1 \leq 0$, $a_2 \geq 0$ shartlar bajarilganda bu yechim yagonadir.

Isbot. Faraz qilaylik, A_1 masala ikkita $u_1(x,y)$ va $u_2(x,y)$ yechimlarga ega bo'lsin. U holda $u(x,y) = u_1(x,y) - u_2(x,y)$ funksiya bir jinsli (1) tenglamani va bir jinsli chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi. $\bar{D}$ sohada $u(x,y) \equiv 0$ ekanini ko'rsatamiz.

D sohada ushbu ayniyat o'rinli:

$$uL[u] \equiv \frac{\partial}{\partial x}(uu_{xxx} - u_x u_{xx} + a_1 u u_x) - \frac{\partial}{\partial y}(u u_y) + u_{xx}^2 + u_y^2 - a_1 u_x^2 + a_2 u^2 = 0. \quad (4)$$

(4) ni D soha bo'yicha integrallab, bir jinsli chegaraviy shartlarni e'tiborga olsak,

$$\int_0^p \int_0^q u_{xx}^2 dx dy + \int_0^p \int_0^q u_y^2 dx dy - a_1 \int_0^p \int_0^q u_x^2 dx dy + a_2 \int_0^p \int_0^q u^2 dx dy = 0,$$

ga ega bo'lamiz. Agar $a_2 > 0$ bo'lsa, to'rtinchi qo'shiluvchidan $u(x,y) \equiv 0$, $(x,y) \in \bar{D}$, agar $a_2 = 0$ bo'lsa, ikkinchi qo'shiluvchidan $u(x,y) = h(x)$ bo'lib,

$u(x,0)=0$ shartga ko'ra $h(x)=0$, bundan $u(x,y)\equiv 0$, $(x,y)\in \bar{D}$ ekani kelib chiqadi. **1-teorema isbotlandi.**

1-izoh. Agar 1-teorema shartlari buzilsa, bir jinsli (1) tenglama uchun A_1 bir jinsli masala notrivial yechimga ega bo'lishi mumkin. Masalan,

$a_2 = -\left(\frac{\pi n}{q}\right)^2$ bo'lganda

$$\begin{cases} u_{xxxx}(x,y) + \left(\frac{\pi k}{p}\right)^2 u_{xx}(x,y) - \left(\frac{\pi n}{q}\right)^2 u(x,y) - u_{yy} = 0, \\ u(x,0) = u(x,q) = 0, \\ u_x(0,y) = u_x(p,y) = u_{xxx}(0,y) = u_{xxx}(p,y) = 0, \end{cases}$$

bir jinsli masala

$$u_{k,n} = \cos\left(\frac{\pi k}{p}x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{q}y\right), \quad k=0,1,2,\dots, \quad n \in N,$$

ko'rinishdagi notrivial yechimlarga ega.

2-Teorema. Agar ushbu

$$1) \quad D < \frac{\mu_1^3 (1 - e^{-2\mu_1 p})^2}{p(1 + 2\mu_1^2)};$$

$$2) \quad \psi_i^{(j)}(0) = \psi_i^{(j)}(q) = 0, \quad \psi_i(y) \in C^3[0,q], \quad i = \overline{1,4}, \quad j = 0,2;$$

$$3) \quad f(x,0) = f(x,q) = 0, \quad 0 \leq x \leq p, \quad \text{shartlar bajarilsa, } A_1 \text{ masala yechimi}$$

mavjud. Bu yerda

$$D = \max\{|a_i|, i = 1,2\}, \quad \mu_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2q}}.$$

Isbot. (2) chegaraviy shartni inobatga olib, quyidagi masalani qaraymiz:

$$\begin{cases} Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, \\ Y(0) = Y(q) = 0. \end{cases}$$

(5)

Bizga ma'lumki, (5) masala faqatgina

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{q} \right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

bo'lganda notrivial yechimga ega va (5) masalaning xos qiymatlari deyiladi hamda ularga mos xos funksiyalar esa

$$Y_n(y) = \sqrt{\frac{2}{q}} \sin \left(\frac{\pi n}{q} y \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

ko'rinishda bo'ladi.

A_1 masala yechimini ushbu ko'rinishda qidiramiz:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \cdot Y_n(y). \quad (7)$$

(7) ni (1) tenglamani qanoatlantiradi deb, (3) chegaraviy shartlarni hisobga olgan holda (7) ni (1) ga qo'ysak, ushbu masalaga kelamiz:

$$\begin{cases} X_n^{(4)}(x) + a_1 X_n''(x) + a_2 X_n(x) + \lambda_n X_n(x) = f_n(x), \\ X_n'(0) = \psi'_{1n}, \quad X_n'(p) = \psi'_{2n}, \quad X_n'''(0) = \psi'_{3n}, \quad X_n'''(p) = \psi'_{4n}, \end{cases} \quad (8)$$

bu yerda

$$\psi'_{in} = \int_0^q \psi'_{in}(\eta) Y_n(\eta) d\eta, \quad i = \overline{1, 4}, \quad f_n(x) = \int_0^q f(x, \eta) Y_n(\eta) d\eta, \quad n \in N.$$

(8) masalani yechish uchun Grin funksiyasidan foydalanamiz. Ushbu

$$V_n(x) = X_n(x) - \rho_n(x) \quad (9)$$

belgilash yordamida chegaraviy shartlarni nolga aylantiramiz. Bu yerda

$$\rho_n(x) = \frac{2px - x^2}{2p} \psi'_{1n} + \frac{x^2}{2p} \psi'_{2n} + \frac{4px^3 - x^4 - 4p^2 x^2}{24p} \psi'_{3n} + \frac{x^4 - 2p^2 x^2}{24p} \psi'_{4n}$$

(9) ni (8) ga olib borib qo'yamiz. Natijada,

$$\begin{cases} V_n^{(4)} + \lambda_n V_n(x) = g_n(x) - a_1 V_n''(x) - a_2 V_n(x) \\ V_n'(0) = V_n'(p) = V_n'''(0) = V_n'''(p) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

masalani olamiz. Uning yechimini quyidagicha izlaymiz:

$$V(x) = \int_0^p G_n(x, \xi) (g_n(\xi) - a_1 V_n''(\xi) - a_2 V_n(\xi)) d\xi \quad (11)$$

bu yerda $G_n(x, \xi)$

$$\begin{cases} V_n^{(4)} + \lambda_n V_n(x) = 0, \\ V_n'(0) = V_n'(p) = V_n''(0) = V_n''(p) = 0, \end{cases} \quad (12)$$

masalaning Grin funksiyasi va uning ko'rinishi quyidagicha:

$$G_n(x, \xi) = \begin{cases} G_n^1(x, \xi), & 0 \leq x < \xi \leq p, \\ G_n^2(x, \xi), & 0 \leq \xi < x \leq p. \end{cases}$$

bu yerda

$$\begin{aligned} G_n^1(x, \xi) = & \frac{1}{2\mu_n^3 \Delta} \left\{ \left[\cos(\mu_n p) \operatorname{sh}(\mu_n p) (\sin(\mu_n (\xi - p)) \operatorname{sh}(\mu_n (\xi - p))) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \cos(\mu_n (\xi - p)) \operatorname{ch}(\mu_n (\xi - p)) \right) \right] \cos(\mu_n x) \operatorname{ch}(\mu_n x) + \\ & + \sin(\mu_n p) \operatorname{ch}(\mu_n p) (\sin(\mu_n (\xi - p)) \operatorname{sh}(\mu_n (\xi - p))) + \\ & + \cos(\mu_n (\xi - p)) \operatorname{ch}(\mu_n (\xi - p)) \left. \right] \cos(\mu_n x) \operatorname{ch}(\mu_n x) + \\ & + \sin(\mu_n p) \operatorname{ch}(\mu_n p) (\sin(\mu_n (\xi - p)) \operatorname{sh}(\mu_n (\xi - p))) - \\ & - \cos(\mu_n (\xi - p)) \operatorname{ch}(\mu_n (\xi - p)) \left. \right] + \\ & + \cos(\mu_n p) \operatorname{sh}(\mu_n p) (\sin(\mu_n (\xi - p)) \operatorname{sh}(\mu_n (\xi - p))) + \\ & + \cos(\mu_n (\xi - p)) \operatorname{ch}(\mu_n (\xi - p)) \left. \right] \sin(\mu_n x) \operatorname{sh}(\mu_n x) \left. \right\}, \\ G_n^2(x, \xi) = & \frac{1}{2\mu_n^3 \Delta} \left\{ \left[\cos(\mu_n p) \operatorname{sh}(\mu_n p) (\sin(\mu_n \xi) \operatorname{sh}(\mu_n \xi)) - \right. \right. \\ & - \cos(\mu_n \xi) \operatorname{ch}(\mu_n \xi)) - \sin(\mu_n p) \operatorname{ch}(\mu_n p) (\sin(\mu_n \xi) \operatorname{sh}(\mu_n \xi)) + \\ & + (\cos(\mu_n \xi) \operatorname{ch}(\mu_n \xi)) \left. \right] \cos(\mu_n (x - p)) \operatorname{ch}(\mu_n (x - p)) + \\ & + \left[\sin(\mu_n p) \operatorname{ch}(\mu_n p) (\sin(\mu_n \xi) \operatorname{sh}(\mu_n \xi)) - \right. \\ & - \cos(\mu_n \xi) \operatorname{ch}(\mu_n \xi)) + \cos(\mu_n p) \operatorname{sh}(\mu_n p) (\sin(\mu_n \xi) \operatorname{sh}(\mu_n \xi)) + \end{aligned}$$

$$+ \cos(\mu_n \xi) \operatorname{ch}(\mu_n \xi)) \sin(\mu_n (x - p)) \operatorname{sh}(\mu_n (x - p)) \Big|,$$

$$|G_n(x, \xi)| \leq \frac{1}{\mu_n^3 (1 - e^{-2\mu_n p})^2} \begin{cases} e^{-\mu_n (2p - x - \xi)}, & x, \xi \in (0, p), \\ e^{-2\mu_n p}, & x = \xi = 0, \\ 1, & x = \xi = p, \end{cases}$$

$$\Delta = -e^{2\mu_n p} \bar{\Delta}, \quad \bar{\Delta} = \frac{1 + e^{-4\mu_n p}}{2} - \cos(2\mu_n p) e^{-2\mu_n p}, \quad \mu_n = \sqrt{\frac{\pi n}{2q}}.$$

Lemma. Δ nolga teng emas.

Isbot: Faraz qilaylik, $\bar{\Delta} = 0$ bo'lsin, u holda

$$2 \cos(2\mu_n p) = e^{2\mu_n p} + e^{-2\mu_n p},$$

ga ega bo'lamiz. Ammo

$$\begin{cases} e^{2\mu_n p} + e^{-2\mu_n p} > 2, \\ 2 \cos(2\mu_n p) \leq 2, \end{cases}$$

tengsizliklar sistemasi yechimga ega emasligidan har doim

$$\bar{\Delta} > 0,$$

bo'ladi va $\Delta \neq 0$ ekanligi kelib chiqadi.

$\bar{\Delta}$ ning minimum qiymatini topish uchun $\cos(2\mu_n p) = 1$ desak,

$$\bar{\Delta} \geq \frac{1}{2} (1 - e^{-2\mu_n p})^2,$$

tengsizlikka ega bo'lamiz.

Bu tengsizlikning o'ng tomonidagi ifoda n ning natural qiymatlarida o'suvchi. Demak, $\bar{\Delta}$ o'zining eng kichik qiymatiga $n=1$ da erishadi:

$$\bar{\Delta} \geq \frac{1}{2} (1 - e^{-2\mu_1 p})^2 > 0.$$

Bu esa "kichik maxraj" ning mavjud emasligini ham ko'rsatadi.

Lemma isbotlandi.

(11) ni bo'laklab integrallaymiz va ushbu

$$\alpha_n(x) = \int_0^p G_n(x, \xi) g_n(\xi) d\xi, \quad \tilde{G}_n(x, \xi) = -a_1 G_{n-1}(x, \xi) - a_2 G_n(x, \xi),$$

belgilashlarni kiritib, natijada

$$V_n(x) = \alpha_n(x) + \int_0^p \tilde{G}_n(x, \xi) V_n(\xi) d\xi, \quad n \in N \quad (13)$$

ko'rinishdagi Fredgolmning 2-tur integral tenglamasiga ega bo'lamiz.

(13) tenglamaning yechimini rezolventa yordamida yozamiz:

$$V_n(x) = \alpha_n(x) + \int_0^p R_n(x, \xi) \alpha_n(\xi) d\xi, \quad (14)$$

bu yerda

$$R_n(x, \xi) = \tilde{G}_{0n}(x, \xi) + \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{G}_{mn}(x, \xi), \quad \tilde{G}_{0n}(x, \xi) = \tilde{G}_n(x, \xi),$$

$$\tilde{G}_{mn}(x, \xi) = \int_0^p \tilde{G}_{1n}(x, s) \tilde{G}_{(m-1)n}(s, \xi) ds, \quad m = 2, 3, \dots, \quad n \in N.$$

(7), (9) va (14) ga ko'ra A_1 masala yechimi

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n(x) + \int_0^p R_n(x, \xi) \alpha_n(\xi) d\xi + \rho_n(x) \right) Y_n(y), \quad (15)$$

ko'rinishda bo'ladi.

(15) ni yaqinlashishga tekshiramiz, rezolventani baholash uchun majorant qatorni quyidagi ko'rinishda topamiz:

$$\frac{1}{p} \sum_{m=0}^{\infty} (Jp)^{m+1}, \quad (16)$$

bu yerda

$$J = D \left(\frac{2}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_1^3} \right) (1 - e^{-2\mu_1 p})^{-2},$$

2-teoremani 1-shartini quyidagi

$$D\left(\frac{2}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_1^3}\right)(1 - e^{-2\mu_1 p})^{-2} p < 1,$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bundan

$$Jp < 1,$$

hosil bo'lib, (16) majorant qator cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya hadlari yig'indisidan iborat bo'ladi. Demak, rezolventa uchun

$$|R_n(x, \xi)| \leq \frac{J}{1 - Jp} \leq M, \quad (17)$$

bahoni olamiz.

$\alpha_n(x)$ ni baholash uchun, avval, 2-teoremaning 2 va 3-shartlarini hisobga olgan holda, ψ_{in} ni uch marta va $f_n(x)$ ni ikki marta bo'laklab integrallaymiz va ushbu

$$|\psi_{in}| \leq \frac{M}{n^3} |\Psi_{in}|, \quad i = \overline{1, 4}, \quad |f_n(x)| \leq \frac{M}{n^2} |\Phi_n(x)|, \quad n \in N, \quad (18)$$

baholarga ega bo'lamiz, bu yerda

$$\Psi_{in} = \sqrt{\frac{2}{q}} \int_0^q \psi_i''(\eta) \cos\left(\frac{\pi n}{q} \eta\right) d\eta, \quad i = \overline{1, 4}, \quad \Phi_n(x) = \int_0^q f_{\eta\eta}(x, \eta) Y_n(\eta) d\eta.$$

(18) ni hamda quyidagi

$$|g_n(x)| \leq \frac{M}{n} \sum_{i=1}^4 |\Psi_{in}| + \frac{M}{n^2} |\Phi_n(x)| + \frac{M}{n^3} \sum_{i=1}^4 |\Psi_{in}|,$$

$$|g'_n(x)| \leq \frac{M}{n} \sum_{i=1}^4 |\Psi_{in}| + \frac{M}{n^2} |\Phi'_n(x)| + \frac{M}{n^3} \sum_{i=1}^4 |\Psi_{in}|,$$

baholarni inobatga olgan holda

$$|\alpha_n(x)| \leq \frac{M}{n^3} \sum_{i=1}^4 |\Psi_{in}| + \frac{M}{n^4} (1 + |\Phi_n(x)|) + \frac{M}{n^5} \sum_{i=1}^4 |\Psi_{in}|, \quad x \in [0, p], \quad (19)$$

bahoga ega bo'lamiz.

(17) va (19) dan foydalanib, $V_n(x)$ ning bahosini quyidagicha topamiz,

$$|V_n(x)| \leq \frac{M}{n^3} \sum_{i=1}^4 |\Psi_{in}| + \frac{M}{n^4} (1 + |\Phi_n(x)|) + \frac{M}{n^5} \sum_{i=1}^4 |\Psi_{in}|, \quad x \in [0, p]. \quad (20)$$

$\rho_n(x)$ ni bahosini topamiz:

$$|\rho_n(x)| \leq \frac{M}{n^3} \sum_{i=1}^4 |\Psi_{in}|, \quad x \in [0, p]. \quad (21)$$

(20) va (21) baholardan foydalanib,

$$|u(x, y)| \leq M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^4 |\Psi_{in}| + M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} (1 + |\Phi_n(x)|) + \frac{M}{n^5} \sum_{i=1}^4 |\Psi_{in}| < \infty, \quad (x, y) \in \bar{D},$$

ga ega bo'lamiz.

Endi $u_{xxxx}(x, y)$ ni tekis yaqinlashishga tekshiramiz. Grin funksiyasida 3-tartibli hosilasida uzilishga egaligini e'tiborga olib, $V_n(x)$ dan 4-tartibli hosila olamiz:

$$\begin{aligned} V_n^{(4)}(x) = & g_n(x) - a_1 \left(\alpha_n''(x) + \int_0^p R_{nxx}(x, \xi) \alpha_n(\xi) d\xi \right) - \\ & - a_2 \left(\alpha_n'(x) + \int_0^p R_n(x, \xi) \alpha_n(\xi) d\xi \right) - \lambda_n \left(\alpha_n(x) + \int_0^p R_n(x, \xi) \alpha_n(\xi) d\xi \right). \end{aligned}$$

Quyidagi

$$|\alpha_n''(x)| \leq \frac{M}{n^2} \sum_{i=1}^4 |\Psi_{in}| + \frac{M}{n^3} + \frac{M}{n^4} \sum_{i=1}^4 |\Psi_{in}|, \quad |R_{nxx}(x, \xi)| \leq nM,$$

baholardan foydalanib,

$$|V_n^{(4)}(x)| \leq \frac{M}{n} \sum_{i=1}^4 |\Psi_{in}| + \varphi_{1n}(x),$$

ga ega bo'lamiz, bu yerda

$$\begin{aligned} \varphi_{1n}(x) = & \frac{M}{n^2} \left(\sum_{i=1}^4 |\Psi_{in}| + 1 + |\Phi_n(x)| \right) + \frac{M}{n^3} \left(\sum_{i=1}^4 |\Psi_{in}| + 1 \right) + \\ & + \frac{M}{n^4} \left(\sum_{i=1}^4 |\Psi_{in}| + 1 + |\Phi_n(x)| \right) + \frac{M}{n^2} \sum_{i=1}^4 |\Psi_{in}| + \frac{M}{n^2} + \frac{M}{n^2} \sum_{i=1}^4 |\Psi_{in}| = O(n^{-2}), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

U holda $u_{xxxx}(x, y)$ ning bahosi

$$|u_{xxxx}(x, y)| \leq M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (|\Psi_{1n}| + |\Psi_{2n}| + |\Psi_{3n}| + |\Psi_{4n}|) + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{1n}(x), \quad (x, y) \in \bar{D},$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu yerda 2-qator absalyut va tekis yaqinlashuvchi. 1-qator absalyut va tekis yaqinlashuvchiligini isbotlash uchun Koshi-Bunyakovskiy va Bessel tengsizliklaridan foydalanamiz:

$$\begin{aligned} M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (|\Psi_{1n}| + |\Psi_{2n}| + |\Psi_{3n}| + |\Psi_{4n}|) &\leq \\ &\leq M \left(\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\Psi_{1n}|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\Psi_{2n}|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\Psi_{3n}|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\Psi_{4n}|^2} \right) \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} \leq \\ &\leq M (\|\psi_1'''(y)\| + \|\psi_2'''(y)\| + \|\psi_3'''(y)\| + \|\psi_4'''(y)\|) \sqrt{\frac{\pi^2}{6}} < \infty, \end{aligned}$$

bu yerda

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\Psi_{in}|^2 \leq \|\psi_i'''(y)\|_{L_2(0, q)}^2, \quad i = \overline{1, 4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

(1) tenglamadan u_{yy} ham yaqinlashuvchi bo'ladi. 2-teorema isbotlandi.

XULOSALAR.

Koeffitsiyentlari o'zgarmas bo'lgan karrali xarakteristikali to'rtinchi tartibli bir jinsli bo'lmagan tenglama uchun to'g'ri to'rtburchakli sohada yangi korrekt chegaraviy masala ko'rib chiqildi. Qo'yilgan masala yechimining yagonaligi yetarli shartlar bilan energiya integrallari usuli yordamida isbotlandi. Yetarli shartlar buzilganda masala yagona yechimga ega bo'lmasligi mumkinligiga misol izoh shaklida keltirildi.

Masala yechimining mavjudligini isbotlash uchun birinchi navbatda Furiye usuli bilan o'zgaruvchilar ajratildi. So'ngra $\mathcal{Y}$ o'zgaruvchi bo'yicha xos qiymatlar va xos funksiyalar topildi. $\mathcal{X}$ o'zgaruvchi bo'yicha tuzilgan masalaning yechimi Grin funksiyasi yordamida qidirildi va noma'lum funksiyaga nisbatan Fredgolmning ikkinchi rod integral tenglamasini yechishga keldi. Ushbu integral tenglamaning yechimi rezolventa yordamida aniqlandi va qo'yilgan masalaning

yechimi qator ko‘rinishida topildi. Tenglamada qatnashgan yechim va uning hosilalarining absolyut va tekis yaqinlashishi isbotlandi.

Adabiyotlar

1. Турбин М.В. Исследование начально-краевой задачи для модели движения жидкости Гершел-Балкли // Вест. Воронеж. Гос. Ун-та. Сер. Физ. Мат., 2013, № 2, с.246-257.
2. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны.-М.: Мир, 1977.
3. Шабров С.А. Об оценках функций влияния одной математической модели четвертого порядка // Вест. Воронеж. Гос. Ун-та. Сер. Физ. Мат., 2015, № 2, с.168-179.
4. Benney D.J., Luke J.C. Interactions of permanent waves of finite amplitude // J. Math. Phys., 1964, 43, pp.309-313.
5. Джураев Т.Д., Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка., Ташкент: Фан, 2000, 144 с.
6. Джураев Т.Д, Апаков Ю.П. К теории уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, содержащего вторую производную по времени // Украинский математический журнал. Киев, 2010, том 62, № 1, с.40-51.
7. Apakov Yu.P., Rutkauskas S. On a boundary problem to third order PDE with multiple characteristics // Nonlinear Analysis: Modeling and Control. Vilnius, 2011, Vol. 16, № 3, pp.255-269.
8. Apakov Yu.P. On the solution of a boundary-value problem for a third- order equation with multiple characteristics // Ukrainian Mathematical Journal. Springer, New York, June, 2012, Vol. 64, № 1, pp.1-11.
9. Apakov Yu.P. Irgashev B.Yu. Boundary-value problem for a degenerate high-odd-order equation // Ukrainian Mathematical Journal. Springer, New York, June, 2015, Vol. 66, № 10, pp.1475-1488.
10. Apakov Yu.P., A. Kh. Zhuraev. Third boundary-value problem for a third-order differential equation with multiple characteristics // Ukrainian

- Mathematical Journal. Springer, New York, February, 2019, Vol. 70, № 9, pp.1467-1476.
11. Apakov Yu.P. On Unique Solvability of Boundary-Value Problem for a Viscous Transonic Equation // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020, Vol. 41, № 9, pp.1754-1761.
 12. Аманов Д., Мурзамбетова М. Б. Краевая задача для уравнения четвертого порядка с младшим членом, Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьютер. науки, 2013, выпуск 1, с.3-10.
 13. Сабитов К. Б., Фадеева О. В. Начально-граничная задача для уравнения вынужденных колебаний консольной балки // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2021, 25, 1, с.51-66.
 14. Иргашев Б. Ю. Краевая задача для одного вырождающегося уравнения высокого порядка с младшими членами // Бюллетень Института математики 2019, №6, с.23-30.
 15. Urinov A.K., Azizov M.S. Boundary Value Problems for a Fourth Order partial Equation with an Unknown Right-hand Part // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2021, Vol. 42, № 3, pp.632-640.
 16. Аманов Д., Бекиев А.Б., Отарова Ж.А. Об одной краевой задаче для уравнения четвертого порядка // УзМЖ. 2015, № 4, с.11-18.
 17. Сабитов К. Б. Обратные задачи для уравнения колебаний балки по определению правой части и начальных условий // Дифференциальные уравнения, 2020, том 56, №6, с.761-774.
 18. Иргашев Б. Ю. Краевая задача для уравнения высокого четного порядка, Вестн. Волгогр. гос. ун-та. Сер. 1, Мат. Физ., 2016, выпуск 3(33), с.6-18.
 19. Apakov Y.P., Mamajonov S.M. Boundary-value problem for the fourth-order equation with multiple characteristics in a rectangular domain. Journal of Mathematical Sciences. 2023, Vol. 272, № 2, pp.185-201.
 20. Апаков Ю.П., Мамажонов С.М. Краевая задача для неоднородного уравнения четвёртого порядка с постоянными коэффициентами.

Челябинский физико-математический журнал. 2023, Т. 8, выпуск 2, с.157-172.

21. Мамажонов С.М. Третья краевая задача для неоднородного уравнения четвертого порядка с постоянными коэффициентами. Бюллетень Института математики. 2022, Vol. 5, № 6, с.100-109.
22. Апаков Ю.П., Мамажонов С.М. Краевая задача для неоднородного уравнения четвертого порядка с переменными коэффициентами. Доклады Академии наук Республики Узбекистан. 2022, № 4, с.7-13.
23. Апаков Ю.П., Мамажонов С.М. Краевая задача для неоднородного уравнения четвёртого порядка с младшими членами. Дифференциальные уравнения. 2023, том 59, № 2, с.183-192.
24. Apanov Y.P., Mamajonov S.M. The third boundary problem for a fourth-order nonhomogeneous equation with variable coefficients. Uzbek Mathematical Journal. 2023, Vol. 67, № 3, pp.35-44.
25. Мамажонов С.М. Решение второй краевой задачи для неоднородного уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками. Научный вестник НамГУ. 2023, № 7, с.70-80.