

**NATURAL SONNI ARIFMETIK PROGRESSIYADAN OLINGAN BESHTA
TUB SONNING KVADRATLARI YIG'INDISI KO'RINISHIDA
TASVIRLASHLAR SONI HAQIDA**

Imamov Oybek Shanazarovich

Termiz davlat universiteti tayanch doktoranti.

Tel: [945136709](tel:945136709) e-mail: oybekimamov000@gmail.com

Annotatsiya. Ishda birinchi marta berilgan yetarlicha katta N - natural sonini ayirmasi d ($1 < d \leq N^\delta$) teng bo'lgan arifmetik progressiyadan olingan beshta $p_1, \dots, p_5$ tub sonlarning kvadratlari yig'indisi ko'rinishida ifodalashlar soni $r(N)$ uchun quyidan baho olingan. Bunda $\delta > 0$ - yetarlicha kichik son. Hozirgacha e'lon qilingan ishlarda faqat $1 < d \leq \ln^\epsilon N$ bo'lgan hollar qaralgan edi. Olingan natija Zualufning shu sohadagi natijasining yaxshilangani va Y.H.Wangning qaralayotgan tenglama bo'yicha izlanganlarini to'ldiradi.

Kalit so'zlar: Diofant tenglamasi, kongurent yechim, musbat yechim, maxsus nol, bosh xarakter, primitiv xarakter, kichik yoy, katta yoy, Xua metodi, Goldbaxning ternar muammosi.

**ON THE NUMBER OF REPRESENTATIONS OF A NATURAL NUMBER IN
THE FORM OF THE SUM OF FIVE SQUARE PRIMES FROM
ARITHMETIC PROGRESSION**

Imamov Oybek Shanazarovich

Target-based doctoral student at Termez State University.

Phone: [945136709](tel:945136709) e-mail: oybekimamov000@gmail.com

Annotation. In this work, for the first time, a lower estimate for the number $r(N)$ is obtained, the representation of a sufficiently large natural number in the form of the sum of the heel of prime numbers $p_1, \dots, p_5$ from an arithmetic progression with the difference d ($1 < d \leq N^\delta$), $\delta > 0$ - where is a sufficiently small constant. Until now, a couple of published works have considered the case

when $1 < d \leq \ln^c N$ where c is an arbitrary constant. The obtained result of Zulauf complements the study of H.Y.Wang in this direction.

Key words: Diophantine equation, congruent solution, positive solution, exceptional zero, simple character, primitive character, small arc, large arc, Hua method, ternary Goldbach problem

О КОЛИЧЕСТВЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ НАТУРАЛЬНОГО ЧИСЛА В ВИДЕ СУММЫ ПЯТИ КВАДРАТОВ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ ИЗ АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

Имамов Ойбек Шаназарович

Докторант Термезского государственного университета.

Тел: [945136709](tel:945136709) e-mail. oybekimamov000@gmail.com

Аннотация. В работе впервые получена оценка снизу для $r(N)$ числа представление достаточно большого натурального числа N в виде суммы пяти простых чисел $p_1, \dots, p_5$ из арифметической прогрессии с разностью d ($1 < d \leq N^\delta$), где $\delta > 0$ - достаточно малое постоянное. До сих пор опубликованных работах рассматривалось случае, когда $1 < d \leq \ln^c N$ где c произвольная постоянная. Полученный результат Зулауфа и дополняет исследование И.Х. Ванга в этом направлении.

Ключевые слова: диофантово уравнение, конгруэнтное решение, положительное решение, исключительный нуль, простой характер, примитивный характер, малая дуга, большая дуга, метод Хуа, тернарная задача Гольдбаха.

1.Введение. Пусть N достаточно большое нечетное число, удовлетворяющее условию $N \equiv 5 \pmod{24}$ и пусть $p_1, \dots, p_5$ простые числа. Впервые Хуа-Ло-Кен доказал (см. стр.110 работы [1]), что диофантово уравнение

$$N = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 \quad (1)$$

разрешимо в простых числах $p_1, \dots, p_5$. Ming-Chit Liu и Kai-Man Tsang [2]

доказали, разрешимость уравнения $N = a_1 p_1^2 + \dots + a_5 p_5^2$, где $a_1, \dots, a_5, N$ - целые числа, удовлетворяющие условиям конгруэнт разрешимости и положительной разрешимости. Они также в [2] утверждали, что методом использованным ими для суммы пяти квадратов можно доказать разрешимость уравнения

$N = c_1 p_1 + c_2 p_2 + c_3 p_3^k$, при целом $k \geq 1$. Доказательство последнего утверждения $k=2$ приведено в работе И.Аллакова и Н.С.Музроповой [3], [4].

Выше сформулированные задачи можно рассматривать как нелинейное расширение тернарной проблемы Гольдбаха (теорема Гольдбаха-Виноградова [5]), а также как аналогом известной теоремы Лагранжа о четырех квадратах (см. гл.VI, §6.5, [6]).

Y.H.Wang [7] исследовал уравнение (1) с простыми переменными из арифметической прогрессии, т.е. простые переменные удовлетворяют условиям:

$$p_i \equiv b_i \pmod{d} \quad i=1,2,\dots,5, \quad \bar{b}=(b_1,\dots,b_5) \in B(N,d),$$

где

$$B(N,d) = \left\{ \bar{b} \in \mathbb{N}^5 : 1 \leq b_i \leq d, (b_i, d)=1, b_1^2 + \dots + b_5^2 \equiv N \pmod{\sigma(d)d} \right\}, \quad (2)$$

и $\sigma(d)=1,4,2$ для $2 \nmid d$, $2 \parallel d$ и $4 \mid d$, соответственно. Здесь $\mathbb{N}$ - множество натуральных чисел и $\mathbb{N}^5 = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Он доказал, что существует эффективная положительная постоянная δ , такая, что диофантово уравнение

$$\begin{cases} N = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2, \\ p_i \equiv b_i \pmod{d}, i = 1, \dots, 5, \end{cases} \quad (3)$$

с простыми переменными разрешимо для всех положительных целых чисел $d \leq N^\delta$ при условии, что $N \equiv 5 \pmod{24}$ большое нечетное целое число, $B(N, d)$ непустое.

Отметим, что из этого результата вытекает знаменитая теорема Линника о наименьшем простом числе в арифметической прогрессии (см. [8]).

В настоящей работе мы оценим количество решений уравнения (1) в простых числах из арифметической прогрессии. Пусть $r(N)$ - количество решений уравнения (1) в простых числах $p_i \equiv b_i \pmod{d} (i = 1, \dots, 5)$, где N - достаточно большое фиксированное натуральное число, $\chi \pmod{q}$ и $\chi_0 \pmod{q}$ - означает произвольный характер и главный характер Дирихле по модулю q , соответственно. Известно, что существует постоянная c_1 , такая, что существует не более одного примитивного характера $\tilde{\chi}$ и модуль $\tilde{r} \leq T$, для которого соответствующая L-функция $L(s, \chi)$ имеет нуль в области $\sigma > 1 - c_1 (\log T)^{-1}$, $|t| \leq T$; и если такой исключительный характер существует, он квадратичен и соответствующий ему нуль $\tilde{\beta}$, так называемый исключительным нулем, будет простым и единственным. Кроме того, этот исключительный нуль $\tilde{\beta}$ удовлетворяет соотношению

$$c_2 \left(\tilde{r}^{\frac{1}{2}} \log^2 \tilde{r} \right)^{-1} \leq 1 - \tilde{\beta} \leq c_1 / \log T, \quad (4)$$

(см. § 14, [9])

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1.1. Если N - достаточно большое число и $Q = N^{21\delta}$, тогда справедливы следующие утверждения

а) если не существует β -исключительный нуль (4) L -функции Дирихле или же он существует и модуль соответствующего исключительного характера $\tilde{r} > Q^{\frac{1}{13}}$, тогда

$$r(N) \geq N^{\frac{3}{2}} Q^{-\frac{1}{5}} \ln^{-5} N \left(1 - c_1 d^{-2} Q^{-\frac{3}{10}} \ln^{c+4} N \right)$$

б) если существует β -исключительный нуль (4) L -функции Дирихле и модуль соответствующего исключительного характера $\tilde{r} \leq Q^{\frac{1}{13}}$, тогда

$$r(N) \geq N^{\frac{3}{2}} Q^{-\frac{2}{5}} \ln^{-5} N \left(1 - c_2 d^{-2} Q^{-\frac{1}{10}} \ln^{c+4} N \right).$$

Из этой теоремы следует.

Следствие 1.1. Если N - достаточно большое число и $Q = N^{21\delta}$, существует эффективная положительная константа δ для $d \leq N^\delta$ справедлива оценка

$$r(N) \geq N^{\frac{3}{2}} Q^{-\frac{2}{5}} (\ln N)^{-5},$$

Отметим, что подобный результат, когда $d=1$ был доказан в работе И.Аллакова и Н.Музраповой [4].

Отметим также, что в соответствующем линейном случае, то есть для тернарной теоремы Гольдбаха с простыми числами в арифметической прогрессии, М.С.Liu и Т.Zhan [10] доказали, что существует эффективная положительная постоянная δ такая, что для всех положительных целых чисел $d \leq N^\delta$ диофантово уравнение

$$\begin{cases} N = p_1 + p_2 + p_3, \\ p_i \equiv b_i \pmod{d}, i = 1, 2, 3, \end{cases}$$

$$(b_j, d) = 1, \sum_{j=1}^3 b_j \equiv N \pmod{d}$$

разрешимо для больших нечетных N , где

Их результат является улучшением результатов работы Rademacher[11], Ayoub [12] и Zulauf [13]. Предыдущие результаты были справедливы только для фиксированного положительного целого числа d или $d \leq (\log N)^C$.

Метод Хуа с небольшими модификациями в действительности дает, что уравнение (3) разрешимо для больших N при непустом множестве (2) $d \leq \log^A N$, но он терпит неудачу, когда мы хотим расширить область d до $d \leq N^\delta$, где δ ($0 < \delta < 1$) абсолютная положительная постоянная.

В 1975 году M.L.Montgomery и R.C.Vaughan [14] уменьшили исключительное множество проблемы Гольдбаха с $O(X \log^{-A} X)$ до $O(X^{1-\delta})$. Их трудность также заключалась в более широких главных дугах и в том, что теорема Зигеля-Вальфиша [15] не могла быть использована. Они решили эту проблему с помощью феномена Дейринга-Хейлбронна [16] и теоремы Галлахера [17]. Но если мы воспользуемся их методом для нашей квадратичной задачи, то столкнемся со слишком большим количеством случаев и необходимостью выполнять множество вычислений. По этой же причине мы не применяем метод M.C.Liu и T.Zhan [18]. Поэтому мы будем применять модификацию метода Ming-Chit Liu и Kai-Man Tsang [2] в варианте И. Аллакова приведенные в [19].

2. Обозначения и малые дуги. Определим

$$d = N^\delta, Q = N^{21\delta}, T = N^{\sqrt{\delta}}, L = \frac{N}{50}, \tau = N^{-1} T^{\frac{1}{4}}, \quad (5)$$

где δ малая вычисляемая положительная константа. Тогда $Q < T < L < N$.

Для удобства мы также положим

$$L_2 = L^{\frac{1}{2}} \text{ и } N_2 = N^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

Далее, для произвольного характера $\chi(\bmod dq / h)$, $h = (d, q)$ определим

$$S_i(\alpha) = S_i(\alpha, d, b_i) = \sum_{\substack{n_i \leq N_2 \\ n_i \equiv b_i \pmod{d}}} \Lambda(n_i) e(\alpha n_i^2) \quad (7)$$

$$S(\chi, y) := S(\chi, y, d, q) := \sum_{L_2 \leq n \leq N_2} \chi(n) \Lambda(n) e(n^2 y), \quad (8)$$

$$I(y) := \int_{L_2}^{N_2} e(x^2 y) dx, \quad \tilde{I}(y) := \int_{L_2}^{N_2} x^{\tilde{\beta}-1} e(x^2 y) dx, \quad I(\chi, y) := \sum_{y \leq T} \int_{L_2}^{N_2} x^{\rho-1} e(x^2 y) dx, \quad (9)$$

где $\Lambda(n)$ - функция Мангольдта, а $\sum_{y \leq T}$ обозначает суммирование по всем нулям $\rho = \beta + i\gamma$ функции $L(s, \chi)$ лежащей внутри области:

$$\frac{1}{2} \leq \beta \leq 1 - c_1(\ln T)^{-1}, \quad |\gamma| \leq T \quad (\text{кроме исключительного нуля } \tilde{\beta}).$$

Для любых a, q таких, что $(a, q) = 1$, $1 \leq a \leq q \leq Q$, пусть $\bar{m}(a, q) = \left[\frac{a - \tau}{q}, \frac{a + \tau}{q} \right]$.

Легко видеть, что эти интервалы не пересекаются и лежат в $[\tau, 1 + \tau]$.

Объединение всех этих отрезков $\bar{m}(a, q)$ обозначим через M , то есть

$$M = \bigcup_{a, q} \bar{m}(a, q) \quad \text{и будем называть большими дугами, а разность } [\tau, 1 + \tau] \setminus M$$

обозначим через m и будем называть малыми дугами.

Пусть

$$R(N) := \sum_{\substack{n_i \leq N_2, \\ n_1^2 + \dots + n_5^2 = N}} \Lambda(n_1) \cdots \Lambda(n_5), \quad (10)$$

тогда используя обозначения (7) $R(N)$ можем представить в виде

$$R(N) = \int \prod_{i=1}^{1+\tau} S_i(\alpha) e(-N\alpha) d\alpha. \quad (11)$$

В самом деле, из правой части равенства (11) имеем

$$\begin{aligned} R(N) &= \int \prod_{i=1}^{1+\tau} S_i(\alpha) e(-N\alpha) d\alpha = \\ &= \int \sum_{\substack{n_1 \leq N_2 \\ n_1 \equiv b_1 \pmod{d}}} \Lambda(n_1) e(\alpha n_1^2) \dots \sum_{\substack{n_5 \leq N_2 \\ n_5 \equiv b_5 \pmod{d}}} \Lambda(n_5) e(\alpha n_5^2) e(-N\alpha) d\alpha = \\ &= \sum_{\substack{n_i \leq N_2 \\ n_i \equiv b_i \pmod{d}}} \Lambda(n_1) \dots \Lambda(n_5) \int e((n_1^2 + \dots + n_5^2 - N)\alpha) d\alpha = \sum_{\substack{n_i \leq N_2, \\ n_1^2 + \dots + n_5^2 = N}} \Lambda(n_1) \dots \Lambda(n_5). \end{aligned}$$

С учетом того, что $M \cup m = [\tau; 1+\tau]$, интеграл правой части равенства (11) можем записать как сумму двух интегралов, то есть в виде

$$R(N) = \left\{ \int_M + \int_m \right\} \prod_{i=1}^5 S_i(\alpha) e(-N\alpha) d\alpha = R_1(N) + R_2(N). \quad (12)$$

В правой части равенства (12) через $R_1(N)$ обозначен интеграл по большой дуге M , а через $R_2(N)$ интеграл по малой дуге m .

Сначала оценим интеграл по малой дуге. Для этого воспользуемся леммой 2.1 работы [7].

Согласно которой имеем: если $\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2}$, $(a, q) = 1$ и $h = (q, d)$, то для достаточно малого $\varepsilon > 0$ справедлива оценка.

$$S_i(\alpha) \ll \frac{N_2^{1+\varepsilon} h}{dq^2} + \frac{N_2^{\frac{11}{4}}}{d^2} + \frac{N_2^{\frac{6}{3}} h^{\frac{3}{4}}}{d^4 q^4} + \left(\frac{q^{\frac{1}{2}}}{h^2} + \frac{q^{\frac{1}{4}}}{h^4} N_2^{\frac{1}{7}} \right) N^\varepsilon. \quad (13)$$

Согласно теореме Дирихле о приближении действительных чисел с рациональными числами (см. гл. VIII, §8.1, [6])

Для любого $\alpha \in m$, существуют такие целые числа a и q удовлетворяющие условиям: $Q \leq q \leq \tau^{-1}$, $(a, q) = 1$, $1 \leq a \leq q$, для которых выполняется соотношение $|\alpha - aq^{-1}| \leq \tau q^{-1} \leq q^{-2}$.

Далее, принимая во внимание $h = (q, d)$, $d = N^\delta$, $Q = N^{21\delta}$ (5) и $\delta > 0$ - достаточно малая постоянная из (6) и (13) получим

$$\begin{aligned} S_i(\alpha) &\ll \frac{N_2^{1+\varepsilon}}{q^{\frac{1}{2}}} + \frac{N_2^{\frac{11}{14}}}{d^{\frac{1}{2}}} + \frac{N_2^{\frac{6}{7}}}{q^{\frac{1}{4}}} + \left(q^{\frac{1}{2}} + q^{\frac{1}{4}} N_2^{\frac{1}{7}} \right) N^\varepsilon \ll \\ &\ll \frac{N_2^{1+\varepsilon}}{Q^{\frac{1}{2}}} \left(1 + \frac{N_2^{\frac{11}{14} - 1 - \varepsilon} Q^{\frac{1}{2}}}{d^{\frac{1}{2}}} + \frac{N_2^{\frac{6}{7} - 1 - \varepsilon} Q^{\frac{1}{2}}}{q^{\frac{1}{4}}} \right) + \left(Q^{\frac{1}{2}} + Q^{\frac{1}{4}} N_2^{\frac{1}{7}} \right) N^\varepsilon \ll \\ &\ll \frac{N_2^{\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2}}}{Q^{\frac{1}{2}}} \left(1 + \frac{N_2^{\frac{11}{28} - \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2}} N^{\frac{21}{2}\delta}}{N^{\frac{\delta}{2}}} + \frac{N_2^{\frac{3}{7} - \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2}} Q^{\frac{1}{2}}}{Q^{\frac{1}{4}}} \right) + \left(Q^{\frac{1}{2}} + Q^{\frac{1}{4}} N_2^{\frac{1}{7}} \right) N^\varepsilon \ll \\ &\ll \frac{N^{\frac{1}{2}}}{Q^{\frac{1}{2}}} \left(1 + N^{-\frac{3}{28} + 10\delta} + N^{-\frac{1}{14} + 5,25\delta} + \frac{Q + Q^{\frac{3}{4}} N^{\frac{1}{14}}}{N^{\frac{1}{2}}} N^\varepsilon \right) \end{aligned}$$

Положим $0 < \varepsilon < \delta$ тогда при достаточно малом и достаточно большом $N > N_0(\delta)$:

$$S_i(\alpha) \ll N^{\frac{1}{2}} Q^{-\frac{1}{2}} \quad \text{для } i = 1, 2, 3, 4, 5. \quad (14)$$

Теперь мы можем доказать следующую теорему.

Теорема 2.1. Существует постоянная c такая что, если $N \geq N_1(\delta, c)$, тогда справедлива оценка

$$R_2(N) \ll N^{\frac{3}{2}} Q^{-\frac{1}{2}} d^{-2} \log^{4+c} N.$$

Доказательства. В силу оценки (14) при $N > N_0(\delta)$, имеем $S_5(\alpha) \ll N^{\frac{1}{2}} Q^{-\frac{1}{2}}$,

Поэтому из (12) получим

$$R_2(N) \ll N^{\frac{1}{2}} Q^{-\frac{1}{2}} \int_r \left| \prod_{i=1}^4 S_i(\alpha) \right| d\alpha \ll N^{\frac{1}{2}} Q^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^4 \int_r |S_i(\alpha)|^4 d\alpha. \quad (15)$$

Если мы обозначим через $\overline{S_i(\alpha)}$ сумму сопряженную с $S_i(\alpha)$ тогда интеграл в правой части оценки (15) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \int_r |S_i(\alpha)|^4 d\alpha &= \int_r |S_i(\alpha) \overline{S_i(\alpha)}|^2 d\alpha = \sum_{\substack{n_1 \leq N_2 \\ n_1^2 + n_2^2 = n_3^2 + n_4^2 \\ n_1 \equiv b_1 \pmod{d}}} \Lambda(n_1) \Lambda(n_2) \Lambda(n_3) \Lambda(n_4) \leq \\ &\leq \ln^4 N \sum_{\substack{n_1 \leq N_2 \\ n_1^2 + n_2^2 = n_3^2 + n_4^2 \\ n_1 \equiv b_1 \pmod{d}}} 1 = \ln^4 N \int_0^1 \left| \sum_{\substack{n \leq N_2 \\ n \equiv b_1 \pmod{d}}} e(\alpha n) \right|^4 d\alpha. \end{aligned} \quad (16)$$

Следая рассуждениям леммы Хуа (см. лемма 14, [20]), видим, что существует постоянная C такая, что

$$\int_0^1 \left| \sum_{\substack{n \leq N_2 \\ n \equiv b_1 \pmod{d}}} e(\alpha n) \right|^4 d\alpha \ll \frac{N}{d^2} \ln^C N. \quad (17)$$

Из (15), (16) и (17) следует

$$R_2(N) \ll \left(N^{\frac{1}{2}} Q^{-\frac{1}{2}} \ln^4 N \right) \int_0^1 \left| \sum_{\substack{n \leq N_2 \\ n \equiv b_1 \pmod{d}}} e(\alpha n) \right|^4 d\alpha \ll N^{\frac{3}{2}} d^{-2} Q^{-\frac{1}{2}} \ln^{C+4} N,$$

что и требовалось доказать.

3. Оценка интеграла по большой дуге. Далее нам необходимо получить подходящую оценку для $R_1(N)$.

Сначала преобразуем экспоненциальную сумму $S_i(\alpha)$ в характерные суммы или вышеуказанные интегралы в (9). Для этого нам понадобятся еще некоторые обозначения. Для целых положительных чисел d, q и $h(q) = (d, q)$, т.е.

нод (d, q) , определим целые положительные числа α, β, γ в соответствии с условиями:

$$d = p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s} d_0, \quad q = p_1^{\beta_1} \dots p_s^{\beta_s} q_0, \quad (d_0, q_0) = 1, \quad h(d) = p_1^{\gamma_1} \dots p_s^{\gamma_s},$$

где $\gamma_i = \min(\alpha_i, \beta_i)$, $i = 1, \dots, s$.

Определим, $h_1(q) = p_1^{\delta_1} \dots p_s^{\delta_s}$, где $\delta_i = \alpha_i$, если $\beta_i > \alpha_i$ в остальных случаях $\delta_i = 0$ и $h_2(q) = h(q) / h_1(q)$.

Для краткости $h = h(q)$, $h_1 = h_1(q)$ и $h_2 = h_2(q)$. Легко видеть, что $(h_1, h_2) = 1$ и $(d / h_1, q / h_2) = 1$.

Рассмотрим функцию $\psi(x, \chi) := \sum_{n \leq N} \chi(n) \Lambda(n)$. Согласно точной формулы имеем (см.[9])

$$\psi(x, \chi) = \delta_{\chi} x - \delta_{\chi} \frac{x^{\beta}}{\beta} - \sum_{p \leq T} \frac{x^{\rho}}{\rho} + R(x, q) \quad (18)$$

$$R(x, q) \ll NT^{-1} L^2, \quad (19)$$

Из (8), (18) и (19) можем легко вывести, что верно следующая равенство (см. [16]). Для любого действительного y и $\chi \pmod{dq/h}$ при $dq/h \leq T$ имеем

$$S(\chi, y) = \delta_{\chi} I(y) - \delta_{\chi} \tilde{I}(y) - I(x, y) + O((1 + y^2 N) N_2 T^{-1} \log^2 N),$$

где

$$\delta_{\chi} = \begin{cases} 1 & \text{если } \chi \equiv \chi_0 \pmod{dq/h} \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases}, \quad \delta_{\chi} = \begin{cases} 1 & \text{если } \chi \equiv \tilde{\chi} \chi_0 \pmod{dq/h}, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Докажем леммы.

Лемма 3.1. Для $\alpha = \frac{a}{q} + \lambda$ имеем

$$S_i(\alpha) = S_i \left(\frac{a}{q} + \lambda \right) = \varphi^{-1}(d/h_1) \varphi^{-1}(q/h_2) \times \\ \times \sum_{\xi \pmod{d/h_1}} \bar{\xi}(b_i) \sum_{\eta \pmod{q/h_2}} G_i(a, \bar{\eta}, q) S(\xi \eta, \lambda) + O(\log^2 N),$$

где

$$G_i(a, \bar{\eta}, q) = G(h, b_i, a, \bar{\eta}, q) = \sum_{\substack{(c, q) \neq \\ c \equiv b_i \pmod{h}}} e(ac^2/q) \bar{\eta}(c),$$

и η, ξ - характеры по модулю q/h_2 и d/h_1 соответственно.

Доказательство. Согласно (7) имеем

$$S_i \left(\frac{a}{q} + \lambda \right) = \sum_{\substack{n \leq N_2 \\ n \equiv b_i \pmod{d}}} \Lambda(n) e \left(\left(\frac{a}{q} + \lambda \right) n^2 \right) = \sum_{\substack{n \leq N_2, (n, q) \neq \\ n \equiv b_i \pmod{d}}} \Lambda(n) e \left(n^2 \left(\frac{a}{q} + \lambda \right) \right) = \\ = \sum_{\substack{n \leq N_2, \\ n \equiv b_i \pmod{d} \\ n \equiv c \pmod{q}}} \Lambda(n) e \left(n^2 \left(\frac{a}{q} + \lambda \right) \right) + O \left(\sum_{\substack{p^k \leq N_2 \\ p|q}} \ln p e(\alpha p^{2k}) \right) = \\ = \sum_{\substack{(c, q) \neq}} e \left(\frac{ac^2}{q} \right) \sum_{\substack{n \leq N_2 \\ n \equiv b_i \pmod{d} \\ n \equiv c \pmod{q}}} \Lambda(n) e(n^2 \lambda) + O(\ln^2 N).$$

Внутренняя сумма главного члена пуста, если только $n \equiv b_i \pmod{h}$, поэтому мы можем добавить ограничение $c \equiv b_i \pmod{h}$ к сумме по c . С другой стороны, условие $c \equiv b_i \pmod{h}$ равносильно сравнениям $n \equiv b_i \pmod{d}$, $n \equiv c \pmod{q}$, а эти сравнения в свою очередь эквивалентны с $n \equiv b_i \pmod{d/h_1}$, $n \equiv c \pmod{q/h_2}$. Тогда из свойства ортогональности характеров

$$\begin{aligned}
S_i(\alpha) = & \sum_{\substack{(c,q) \neq \\ c \equiv b_1 \pmod{h}}} e\left(\frac{ac^2}{q}\right) \sum_{\substack{n \leq N_2 \\ n \equiv b_1 \pmod{d/h_1} \\ n \equiv c \pmod{q/h_2}}} \Lambda(n) e(n^2 \lambda) \frac{1}{\varphi(d/h_1)} \bar{\xi}(b_i) \xi(n) \frac{1}{\varphi(q/h_2)} \bar{\eta}(c) \eta(n) + \\
& + O(\ln^2 N) = \varphi^{-1}(d/h_1) \varphi^{-1}(q/h_2) \sum_{\substack{(c,q) \neq \\ c \equiv b_1 \pmod{h}}} e\left(\frac{ac^2}{q}\right) \sum_{\xi \pmod{d/h_1}} \bar{\xi}(b_i) \sum_{\eta \pmod{q/h_2}} \bar{\eta}(c) \times \\
& \times \sum_{\substack{n \leq N_2 \\ n \equiv b_1 \pmod{d}}} \xi \eta(n) \Lambda(n) e(n^2 \lambda) + O(\ln^2 N).
\end{aligned}$$

Отсюда следует утверждение леммы.

4. Доказательство основного результата.

Доказательство теоремы 1.1. Известно, что $r(N)$ - количество решений

$$r(N) = \sum_{\substack{L_2 < p_i \leq N_2 \\ N = p_1^2 + \dots + p_5^2 \\ p_i \equiv b_i \pmod{d}}} 1, \quad (i=1, \dots, 5).$$

уравнения (1) в простых числах, т.е.

Из (12) и теоремы 2.1 следует, что

$$R(N) = R_1(N) + O\left(N^{\frac{3}{2}} d^{-2} Q^{-\frac{1}{2}} \log^{c+4} N\right). \quad (20)$$

В силу (10) находим

$$\begin{aligned}
R(N) = & \sum_{k \geq 1} \sum_{\substack{L_2 < p_1^k, \dots, p_5^k \leq N_2 \\ N = p_1^{2k} + \dots + p_5^{2k}}} \ln p_1 \cdots \ln p_5 = \sum_{\substack{L_2 < p_1, \dots, p_5 \leq N_2 \\ N = p_1^2 + \dots + p_5^2}} \ln p_1 \cdots \ln p_5 + \\
& + \sum_{k \geq 2} \sum_{\substack{L_2 < p_1^k, \dots, p_5^k \leq N_2 \\ N = p_1^{2k} + \dots + p_5^{2k}}} \ln p_1 \cdots \ln p_5 \leq (\ln N_2)^5 r(N) + O\left(N^{\frac{1}{2}} \ln N_2\right).
\end{aligned} \quad (21)$$

Из (20) и (21) получим

$$r(N) \geq \frac{R_1(N)}{\ln^5 N} + O\left(N^{\frac{3}{2}} d^{-2} Q^{-\frac{1}{2}} \ln^{c-1} N\right) \quad (22)$$

В работе [7] доказано, что

а) Если не существует β -исключительный нуль L -функции Дирихле или же он существует и модуль соответствующего исключительного характера $\tilde{r} > Q^{\frac{1}{13}}$, тогда

$$R_1(N) \gg N^{\frac{3}{2}} Q^{-\frac{1}{5}}$$

б) Если существует β -исключительный нуль L -функции Дирихле и модуль соответствующего исключительного характера $\tilde{r} \leq Q^{\frac{1}{13}}$, тогда

$$R_1(N) \gg N^{\frac{3}{2}} Q^{-\frac{2}{5}}.$$

Следовательно из (22) следует, что для количества решений уравнения (1) в простых числах справедлива оценка

а)
$$r(N) \geq \frac{N^{\frac{3}{2}} Q^{-\frac{1}{5}}}{\ln^5 N} - c_1 N^{\frac{3}{2}} d^{-2} Q^{-\frac{1}{2}} \ln^{c-1} N \geq N^{\frac{3}{2}} Q^{-\frac{1}{5}} \ln^{-5} N \left(1 - c_1 d^{-2} Q^{-\frac{3}{10}} \ln^{c+4} N \right)$$

б)
$$r(N) \geq \frac{N^{\frac{3}{2}} Q^{-\frac{2}{5}}}{\ln^5 N} - c_2 N^{\frac{3}{2}} d^{-2} Q^{-\frac{1}{2}} \ln^{c-1} N \geq N^{\frac{3}{2}} Q^{-\frac{2}{5}} \ln^{-5} N \left(1 - c_2 d^{-2} Q^{-\frac{1}{10}} \ln^{c+4} N \right).$$

Таким образом теорема доказана.

Из оценок а) и б) следует, что

$$r(N) \geq N^{\frac{3}{2}} Q^{-\frac{2}{5}} (\ln N)^{-5}.$$

Список использованной литературы

- 1.Хуа-Ло-Кен. Аддитивная теория простых чисел.// Труды МИ РАН им. В. А. Стеклова, 1947, т.22, с.3-179.
- 2.Ming-Chit Liu and Kai-Man Tsang. Small Prime solutions of some Additive Equations.Mh.Math.111(1991), pp.147-169.
3. Аллаков И. и Музрапова Н. С. О представлении натурального числа

суммой пяти квадратов простых чисел // Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории Материалы XXI Международной конференции, посвященной 85-летию со дня рождения А. А Карацубы. Тула, 17–21 мая 2022 года. с.157-160.

4. Аллаков И. и Музропова Н.С. О количестве представлений натурального числа в виде суммы пяти квадратов простых чисел.// Бюллетень Института математики 2022, т.5, №5, стр.82-86.

5. Виноградов И.М. Особые варианты метода тригонометрических сумм.-М.: Наука, 1976,-120с.

6. Нестеренко Ю.В. Теория чисел. –М.: Издательский центр “Академия”, 2008,- 272 с.

7. Wang Y. H. Numbers representable by five prime squares with primes in an arifmetic progression.// Acta Arithmetica. XC. 3 1999. pp.217-244.

8. Линник Ю.В. О наименьшем простом в арифметической прогрессии. I. Основная теорема. // Мат. Сборник 15 (57) (1944), 139-178.

9. Davenport H. Multiplicative Number Theory. Second edition .Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin. 1997. 178p.

10. Liu J.Y. and Zhan T. The ternary Goldbach problem in arithmetic progressions, Acta Arith.82 (1997), 197-227.

11. Rademacher H. Beitrage zur Viggo Brunschen Methode in der Zahlentheorie, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 3 (1924) 12-30.

12. Ayoub R. On Rademacher's extension of the Goldbach-Vinogradoff theorem, Tran. Amer. Math. Soc, 74 (1953) 482-491.

13.Zulauf A. On the number of representations of an integer as a sum of primes belonging to given arithmetical progressions, Comp. Mat., 15 (1961) 64-69.

14. Montgomery H.I. and Vaughan R.C. The exceotional set of Goldbach’s problem. Acta.Arth.27 (1975) ,353-370.

15. Zoeteman M. A Siegel-Walfisz theorem for Artin primes and applications Leiden University Mathematical Institute Bachelor thesis 2017 pp.42.
16. Stopple J. Elementary Deuring-Heilbronn phenomenon arXiv:1201.0713v2 [math.NT] 17jan2012. p11. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1201.0713>
17. Gallagher P.X. A large sieve density estimates near $\delta = 1$. Invent. Math 11(1970), pp.329-339.
18. Liu M. C. and Zhan T. The Goldbach problem with primes in arithmetic progressions, in: Analytic Number Theory, Y. Motohashi (ed.), London Math. Soc. Lecture Note Ser. 247, Cambridge Univ. Press, 1997, 227–251.
19. Аллаков И. Оценка тригонометрических сумм и их приложения к решению некоторых аддитивных задач теории чисел. Термез.Изд. «Сурхан нашр» 2021. 160с.
20. Vaughan R.C. The Hardy-Littlewood Method. Second edition. Cambridge Univ.Press, 1997.