

**SONLARNI IKKITA TUB VA UCHINCHI TUBNING KVADRATI
YIG'INDISI SIFATIDA IFODALASH MASALASINING MAXSUS
QATORINI O'RGANISH**

Muzropova Nargiza Saydullayevna

Termiz davlat universitetining tayanch doktoranti

Tel: +998902419084 e-mail: muzrapova_n@mail.ru.

Annotatsiya. Ishda ikki tub son va uchinchi tub sonning kvadratlari yig'indisini a_1, a_2, a_3, b -lar butun sonlar, p_j -lar esa tub sonlar bo'lgandagi shartlarni qanoatlantiruvchi yechimlari soni masalasida maxsus qatorning yaqinlashishini isbotlangan.

Kalit so'zlar: *Dirixle xarakteri, tub sonlar, asosiy intervallar, qo'shimcha intervallar, baho, tenglama, yechimga ega bo'lishlik, notrivial nollar, maxsus nol, maxsus qator.*

**Study A Special Series Of The Problem Of Representing Numbers As The Sum
Of Squares Of Two Prime Numbers And A Third Prime Number**

Muzropova Nargiza Saydullayevna

Basic doctoral student at Termez State University

Phone: +998902419084 e-mail: muzrapova_n@mail.ru.

Annatation. *The work was proved the convergence of a special series in the problem of the number of solutions satisfying the conditions of the sum of squares of two integers and a third prime number, where a_1, a_2, a_3, b are integers and p_j are prime numbers.*

Keys words: *Dirichlet character, prime numbers, basic intervals, additional intervals, estimation, equation, solvability, nontrivial zeros, exceptional zero, special series.*

**ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБОГО РЯДА ЗАДАЧИ О
ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЧИСЕЛ СУММОЙ ДВУХ ПРОСТЫХ И КВАДРАТА
ТРЕТЬЕГО ПРОСТОГО ЧИСЛА**

Музропова Наргиза Сайдуллаевна

Базовый докторант Термезского государственного университета

Тел: +998902419084 e-mail: muzrapova_n@mail.ru.

Аннотация. В работе доказано сходимость особого ряда в задаче о числе решений, удовлетворяющих условиям суммы квадратов двух целых чисел и третьего простого числа, где a_1, a_2, a_3, b - целые числа, p_j - простые числа.

Ключевые слова: характер Дирихле, простые числа, основные интервалы, дополнительные интервалы, оценка, уравнение, разрешимость, нетривиальные нули, исключительный нуль, особый ряд.

1. Формулировка результата

Рассмотрим уравнение

$$a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3^2 = b, \quad (1.1)$$

где a_1, a_2, a_3, b - целые числа, p_j - простые числа. Ясно, что мы можем предполагать $a_j \neq 0$, ($j=1,2,3$) и

$$\text{НОД}(a_1, a_2, a_3) = 1. \quad (1.2)$$

Кроме этого предположим, что для уравнение (1.1) выполняется условия конгруэнт разрешимости подобно тому, как в проблеме Тарри работы Хуа-Ло-Кен (см. стр. 162, [1]). Если $N(q)$ определим с помощью равенство

$$N(q) := \text{card} \left\{ (n_1, n_2, n_3) \mid 1 \leq n_j \leq q, (n_j, q) = 1, a_1 n_1 + a_2 n_2 + a_3 n_3^2 \equiv b \pmod{q} \right\}, \quad (1.3)$$

тогда это условие можно написать в виде

$$\text{“для всех } q \geq 1 \text{ выполняется неравенство } N(q) \geq 1\text{”}. \quad (1.4)$$

Предположим, что a_1, a_2, a_3, b удовлетворяют условиям (1.2), (1.3) и

$$B := \max \{ 2, |a_1|, |a_2|, |a_3| \}. \quad (1.5)$$

Если мы в уравнении (1.1) положим $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, тогда придем классической задаче, поставленной Хуа-Ло-Кеном [2] в 1938 году.

В настоящей работе мы исследуем сходимость особого ряда в задаче о представлении чисел в виде (1.1). В частности доказано, что при определенных условиях этот особый ряд сходится (см. стр. 73 [3]).

В дальнейшем через P (с индексом или без индекса) обозначим простое число, $c_1, c_2, \dots$ - эффективные положительные постоянные, δ - достаточно малое положительное, эффективно вычислимое постоянное, значение которого может зависеть от значений c_j . Не ограничивая общности мы можем предполагать $B \geq 34$.

2.Обозначение

Пусть $N > 0$ и положим

$$Q := N^\delta, T := Q^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}, L := N B^{-1}. \quad (2.1)$$

Предположим, что N достаточно большое относительно B , так чтобы выполнялось

$$B \leq Q^\delta. \quad (2.2)$$

Пусть $\chi(\bmod q)$ и $\chi_0(\bmod q)$ соответственно означает произвольный характер и главный характер Дирихле по модулю q (см. §§4 и 5, [4]).

Известно (см. §14, [4]), что существует постоянное c_1 такое, что L -функции $L(s, \chi)$ могут иметь только один вещественный нуль $\tilde{\beta}$ для одного вещественного характера $\tilde{\chi}$ по модулю $\tilde{r}$ ($\tilde{r} \leq T$), в области $\sigma > 1 - c_1 (\ln T)^{-1}$, $|t| \leq T$. Если такой нуль существует, то она единственный вещественный нуль функции $L(s, \tilde{\chi})$ и называется исключительным нулем $L(s, \chi)$ функции, где $s = \sigma + it$. Кроме того, этот исключительный нуль $\tilde{\beta}$ удовлетворяет соотношению

$$c_2 \left(\tilde{r}^{\frac{1}{2}} \ln^2 \tilde{r} \right)^{-1} \leq 1 - \tilde{\beta} \leq c_1 (\ln T)^{-1} \quad (2.3)$$

Далее, для произвольного действительного числа y и положительного целого q определим $e(y) := e^{2\pi i y}$ и $e_q(y) := y^{\frac{2\pi i y}{q}} = e\left(\frac{y}{q}\right)$; $\Lambda(n)$ обозначает функцию Мангольдта.

Пусть

$$C_1(\chi, m) = \sum_{l=1}^q \chi(l) e_q(lm), \text{ и } C_2(\chi, m) = \sum_{l=1}^q \chi(l) e_q(l^2 m). \quad (2.4)$$

3. Исследование особого ряда задачи

Лемма 3.1. Пусть $\chi \pmod{p^\alpha}$ произвольный характер, $\alpha \geq 0$, тогда справедлива следующие утверждение:

- (a) если χ -примитивный характер по модулю p^α , $\alpha \geq 0$ и $p \nmid a$, тогда $C_j(\chi, a) = 0$, ($j = 1, 2$);
- (b) если χ_0 главный характер по модулю p^t , $p \nmid a$, $t \geq \theta + \max\{\theta, \alpha\}$,
 $\left(\text{где } \theta = 1 + \left\lfloor \frac{2}{p} \right\rfloor \right)$, то $C_j(\chi \chi_0, a) = 0$, ($j = 1, 2$).
- (c) $|C_j(\chi, a)| \leq j(2, p)(a, p^\alpha)^{1/2} p^{\alpha/2}$, ($j = 1, 2$).

Доказательство. Сначала рассмотрим $C_1(\chi, a)$. По условию $p \nmid a$ и мы можем полагать $a = a' p$, тогда (2.4) находим

$$C_1(\chi, a) = \sum_{l \leq p^\alpha} \chi(l) e\left(\frac{a' p}{p^{\alpha+1}}\right) = \sum_{u=1}^{p^{\alpha+1}} e\left(\frac{a' \cdot u}{p^{\alpha+1}}\right) \sum_{v=1}^p \chi(p^{\alpha+1} v + u) = 0,$$

поскольку сумма по V равен нулю (см. стр. 76, [5]).

Теперь рассмотрим $C_2(\chi, a)$. Так как $p \nmid a$, то полагая $a = a' p$ из (3.2) получим

$$C_2(\chi, a) = \sum_{l \leq p^t} \chi(l) e\left(\frac{l^2 a}{p^{t-1}}\right) = \sum_{u=1}^{p^{t-1}} e\left(\frac{a \cdot u^2}{p^{t-1}}\right) \sum_{v=1}^p \chi(p^{t-1}v + u) = 0,$$

так как сумма по V равен нулю.

Докажем утверждение б). Для $1 \leq l \leq p^t$, положим $l = u + vp^{t-\theta}$. Тогда $l \equiv u \pmod{p^\alpha}$ так как $t - \theta \geq \alpha$ и $l^2 \equiv u^2 + 2uvp^{t-\theta} \pmod{p^t}$, поскольку $2(t - \theta) \geq t$. Поэтому

$$C_2(\chi\chi_0, a) = \sum_{l \leq p^t} \chi\chi_0(l) e\left(\frac{al^2}{p^t}\right) = \sum_{u=1}^{p^{t-\theta}} \chi\chi_0(u) e\left(\frac{au^2}{p^t}\right) \cdot \sum_{v=1}^{p^\theta} e\left(\frac{2auv}{p^\theta}\right) = 0, \quad (3.1)$$

так как внутреннем сумме $(u, p) = 1$ и поэтому это сумма равен нулю.

Рассмотрим $C_1(\chi\chi_0, a)$. Пологая $l = u + vp^{t-\theta}$, где $1 \leq u \leq p^{t-\theta}$, $1 \leq v \leq p^\theta$, получим

$$C_1(\chi\chi_0, a) = \sum_{v=1}^{p^\theta} \sum_{u=1}^{p^{t-\theta}} \chi\chi_0(u + vp^{t-\theta}) e\left(\frac{a(u + vp^{t-\theta})}{p^t}\right) = \sum_{u=1}^{p^{t-\theta}} \chi\chi_0(u) e\left(\frac{au}{p^t}\right) \cdot \sum_{v=1}^{p^\theta} e\left(\frac{av}{p^\theta}\right) = 0,$$

поскольку внутренняя сумма по V равен нулю.

Докажем утверждение с). При этом будем использовать из следующих утверждений приведенный в примере 14, параграфа 6 работы [5]:

$\alpha)$ если $m > 1$, $(a, m) = 1$, n - положительное целое число, K - количество решений сравнение $x^n \equiv 1 \pmod{m}$ и $S = \sum_{x=1}^{m-1} \chi(x) e^{\frac{2\pi i ax^n}{m}}$, тогда $|S| \leq K\sqrt{m}$;

$\beta)$ для любого $\varepsilon > 0$ и фиксированного n , для K , определенный в части

$\alpha)$ справедлива оценка $K = O(m^\varepsilon)$.

Из утверждение $\alpha)$ при $n = 1$, $m = p^\alpha$, $(a, p^\alpha) = 1$ получим $K = 1$ и

$|S| = |C_1(\chi, a)| \leq p^{\alpha/2}$. Эта есть правую часть оценки с), так как у нас

$(a, p)=1, (2, p)=1$. Аналогично, из α) при $n=2, m=p^\alpha, (a, p^\alpha)=1$ имеем $|S|=|C_2(\chi, a)| \leq 2(a, p)^{\alpha/2}$. Если $p^\alpha \nmid a$, то

$$|C_1(\chi, a)| = \left| \sum_{l=1}^{p^\alpha} \chi(l) e\left(\frac{al}{p^\alpha}\right) \right| \leq \varphi(p^\alpha) < (2, p)(a, p^\alpha)^{1/2} p^{\alpha/2}.$$

и

$$|C_2(\chi, a)| = \left| \sum_{l=1}^{p^\alpha} \chi(l) e\left(\frac{al^2}{p^\alpha}\right) \right| < 2(2, p)(a, p^\alpha)^{1/2} p^{\alpha/2}.$$

Теперь рассмотрим случае $p^\omega \parallel a, 0 < \omega < \alpha$. В этом случае мы можем полагать $a = p^\omega a'$ и $l = p^{\alpha-\omega}v + u, 1 \leq u \leq p^{\alpha-\omega}, 1 \leq v \leq p^\omega$. Теперь $C_2(\chi, a)$ можно написать в виде

$$C_2(\chi, a) = \sum_{l=1}^{p^\alpha} \chi(l) e\left(\frac{l^2 a}{p^\alpha}\right) = \sum_{u=1}^{p^{\alpha-\omega}} e\left(\frac{a' u^2}{p^{\alpha-\omega}}\right) \sum_{v=1}^{p^\omega} \chi(u + vp^{\alpha-\omega}).$$

Пусть $\chi' \pmod{p^\eta}$ примитивный характер, индуцирующий характера $\chi \pmod{p^\alpha}$. Если $\eta > \alpha - \omega$, тогда

$$\sum_{v=1}^{p^\omega} \chi(u + vp^{\alpha-\omega}) = \sum_{v=1}^{p^\omega} \chi'(u + vp^{\alpha-\omega}) = p^{\alpha-\eta} \sum_{v=1}^{p^{\omega-\alpha+\eta}} \chi'(u + vp^{\alpha-\omega}).$$

. Здесь сумма правой части равен нулю и поэтому $C_2(\chi, a) = 0$.

Аналогично,

$$C_1(\chi, a) = \sum_{l=1}^{p^\alpha} \chi(l) e\left(\frac{al}{p^\alpha}\right) = \sum_{u=1}^{p^{\alpha-\omega}} e\left(\frac{a' u}{p^{\alpha-\omega}}\right) \sum_{v=1}^{p^\omega} \chi(u + vp^{\alpha-\omega}) = 0.$$

Теперь пусть $\eta \leq \alpha - \omega$. Тогда

$$\sum_{v=1}^{p^\omega} \chi(u + vp^{\alpha-\omega}) = p^\omega \chi' \chi_0(n)$$

и следовательно $C_j(\chi, a) = p^\omega C_j(\chi' \chi_0, a')$, где $\chi_0 \pmod{p^{\alpha-\omega}}$ -главный

характер. На основе выше рассмотренному случае $p \nmid a'$ имеем

$$|C_j(\chi' \chi_0, a')| \leq 2(2, p) p^{(\alpha - \omega)/2}, \quad (j=1, 2).$$

Таким образом,

$$|C_j(\chi, a)| \leq 2(2, p) p^{(\alpha - \omega)/2} p^\omega = 2(2, p) (a, p^\alpha)^{1/2} p^{\alpha/2}$$

и утверждение с) доказано.

В дальнейших рассуждениях нам необходимо информация о следующих суммах:

$$Z(q; \chi_1, \chi_2, \chi_3) := \sum_{h=1}^q e_q(-bh) C_1(\chi_1; a_1 h) C_1(\chi_2; a_2 h) C_2(\chi_3; a_3 h) \quad (3.2)$$

и

$$Y(q; \chi_1, \chi_2, \chi_3) := \sum_{h=1}^q e_q(-bh) C_1(\chi_1; a_1 h) C_1(\chi_2; a_2 h) C_2(\chi_3; a_3 h), \quad (3.3)$$

здесь χ_1, χ_2, χ_3 характеры по модулю q .

Если нет необходимости показать характеры, то (3.2) и (3.3) будем обозначать через $Z(q)$ и $Y(q)$ соответственно.

$Y(q)$ можно написать как следующая сумма:

$$Y(q; \chi_1, \chi_2, \chi_3) = q \sum_{(q)} \chi_1(l_1) \chi_2(l_2) \chi_3(l_3), \quad (3.4)$$

где суммирование ведется по всем l_1, l_2, l_3 удовлетворяющие условиям $1 \leq l_1, l_2, l_3 \leq q$, $(l_j, q) = 1$ и $a_1 l_1 + a_2 l_2 + a_3 l_3^2 = b \pmod{q}$.

Случае $\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = \chi_0 \pmod{q}$ играет важное роль. В этом случае в силу (1.4) имеем

$$Y(q; \chi_0, \chi_0, \chi_0) = q \sum_{(q)} 1 = qN(q). \quad (3.5)$$

Для удобства в записи положим

$$A(q) := \frac{1}{\varphi(q)^3} \sum_{h=1}^q e_q(-hb) C_1(\chi_0; a_1 h) C_1(\chi_0; a_2 h) C_2(\chi_0; a_3 h). \quad (3.6)$$

Теперь докажем следующую лемму.

Лемма 3.2. Оба функции $Z(q)$ и $Y(q)$ являются мультипликативными функциями в следующем смысле : если $q = q_1 q_2 \dots q_t$, $(q_i; q_j) = 1$ при $i \neq j$ и для

$$\chi_j \pmod{q} = \prod_{i=1}^t \chi_{ji} \pmod{q_i} \quad Z(q; \chi_1, \chi_2, \chi_3) = \prod_{i=1}^t Z(q_i; \chi_{1i}, \chi_{2i}, \chi_{3i})$$

каждого , тогда

$$Y(q; \chi_1, \chi_2, \chi_3) = \prod_{i=1}^t Y(q_i; \chi_{1i}, \chi_{2i}, \chi_{3i}).$$

В частности $N(q)$ и $A(q)$ являются мультипликативными функциями по q .

Доказательство. Достаточно рассмотреть случае $t=2$, а затем применять математическую индукцию. Имеем

$$Z(q_1 \cdot q_2) = \sum_{(h, q_1 q_2) \equiv 1} e_{q_1 q_2}(-bh) C_1(\chi_1; a_1 h) C_1(\chi_2; a_2 h) C_2(\chi_3; a_3 h).$$

Так как $(q_1, q_2) = 1$, то h можно представить в виде $h = h_1 q_2 + h_2 q_1$. Известно, что если h_1 и h_2 пробегают приведенную систему вычетов соответственно по модулям q_1 и q_2 , то h пробегает приведенную систему вычетов по модулю $q_1 q_2$. Поэтому $Z(q_1 \cdot q_2)$ можно представить в виде:

$$Z(q_1 \cdot q_2) = \sum_{(h, q_1) \equiv 1} \sum_{(h, q_2) \equiv 1} e \left(-b \frac{h_1 q_2 + h_2 q_1}{q_1 \cdot q_2} \right) \cdot C_1(\chi_1; a_1 (h_1 q_2 + h_2 q_1)) \cdot C_1(\chi_2; a_2 (h_1 q_2 + h_2 q_1)) \cdot C_2(\chi_3; a_3 (h_1 q_2 + h_2 q_1)) \quad (3.7)$$

Здесь справедлива равенства:

$$e \left(-b \frac{h_1 q_2 + h_2 q_1}{q_1 \cdot q_2} \right) = e \left(\frac{-b h_1}{q_1} \right) \cdot e \left(\frac{-b h_2}{q_2} \right),$$

$$C_1(\chi_j; a_j (h_1 q_2 + h_2 q_1)) = C_1(\chi_{j_1}; a_j h_1) C_1(\chi_{j_2}; a_j h_2), \quad (j = 1, 2)$$

$$C_2(\chi_3; a_3 (h_1 q_2 + h_2 q_1)) = C_2(\chi_{3_1}; a_3 h_1) C_2(\chi_{3_2}; a_3 h_2).$$

Первое равенство очевидно верно. Докажем второе и третье равенства. Имеем

$$\begin{aligned}
C_1(\chi_j; a_j(h_1q_2 + h_2q_1)) &= \sum_{l_j \in \mathbb{F}_{q_1q_2}} \chi_j(l_j) e_q(a_j(h_1q_2 + h_2q_1)l_j) = \\
&= \sum_{l_{j_1} \in \mathbb{F}_{q_1}} \chi_{j_1}(l_{j_1}) e_{q_1}(a_j h_1 l_{j_1}) \sum_{l_{j_2} \in \mathbb{F}_{q_2}} \chi_{j_2}(l_{j_2}) e_{q_2}(a_j h_2 l_{j_2}) = C_1(\chi_j; a_j h_1) C_1(\chi_{j_2}; a_j h_2), \quad (j=1,2).
\end{aligned}$$

Третье равенство доказывается совершенно аналогичным образом. Таким образом из (3.7) следует, что $Z(q_1 \cdot q_2) = Z(q_1) \cdot Z(q_2)$.

Мультипликативность $Y(q)$ доказывается аналогично как в случае $Z(q)$.

Доказанная лемма 3.2 позволяет привести рассмотрение функции $Z(q)$ к рассмотрению $Z(p^\alpha)$, где p - простое число.

Лемма 3.3. Для любого положительного целого q имеем

$$\frac{Z(q)}{\varphi^3(q)} \ll \frac{1}{q} B^{3/2}.$$

Доказательство. Согласно (3.2) имеем

$$|Z(p^\alpha)| = \left| \sum_{(h, p^\alpha) \in \mathbb{F}_{p^\alpha}} e_{p^\alpha}(-bh) C_1(\chi_1, a_1 h) C_1(\chi_2, a_2 h) C_2(\chi_3, a_3 h) \right|.$$

В силу леммы 3.1 с)

$$|C_2(\chi_j; a_j h)| \leq (2, p) (a_j h, p^\alpha)^{1/2} p^{\alpha/2}, \quad (j=1,2)$$

и

$$|C_2(\chi_3; a_3 h)| \leq 2(2, p) (a_3 h, p^\alpha)^{1/2} p^{\alpha/2}$$

поэтому

$$|Z(p^\alpha)| \leq 2 \prod_{j=1}^3 (2, p) (a_j h, p^\alpha)^{1/2} p^{3\alpha/2} \leq 2 p^{3\alpha/2} \prod_{j=1}^3 2 (|a_j|, p^\alpha)^{1/2}.$$

Отсюда

$$|Z(q)| = \prod_{p \nmid q} |Z(p^\alpha)| \leq 2 q^{3/2} \prod_{p \nmid q} |a_j|^{3/2} \prod_{p \nmid q} 2^3 \leq 2 q^{3/2} B^{3/2} \prod_{p \nmid q} 2^3.$$

Таким образом

$$\frac{|Z(q)|}{\varphi^3(q)} \leq \frac{2q^{3/2} B^{3/2} \prod_{p \nmid q} 2^3}{\varphi^3(q)} = 2q^{-1} B^{3/2} \left(\prod_{p \nmid q} \frac{2p^{-\frac{\alpha}{6}+1}}{p-1} \right)^3 \ll q^{-1} B^{3/2}.$$

Лемма 3.4. Пусть $\chi_j \pmod{p^{\alpha_j}}$, $(j=1,2,3)$ примитивные характеры и $\alpha = \max\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$. Для произвольного $t \geq \alpha$ положим $Z(p^t) = Z(p^t; \chi_1 \chi_0, \chi_2 \chi_0, \chi_3 \chi_0)$, где χ_0 главный характер по модулю p^t . Тогда справедливы следующие утверждения:

а) $Z(p^\alpha) = Y(p^\alpha),$

б) $Z(p^t) = 0$, если $t \geq \theta + \max\{\theta, \alpha\}$, где $\theta = 1 + \left\lfloor \frac{2}{p} \right\rfloor$;

с) для любого $\eta \geq \alpha$ справедлива равенства

$$\sum_{\nu \leq \eta} \varphi(p^\nu)^{-3} Z(p^\nu) = \varphi(p^\eta)^{-3} Y(p^\eta).$$

Доказательство. а). Не ограничивая общности мы можем предполагать $\alpha = \alpha_1 \geq 1$. Сравнивая (3.2) и (3.3) убедимся, что для того чтобы доказать утверждение а) достаточно показать

$$C_1(\chi_1 \chi_0, a_1 h) C_1(\chi_2 \chi_0, a_2 h) C_2(\chi_3 \chi_0, a_3 h) = 0,$$

для каждого h делящегося на p .

Так как по условию $\chi_j \pmod{p^{\alpha_j}}$ примитивные характеры, то из леммы 4.1 а) следует $C_2(\chi_3 \chi_0, a_3 h) = 0$. Поэтому утверждение а) леммы 3.4 справедлива.

Докажем утверждение б). Если в (3.2) берем $q = p^t$ и применяем лемма 3.1 б) то получим утверждение б) леммы 3.4, так как согласно условию (1.2) некоторые из $a_j h$ не должно делится на p .

Теперь докажем утверждение с) леммы 3.4. Согласно равенство (3.2) $Z(p^\nu)$ можно представить в виде

$$Z(p^\nu) = \sum_{h=1}^{p^\nu} - \sum_{\substack{h=1 \\ p \nmid q}}^{p^\nu} Y(p^\nu) - \sum_{\substack{h=1 \\ l \nmid h}}^{p^\nu} e\left(-\frac{bh}{p^\nu}\right) C_1(\chi_1, a_1 h) C_1(\chi_2, a_2 h) C_2(\chi_3, a_3 h)$$

Обозначим через A вычитаемую суммы и рассмотрим A . Положил $h = ph'$, тогда

$$A = \sum_{h'=1}^{p^{\nu-1}} e\left(-\frac{bh'}{p^{\nu-1}}\right) C_1(\chi_1; a_1 ph') C_1(\chi_2; a_2 ph') C_2(\chi_3; a_3 ph'). \quad (3.8)$$

Рассмотрим $C_1(\chi_j; a_j ph')$, ($j=1, 2$) из (3.8)

$$C_1(\chi_j, a_j ph') = \sum_{l=1}^{p^\nu} \chi_j(l) e\left(\frac{la_j ph}{p^{\nu-1}}\right) = p \sum_{l=1}^{p^{\nu-1}} \chi_j(l) e\left(\frac{la_j h'}{p^{\nu-1}}\right) = p C_1(\chi_j; a_j h').$$

Аналогичным образом доказывается, что

$$C_2(\chi_3, a_3 ph') = p C_2(\chi_3; a_3 h').$$

Принимая вниманию эти равенства из (3.8) находим

$$A = p^3 \sum_{h'=1}^{p^{\nu-1}} e\left(\frac{bh'}{p^{\nu-1}}\right) C_1(\chi_1; a_1 h') C_1(\chi_2; a_2 h') C_2(\chi_3; a_3 h') = p^3 Y(p^{\nu-1}),$$

где $\nu \geq \max\{\alpha + 1; 2\}$. Если поставить это в выражению $Z(p^\nu)$, то для всех $\nu \geq \alpha + 1$ получим

$$\frac{Z(p^\nu)}{\varphi^3(p^\nu)} = \frac{Y(p^\nu)}{\varphi^3(p^\nu)} - \frac{p^3 Y(p^{\nu-1})}{\varphi^3(p^\nu)} = \frac{Y(p^\nu)}{\varphi^3(p^\nu)} - \frac{Y(p^{\nu-1})}{\varphi^3(p^{\nu-1})}. \quad (3.9)$$

В справедливости равенство (3.9) при $\nu=1$, $\alpha=0$ можно убедиться непосредственной проверкой. Действительно, при $\nu=1$ из (3.9) получим ($q=p$)

$$Z(p) = \sum_{(h,p)=1} e\left(-\frac{bh}{p}\right) C_1(\chi_1, a_1 h) C_1(\chi_2, a_2 h) C_2(\chi_3, a_3 h) = Y(p) - \varphi^3(p)$$

или отсюда

$$Z(p)\varphi^{-3}(p) = \frac{Y(p)}{\varphi^3(p)} - 1.$$

Если обе части (3.9) суммировать при $\nu = \alpha + 1, \dots, \eta$ и использовать часть а) получим утверждение с).

Действительно,

$$\sum_{\nu=\alpha}^{\eta} \frac{Z(p^\nu)}{\varphi^3(p^\nu)} = \sum_{\nu=\alpha}^{\eta} \left(\frac{Y(p^\nu)}{\varphi^3(p^\nu)} - \frac{Y(p^{\nu-1})}{\varphi^3(p^{\nu-1})} \right) = \frac{Y(p^\eta)}{\varphi^3(p^\eta)}.$$

Следствие 3.5. а) если $p \geq 3, \alpha \geq 2$ то $A(p^\alpha) = 0$ и если $\alpha \geq 4$, то $A(2^\alpha) = 0$;

б) если $p \geq 3, \eta \geq 1$, то $p^\eta \varphi(p^\eta)^{-3} N(p^\eta) = p \varphi(p)^{-3} N(p)$;

с) если $\eta \geq 3$, то $2^\eta \varphi(2^\eta)^{-3} N(2^\eta) = 2^3 \varphi(2^3)^{-3} N(2^3)$.

Доказательство. В лемме 3.4 положим $\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = \chi_0$ и $\alpha = 0$. Тогда в силу равенства (3.5) и (3.6) справедлива равенства $A(p^\nu) = \varphi(p^\nu)^{-3} Z(p^\nu)$ и $N(p^\nu) = p^{-\nu} Y(p^\nu)$. Теперь следствие 3.5 следует из утверждение б) и с) леммы 3.4, так как $\theta = 1$, если $p \geq 3$ и $\theta = 2$, если $p = 2$.

Действительно, $A(p^\nu) = \varphi(p^\nu)^{-3} Z(p^\nu)$ и согласно утверждение б) леммы 3.4

$Z(p^\nu) = 0$, если $\nu \geq \theta + \max\{\theta, \alpha\}$, где $\theta = 1 + \left\lceil \frac{2}{p} \right\rceil$. Если $p \geq 3$, и $\alpha \geq 2$, тогда $\theta = 1$ и $\nu \geq 1 + \max\{1, \alpha\} \geq 3$, если $p = 2$, тогда $\theta = 2$ и $\alpha \geq 4$ поэтому $\nu \geq 2 + \max\{2, \alpha\} \geq 6$. Следовательно, верна утверждение а) следствие 3.5.

Докажем утверждение б) леммы 3.5. Необходимо доказать, при $p \geq 3, \eta \geq 1$ выполнение равенство $p^\eta \varphi(p^\eta)^{-3} N(p^\eta) = p \varphi(p)^{-3} N(p)$.

В силу утверждение с) леммы 3.4, при $\eta \geq \alpha$ имеем

$$\sum_{v \leq \eta} \varphi(p^v)^{-3} Z(p^v) = \frac{Y(p^\eta)}{\varphi(p^\eta)^3}.$$

Отсюда учитывая равенство $Y(p^\eta) = p^\eta N(p^\eta)$ получим

$$\sum_{v \leq \eta} \varphi(p^v)^{-3} Z(p^v) = \varphi(p^\eta)^{-3} p^\eta N(p^\eta). \quad (3.10)$$

Выражение стоящий подсуммой на левой части равенство (3.10) равен $A(p^\eta)$, поэтому из (3.10) следует, что

$$\sum_{v \leq \eta} A(p^v) = \varphi(p^\eta)^{-3} p^\eta N(p^\eta). \quad (3.11)$$

Здесь

$$\sum_{v \leq \eta} A(p^v) = A(p) = \varphi(p)^{-3} Z(p) = \varphi(p)^{-3} Y(p) = p \varphi(p)^{-3} p^\eta N(p). \quad (3.12)$$

Из (3.10) - (3.12), при $p \geq 3, \eta \geq 1$ следует утверждение следствие 3.5.

Учитывая следствие 3.5 в ведем еще следующие обозначении

$$s(2) = 2^3 \varphi(2^3)^{-3} N(2^3) = 1 + A(2) + A(2^2) + A(2^3), \quad (3.13)$$

$$s(p) = p \varphi(p)^{-3} N(p) = 1 + A(p), \text{ при } p \geq 3. \quad (3.14)$$

Из (1.3) и (1.4) при $q = 2^3$ из получим $s(2) = 8$ и $s(3) = 3$.

В самом деле, из (3.13) следует $s(2) = \frac{1}{8} N(8)$. В силу (1.3) $N(8) = 64$, поэтому $s(2) = 8$.

В согласно (3.14) имеем $s(3) = \frac{3}{2^3} N(3) = 3$, так как в силу (1.3) $N(3) = 8$.

Теперь покажем, что условие (1.4) можно заменить с условием

$$\left\{ \begin{array}{l} a) \sum_{j=1}^3 a_j \equiv b \pmod{24}, \\ b) \text{ для любого } p \geq 5 \text{ из четырех чисел } a_1, a_2, a_3, b \text{ самый больше} \\ \text{два делится на } p. \end{array} \right. \quad (3.15)$$

Лемма 3.6. Для любого простого числа p ($p \geq 5$) не более два из четверых чисел a_1, a_2, a_3, b не делится на p , тогда $N(p) \geq 1$.

Доказательство. Среди чисел $a_1, a_2, a_3, -b$ пусть m из них делится на p и k из них квадратичный вычет (соответственно l из них являются квадратичным невычетом) по модулю p . Тогда $m + k + l = 4$. Согласно (1.2) $m < 4$. Если $m = 3$, тогда сравнение в (1.4) принимает вид $a_j n_j \equiv 0 \pmod{p}$, $p \nmid a_j$, ($j = 1$ или 2) или же $a_3 n_3^2 \equiv 0 \pmod{p}$, $p \nmid a_3$. Отсюда $n_j \equiv 0 \pmod{p}$ ($j = 1$ или $j = 2$) или же $n_3 \equiv 0 \pmod{p}$, то есть $n_j = 0$ (при $j = 1$ или $j = 2$) или же $n_3 = 0$. Следовательно, $N(p) = 0$. Поэтому мы рассмотрим только $m \leq 2$. Согласно (3.6) имеем

$$A(p) = \frac{1}{\varphi(p)^3} \sum_{h=1}^p e_p(-bh) C_1(\chi_0; a_1 h) C_1(\chi_0; a_2 h) C_2(\chi_0; a_3 h), \quad (3.16)$$

где

$$C_1(\chi_0; a_j h) = \sum_{l \leq p-1} e \left(\frac{a_j h l}{p} \right) = \begin{cases} p-1, & \text{если } p \nmid a_j; \\ -1, & \text{если } p \mid a_j, (j=1,2) \end{cases} \quad (3.17)$$

и

$$C_2(\chi_0; a_3 h) = \sum_{l \leq p} e \left(\frac{a_3 h l^2}{p} \right) = \begin{cases} p-1, & \text{если } p \nmid a_3; \\ \lambda, & \text{если } p \mid a_3. \end{cases} \quad (3.18)$$

Здесь

$$\lambda = \begin{cases} \sqrt{p}-1, & \text{если } p \equiv 1 \pmod{4}; \\ i\sqrt{p}-1, & \text{если } p \equiv 3 \pmod{4} \end{cases} \quad (3.19)$$

(см. стр. 27, формула (43) [6]).

Теперь оценим $|A(p)|$ все возможных значениях параметров m, a_1, a_2, a_3, b . У нас $m \leq 2$, поэтому достаточно рассмотреть случае $m = 0, 1, 2$.

I. Пусть $m = 2$.

а) допустим $p \setminus a_1, p \setminus a_2$ и $p \nmid a_3, p \nmid b$, тогда учитывая (3.17) и (3.16)

$$|A(p)| = \frac{1}{\varphi(p)^3} \cdot (p-1)^2 |\lambda| |(-1)| = |\lambda| \leq \frac{|\lambda|}{\varphi(p)} \leq \frac{\sqrt{p}+1}{p-1} \leq \frac{1}{\sqrt{p}-1},$$

находим

то есть

$$-\frac{1}{\sqrt{p}-1} \leq A(p) \leq \frac{1}{\sqrt{p}-1}.$$

Отсюда следует, что $A(p) > -1$ если $p \geq 2$.

б) пусть $p \setminus a_1, p \setminus a_3, p \nmid a_2, p \nmid b$, тогда $|A(p)| = \frac{1}{\varphi(p)};$

в) $p \setminus a_1, p \setminus b$ и $p \nmid a_2, p \nmid a_3$, тогда $|A(p)| \leq \frac{\lambda}{\varphi(p)};$

г) если $p \setminus a_2, p \setminus b$ и $p \nmid a_1, p \nmid a_3$. Этот случае идентично с случаем в),

поэтому $|A(p)| \leq \lambda \varphi^{-1}(p);$

е) пусть $p \setminus a_3, p \setminus b, p \nmid a_1, p \nmid a_2$, тогда $|A(p)| \leq \frac{1}{\varphi(p)}.$

II. Далее рассмотрим случае $m = 1$.

а) $p \setminus a_1, p \nmid a_2, a_3, b$. Тогда из (3.16) находим $|A(p)| \leq \frac{|\lambda|}{\varphi^2(p)};$

б) $p \setminus a_2, p \nmid a_1, a_3, b$. Этот случае идентично случаем а) и поэтому

$$|A(p)| \leq \frac{|\lambda|}{\varphi^2(p)};$$

в) $p \setminus a_3, p \nmid a_1, a_2, b$. Тогда $|A(p)| \leq \frac{1}{\varphi^2(p)};$

d) $p \nmid b, p \nmid a_1, a_2, a_3$. Из (3.16) учитывая (3.17) и (3.18) получим

$$|A(p)| \leq \frac{|\lambda|}{\varphi^2(p)}.$$

III. Рассмотрим случае $m=0$, то есть $p \nmid a_1, a_2, a_3, b$, тогда из (3.16)

находим
$$|A(p)| \leq \frac{|\lambda|}{\varphi^3(p)}.$$

Из рассмотренных выше заключаем что

$$|A(p)| \leq \frac{1}{\sqrt{p}-1}, \text{ для всех } p \geq 2. \quad (3.20)$$

Таким образом лемма 3.6 доказано, так как $N(p) > 0$, если $A(p) > -1$.

Лемма 3.7. Справедливы следующие утверждение:

a) для всех простых имеем $|A(p)| \leq 2$ и для простых $p \nmid a_1 a_2 a_3$

выполняется неравенство $|A(p)| \leq 10p^{-2}$;

б) произведение $\prod_p s(p)$ абсолютно сходится и $\prod_p s(p) \gg B^{-6}$;

с)
$$\sum_{\substack{q=1 \\ (q,r)=1}}^{\infty} A(q) = \prod_{p \nmid r} s(p);$$

д)
$$\sum_{q \geq y} |A(q)| \ll y^{-1} B^{\frac{c_9}{\ln \ln N}} \ln^{10}(y+2),$$
 для всех $y > 0$.

Доказательство. Согласно (3.20) имеем $|A(p)| \leq \frac{1}{\sqrt{p}-1}$ отсюда при $p \geq 3$ следует $A(p) < 2$ и учитывая $A(2) = 2$ получим утверждение a) леммы.

Докажем вторая часть утверждение a). В силу III (см. доказательство леммы

(3.6) имеем $|A(p)| \leq \frac{|\lambda|}{\varphi^3(p)}$, где λ определяется из равенство (3.19). Из (3.19)

следует, что $|\lambda| < \sqrt{p} + 1$, поэтому
$$|A(p)| \leq \frac{\sqrt{p} + 1}{(p-1)^3} \leq \frac{10}{p^2}.$$

Докажем b). Согласно (3.14) и по предположению $N(p) \geq 1$ имеем

$s(p) = \varphi^{-3}(p) p N(p) = 1 + A(p)$. Отсюда $s(p) \geq \frac{p}{(p-1)^3} > \frac{1}{p^2}$. Используя это, когда $p \nmid a_1 a_2 a_3$ и часть (a) в остальных случаях получим

$$\prod_p s(p) \gg \prod_{p \nmid a_1 a_2 a_3} p^{-2} \prod_{p \nmid a_1 a_2 a_3} \left(1 - \frac{10}{p^2}\right) \gg \left(\prod_{p \nmid a_1 a_2 a_3} p \right)^{-2} \gg B^{-6}.$$

Утверждение c) является прямым следствием леммы 3.2, следствие 3.5 a), (3.13), (3.14). В самом деле

$$\sum_{\substack{q > 1 \\ (q, r) = 1}} A(q) = \prod_{p \nmid r} (1 + A(p) + A(p^2) + \dots) = \prod_{p \nmid r} (1 + A(p)) = \prod_{p \nmid r} s(p).$$

Часть d) леммы 3.7 следует из оценки части a), таким же путем как и утверждение (4) леммы 4.4 работы [6]. Действительно, множество простых чисел делим на две подмножества $P_G = \{p \mid p \nmid a_1 a_2 a_3\}$ и $P_B = \{p \mid p \nmid a_1 a_2 a_3\}$ и пусть $\langle P_G \rangle$ и $\langle P_B \rangle$ множество положим целых свободных от квадратов, которые простые делители из P_G и P_B соответственно.

Положим $\sigma = (\ln(y+2))^{-1}$. Заметим, что $y^\sigma < e \ll 1$ и в силу формулы (3.1) [7] имеем (см. стр 66 и 69. [11])

$$\prod_p (1 - p^{-1-\sigma})^{-1} = \zeta(1+\sigma) \ll \sigma^{-1}.$$

Также согласно (4.7) работы [6] справедлива оценка,

$$\prod_{p \in P_B} 3 = \left(\text{количество делителей} \prod_{p \in P_B} p \right)^{\frac{\ln 3}{\ln 2}} \ll B^{\frac{c_9}{\ln \ln B}}.$$

Теперь используя аргументации приведенный в части a) находим

$$\sum_{q \geq y} |A(q)| = \sum_{q \geq y} \frac{q^{1-\sigma}}{q^{1-\sigma}} |A(q)| \leq \sum_{q \geq y} \frac{q^{1-\sigma}}{y^{1-\sigma}} |A(q)| \leq y^{-1+\sigma} \sum_{q \nmid 1} q^{1-\sigma} |A(q)| \ll$$

$$\ll y^{-1} \prod_{p \in P_0} \left(1 - \frac{1}{p^{1+\sigma}} \right)^{-10} \left(\prod_{p \in P_3} 3 \right) \ll y^{-1} B^{\frac{c_9}{\ln \ln B}} \sigma^{-10} \ll y^{-1} B^{\frac{c_9}{\ln \ln B}} (\ln(y+2))^{10}.$$

Лемма 3.8. Если $\chi_j \pmod{r_j}, j=1,2,3$ примитивные характеры и $r=[r_1, r_2, r_3]$, тогда справедливы следующие утверждение:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \sum_{\substack{q \leq Q \\ r \nmid q}} \varphi(q)^{-3} Z(q; \chi_1 \chi_0, \chi_2 \chi_0, \chi_3 \chi_0) \ll r^{-1} B^{\frac{3}{2}} \ln Q; \\ \text{b)} \quad & \sum_{\substack{q \leq Q \\ r \nmid q}} \varphi(q)^{-3} Z(q; \chi_1 \chi_0, \chi_2 \chi_0, \chi_3 \chi_0) = \varphi(\sigma r)^{-3} Y(\sigma r; \chi_1 \chi_0, \chi_2 \chi_0, \chi_3 \chi_0) \prod_{p \nmid r} s(p) + \\ & + O \left(Q^{-1} B^{\frac{5}{2}} \ln^{11} Q \right), \end{aligned}$$

где $\sigma=1,4$ и 2 соответственно смотря тому, что какой из этих соотношении $2 \nmid r, 2 \parallel r, 4 \nmid r$ выполняется.

Доказательство. Оценка а) следует из леммы 3.3. В самом деле, согласно лемме 3.3, имеем

$$\sum_{\substack{q \leq Q \\ r \nmid q}} \frac{Z(q)}{\varphi(q)^{-3}} \ll \sum_{\substack{q \leq Q \\ r \nmid q}} q^{-1} B^{\frac{3}{2}} \ll B^{\frac{3}{2}} \sum_{q_1 \leq Q^{-1}} (\eta q_1)^{-1} \ll B^{\frac{3}{2}} r^{-1} \ln Q.$$

Докажем утверждение б). Будем использовать вполне мультипликативность функции $Z(q)$ и $Y(q)$. Для любого q , которые делится на r , будем полагать $q = q' \cdot q''$, так чтобы $(q'', r) = 1$ и каждый простой множитель q' делит r . Тогда согласно (4.2), имеем

$$Z(q; \chi_1 \chi_0, \chi_2 \chi_0, \chi_3 \chi_0) = \sum_{h=1}^q e_q(-bh) C_1(\chi_1 \chi_0, a_1 h) C_1(\chi_2 \chi_0, a_2 h) C_2(\chi_3 \chi_0, a_3 h).$$

Из $(h, q) = 1$ следует $(h, q' \cdot q'') = 1 \leftrightarrow (h, q') = 1 \text{ и } (h, q'') = 1$. Так как $(q', q'') = 1$, то $q'u + q''v = 1$, откуда $h = q'(uh) + q''(vh) = q''h_1 + q'h_1'$, где $h_1 = vh, h_1' = uv$.

Поэтому

$$e_q(-bh) = e\left(\frac{-b(q''h_1 + q'h_1)}{q'q''}\right) = e\left(\frac{-bh_1}{q'}\right) e\left(\frac{-bh_1}{q''}\right)$$

и

$$C_j(\chi_j \chi_0; a_j(q'h_1 + q''h_1)) = \sum_{l_j \leq q} \chi_1 \chi_0(l_j) e_q(a_j(q'h_1 + q''h_1)l_j).$$

Поэтому

$$Z(q; \chi_1 \chi_0, \chi_2 \chi_0, \chi_3 \chi_0) = Z(q'; \chi_1 \chi_0, \chi_2 \chi_0, \chi_3 \chi_0) q'(q'')^3 A(q') \quad (3.21)$$

χ_0 на левой части равенство (3.21) главный характер по модулю q, a на правой части по модулю q' .

Пусть $r = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ ($\alpha_i \geq 1$) каноническое разложение r . Для $j = 1, 2, 3$ положим

$$r_j = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_{ji}}, \alpha_{ji} \geq 0 \quad \chi_j \pmod{r_j} = \prod_{i=1}^k \chi_{ji} \pmod{p_i^{\alpha_{ji}}}.$$

и

Тогда каждый χ_{ji} является примитивным характером и $\alpha_i = \max\{\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \alpha_{3i}\}$.

Пусть $q' = p_1^{t_1} \dots p_k^{t_k}$ ($t_i \geq \alpha_i$), тогда

$$Z(q'; \chi_1 \chi_0, \chi_2 \chi_0, \chi_3 \chi_0) = \prod_{i=1}^k Z(p_i^{t_i}; \chi_{1i} \chi_0, \chi_{2i} \chi_0, \chi_{3i} \chi_0).$$

Согласно утверждению (а) и (б) леммы 3.4, имеем $Z(p_i^{\alpha_i}) = Y(p_i^{\alpha_i})$ и $Z(p_i^{t_i}) = 0$, если $p_i \geq 3, t_i \geq \alpha_i + 1$ или $p_i = 2, t_i \geq 2 + \max\{2; \alpha_i\}$.

Следовательно если $r = 2^{\alpha_2} v, 2 \nmid v$, тогда

$$Z(v) = Y(v) \quad (3.22)$$

и $Z(q') \neq 0$ только если $q' \mid \sigma r$, то есть $q' = ur$ с $u \mid \sigma$ так как $r \mid q'$. Таким

образом, если мы предположим, что $\sigma r \leq Q$, тогда, используя утверждение с) леммы 3.4 и равенство (3.13) будем иметь

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{q \leq Q \\ r \nmid q}} \frac{Z(q)}{\varphi(q)^3} &= \sum_{u \setminus \sigma} \frac{Z(ur)}{\varphi(ur)^3} = \sum_{u \setminus \sigma} \frac{Z(u2^{\epsilon_1}v)}{\varphi(u2^{\epsilon_1}v)^3} = \sum_{u \setminus \sigma} \frac{Z(u2^{\epsilon_1})}{\varphi(u2^{\epsilon_1})^3} \cdot \frac{Z(v)}{\varphi(v)^3} = \\
&= \frac{Y(\sigma 2^{\epsilon_1})}{\varphi(\sigma 2^{\epsilon_1})^3} \cdot \frac{Y(v)}{\varphi(v)^3} = \frac{Y(\sigma r)}{\varphi(\sigma r)^3}.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Теперь из (3.21) и утверждение d) леммы 3.7 находим

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{q \leq Q \\ r \nmid q}} \frac{Z(q)}{\varphi(q)^3} &= \sum_{\substack{q \leq Q \\ r \nmid q}} \frac{Z(q)}{\varphi(q)^3} \sum_{q \leq Q/q} A(q) = \sum_{\substack{q \leq Q \\ r \nmid q}} \frac{Z(q)}{\varphi(q)^3} \left(\sum_{q \nmid 1} A(q) + \sum_{q \mid Q(q)^{-1}} A(q) \right) = \\
&= \sum_{\substack{q \leq Q \\ r \nmid q}} \frac{Z(q)}{\varphi(q)^3} \left(\sum_{q \nmid 1} A(q) + O \left(q Q^{-1} B^{\frac{c_9}{\ln \ln N}} \ln^{10} Q \right) \right).
\end{aligned}$$

Далее, используем утверждение с) леммы 3.7 и равенство (3.23), а также лемма 3.3, тогда получим

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{q \leq Q \\ r \nmid q}} \frac{Z(q)}{\varphi(q)^3} &= \frac{Y(\sigma r)}{\varphi(\sigma r)^3} \left(\prod_{p \nmid r} s(p) + O \left(q Q^{-1} B^{\frac{c_9}{\ln \ln N}} \ln^{10} Q \right) \right) = \frac{Y(\sigma r)}{\varphi(\sigma r)^3} \prod_{p \nmid r} s(p) + \\
&+ O \left(Q^{-1} B^{\frac{3}{2} + \frac{c_9}{\ln \ln N}} \ln^{10} Q \right).
\end{aligned}$$

Здесь мы также учитывали, что $q = ur$, $u \setminus \sigma$.

Таким образом, утверждение b) доказано для $\sigma r \leq Q$. Для $\sigma r > Q$, согласно леммы 3.3 имеем:

$$\sum_{\substack{q \leq Q \\ r \nmid q}} \frac{Z(q)}{\varphi(q)^3} \ll \sum_{\substack{q \leq Q \\ r \nmid q}} B^{3/2} q^{-1} \ll B^{3/2} \sum_{\substack{t \leq Q r^{-1} \\ r > \frac{Q}{\sigma}}} \frac{1}{tr} \ll B^{3/2} r^{-1} \ll B^{3/2} Q^{-1},$$

так как $q = rt \leq Q \leq \sigma r \rightarrow t \leq \sigma, t \leq 4$.

Аналогично, в виду (3.23) и утверждение d) леммы 3.7 имеем ($y=1$).

$$\frac{Y(\sigma r)}{\varphi(\sigma r)^3} \prod_{p \nmid r} s(p) \ll r^{-1} B^{3/2} \prod_p (1 + |A(p)|) \ll Q^{-1} B^{3/2} \sum_{q \nmid 1} |A(q)| \ll Q^{-1} B^{\frac{3}{2} + \frac{c_9}{\ln \ln N}}.$$

Следовательно утверждение b) леммы 3.8 остаётся в силе и в этом случае.

Из леммы 3.1-3.8 следует сходимость особого ряда задачи.

Список использованных литератур

1. Хуа-Ло-Кен. Аддитивная теория простых чисел. //Тр. Матем.инс.им. В.А.Стеклова 1947, том 22, с.3-179.
2. Hua-Lo-Ken. Some results in the additive prime number theory. Quart. J. Math. Oxford Ser.9,1938, 68-80.
3. Аллаков И. Оценка тригонометрических сумм и их приложения к решению некоторых аддитивных задач теории чисел. Термез:”Сурхон нашр”, 2021,160 с.
4. Davenport Harold. Multiplicative Number Theory.// Shringger-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin. Second edi. 1997,178p.
5. Виноградов И.М. Основы теории чисел. Москва-Наука.1981,176 с.
6. Коробов Н.М. Тригонометрические сумм и их приложения, М. Наука, 1989, 240с.
7. Liu M.C. , Tsang K.M. Small prime solutions of linear equations // Proc. Intern. Number. Th. Conf. 1987. Laval University. Cand. Math. Soc. Berlin-New York . - 1989. - p.595-624.
8. Прахар К. Распределение простых чисел. М.”Мир”-1967. 511 с.