

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В КРУГЕ, ПОЛУКРУГЕ И ЧЕТВЕРТИ КРУГА

Аббасова Мунира Обуджоновна

Наманганский государственный университет

Базовый докторант

E-mail: abbasovamunira21@gmail.com ,

+998995121062

Аннотация: Как известно, задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге достаточно хорошо исследована. Настоящая работа посвящена исследованию основных краевых задач для Лапласа в частях круга – полукруге и первой четверти круга. Основным результатом является доказательство однозначной разрешимости рассматриваемых задач. Единственность решения поставленных задач следует из принципа экстремума для эллиптических уравнений, а существование доказывается методом функции Грина. Используя метод симметрии, в каждом случае функцию Грина удастся строить в явном виде, следовательно, решения поставленных задач выписываются в явных формах.

Ключевые слова: уравнение Лапласа, задача Дирихле, задача Хольмгрена, функция Грина, метод симметрии.

AYLANA, YARIM DOIRA VA CHORAK DOIRADAGI LAPLAS

TENGLAMASINING CHEGARAVIY MASALALARI

Abbasova Munira Obudjonovna

Namangan davlat universiteti

Tayanch doktorant

+998995121062

E-mail: abbasovamunira21@gmail.com

Annotasiya: Ma'lumki, Laplas tenglamasi uchun doirada Dirixle masalasi juda yaxshi o'rganilgan. Mazkur ish doiraning qismlari bo'lgan yarim va chorak doiralarda asosiy chegaraviy masalalarni o'rganishga bag'ishlangan. Qaralayotgan masalalarning bir qiymatli yechilishi ishning asosiy natijasidir. Qo'yilgan masalalar yechimlarining yagonaligi elliptik tenglamalar uchun ekstremum

prinsiridan kelib chiqadi, yechimlari esa Grin funksiyasi usulida topiladi. Simmetriya usulini qo'llab, har bir masalaning Grin funksiyasi oshkor ko'rinishda quriladi va, demakki, qo'yilgan masalalarning yechimlari ham oshkor ko'rinishlarda yoziladi.

Kalit so'zlar: Laplas tenglamasi, Dirixle masalasi, Xolmgren masalasi, Grin funksiyasi, simmetriya usuli.

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE LAPLACE EQUATION IN A CIRCLE, SEMICIRCLE AND QUARTER CIRCLE

Abbasova Munira Obudjonovna

Namangan state university

PhD doktorant

E-mail: abbasovamunira21@gmail.com ,

+998995121062

Abstract: It is known, the Dirichlet problem for the Laplace equation in a circle has been studied quite well. This work is devoted to the study of the main boundary value problems for Laplace in parts of a circle - a semicircle and the first quarter of a circle. The main result is the proof of the unique solvability of the problems under consideration. The uniqueness of the solution to the problems posed follows from the extremum principle for elliptic equations, and existence is proved by the Green's function method. Using the symmetry method, in each case the Green's function can be constructed in explicit form; therefore, solutions to the problems posed are written out in explicit forms.

Key words: Laplace equation, Dirichlet problem, Holmgren problem, Green's function, symmetry method.

Введение.

Уравнение Лапласа возникает во многих физических задачах механики, теплопроводности, электростатики, гидравлики. Большое значение оператор Лапласа имеет в квантовой физике, в частности в уравнении Шредингера. Несмотря на то, что уравнение Лапласа является одним из самых простых в математической физике, его решение сопряжено с трудностями. Особенно трудным бывает численное решение из-за нерегулярности функций и наличия особенностей. Впервые Гильберт выполнил строгое решение этого уравнения в частных производных. Уравнению Лапласа на двумерном пространстве удовлетворяют аналитические функции. Аналитические функции рассматриваются в теории функций комплексного переменного, и

класс решений уравнения Лапласа можно свести к функции комплексного переменного.

Под задачей Дирихле для уравнения Лапласа понимается, задача, когда искомая функция задана на ограниченной области и известны её значения на границе, а под задачей Неймана - краевая задача с заданными граничными условиями для производной по нормали искомой функции на границе области — так называемые граничные условия второго рода. Бывают задачи со условиями, когда на одной части границы задается условие Дирихле, а в оставшейся части – условия Неймана. Такие задачи называют либо смешанными задачами, либо задачами Дирихле-Неймана, либо задачами Хольмгрена, по имени ученого, впервые исследовавшего такую задачу для уравнения Трикоми.

Метод функции Грина – один из методов решения краевых задач для уравнения Лапласа. При решении краевой задачи Дирихле функция Грина выбирается так, чтобы эта функция обращалась в нуль на границе рассматриваемой области; и наоборот, решая краевую задачу Неймана, следует выбирать функцию Грина так, чтобы на кривой обращалась в нуль её нормальная производная. Исходя из этой логики, нетрудно выбрать функцию Грина для решения смешанной задачи (задачи Дирихле-Неймана).

К исследованию краевых задач полукруге, четверти круга, полушарие и других частях шара и многомерного шара посвящены относительно много работ. Например, в работах [1 - 2] решения основных краевых задач для эллиптического уравнения с сингулярными коэффициентами

$$E_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^{m, n}(u) \equiv \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum_{j=1}^n \frac{2\alpha_j}{x_j} \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0, \quad 0 < 2\alpha_j < 1, \quad m \geq n > 0$$

в частях шара получены в явных формах методом функции Грина.

В настоящей статье исследуются основные краевые задачи для уравнения $E_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^{m, n}(u) \equiv 0$ при $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, $m = 2, n = 1$ и $n = 2$, т.е. для двумерного уравнения Лапласа в круге, полукруге и четверти круга.

2. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге.

Рассмотрим двумерное уравнение Лапласа

$$\Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{1}$$

в некоторой ограниченной области Ω плоскости R_2 . В плоском случае функция Грина имеет вид

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} + g(M, M_0), \quad (2)$$

где $M = (x, y)$, $M_0 = (x_0, y_0)$, $r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$, $g(x; \xi)$ - функция, гармоническая в области Ω по координатам обеих точек M и M_0 .

Пусть теперь $\Omega_2 \subset R_2$ - круг радиуса R с центром в начале координат и S_2 - его граница, т.е. окружность.

Задача D_2 (Задача Дирихле в круге). Найти гармоническое решение уравнения Лапласа (1) в круге Ω_2 , удовлетворяющее условию

$$u|_{S_2} = \varphi(M), \quad M \in S_2,$$

где $\varphi \in C(\bar{S}_2)$ - заданная функция.

Для построения функции Грина в случае областей с достаточно широкой группой симметрий весьма эффективным оказывается метод симметрий. К числу таких областей, для которых функция Грина может быть легко построена, относится круг. Возьмем внутри круга Ω_2 произвольную точку $M_0(x_0, y_0)$ и обозначим $\rho = |OM_0|$. Построим точку $\tilde{M}$ симметричную точке M_0 относительно окружности. Она будет лежать на прямой OM_0 вне окружности на расстоянии $\tilde{\rho}$ от центра, причем $\rho\tilde{\rho} = R^2$ (см. рис. 1).

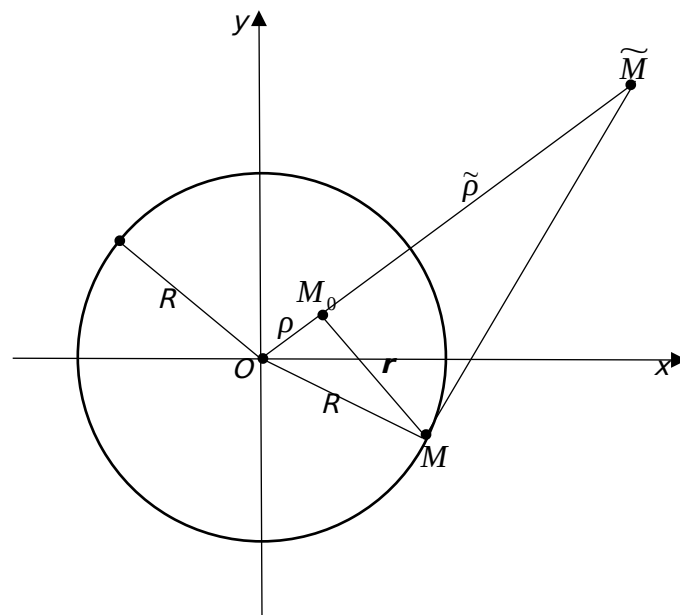


Рис. 1

Рис. 1

Возьмем произвольную точку $M(x, y)$ из круга, отличную от M_0 . Пусть $|MM_0| = r$, $|M\tilde{M}| = \tilde{r}$, $\tilde{\rho} = |O\tilde{M}|$; найдем соотношение между r и $\tilde{r}$, когда точка M принадлежит окружности (см. рис.1). Тогда треугольники OM_0M и $O\tilde{M}M$ подобны, отсюда

$$r \cdot R = \rho \cdot \tilde{r}, \quad (3)$$

где

$$R^2 = x^2 + y^2, \quad \rho^2 = x_0^2 + y_0^2, \quad \tilde{r}^2 = \left(x - \frac{R^2}{\rho^2} x_0 \right)^2 + \left(y - \frac{R^2}{\rho^2} y_0 \right)^2.$$

Из представления функции Грина (2) нам необходимо найти ее регулярную часть $g(M, M_0)$, удовлетворяющую условию

$$g(M, M_0)|_{S_2} = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}, \quad M \in S_2.$$

Из (3) имеем $\frac{1}{r} - \frac{R}{\rho \tilde{r}} = 0$. Отсюда получаем, что нужно взять $g(M, M_0) = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{R}{\rho \tilde{r}}$, и функция Грина будет иметь вид:

$$G_2(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{1}{r} - \ln \frac{R}{\rho \tilde{r}} \right). \quad (4)$$

Чтобы получить решение задачи Дирихле для круга по известной формуле [10]

$$u(\xi) = - \int \varphi(x) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial N} d\Gamma, \quad (5)$$

следует вычислить производную по нормали функции (4):

$$2\pi \frac{\partial G_2(M, M_0)}{\partial N} = \frac{\partial}{\partial N} \left(\ln \frac{1}{r} \right) - \frac{\partial}{\partial N} \left(\ln \frac{R}{\rho \tilde{r}} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial N} \left(\ln \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r} \cos(r, N), \quad \frac{\partial}{\partial N} \left(\ln \frac{R}{\rho \tilde{r}} \right) = -\frac{1}{\tilde{r}} \cos(\tilde{r}, N).$$

Из треугольника OM_0M имеем $\rho^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos(r, N)$, а из треугольника $O\tilde{M}M$ получаем $\tilde{\rho}^2 = R^2 + \tilde{r}^2 - 2R\tilde{r} \cos(\tilde{r}, N)$. Отсюда следует, что

$$\cos(r, N) = \frac{R^2 + r^2 - \rho^2}{2Rr}, \quad \cos(\tilde{r}, N) = \frac{R^2 + \tilde{r}^2 - \tilde{\rho}^2}{2R\tilde{r}}.$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} 2\pi \frac{\partial G_2}{\partial N} &= -\frac{1}{r} \cos(r, N) + \frac{1}{\tilde{r}} \cos(\tilde{r}, N) = \\ &= -\frac{1}{r} \frac{R^2 + r^2 - \rho^2}{2Rr} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{R^2 + \tilde{r}^2 - \tilde{\rho}^2}{2R\tilde{r}} = \frac{\rho^2 - R^2}{Rr^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Окончательно формула (5) примет вид [10]

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{S_2} \varphi(M) \frac{R^2 - \rho^2}{Rr^2} dS_2. \quad (7)$$

Пусть $\Omega_2^1 \subset R_2$ - полукруг радиуса R с центром в начале координат и S_2^1 - его граница, т.е. полуокружность.

3. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в полукруге.

Задача $D^1 N_2^0$ (Задача Дирихле в полукруге). Найти гармоническое решение уравнения Лапласа (1) в полукруге Ω_2^1 , удовлетворяющее условиям

$$u|_{x=0} = \tau_1(y), \quad -R \leq y \leq R; \quad u|_{S_2^1} = \varphi(M), \quad M \in S_2^1, \quad (8)$$

где $\tau_1 \in [-R, R]$ и $\varphi \in C(\bar{S}_2^1)$ - заданные функции, причем в точках A и B (см. рис.2) выполняются условия согласования: $\tau_1(A) = \varphi(A)$, $\tau_1(B) = \varphi(B)$.

Для построения функции Грина для полукруга достаточно отобразить функцию Грина задачи Дирихле для круга относительно оси $x=0$ и вычесть

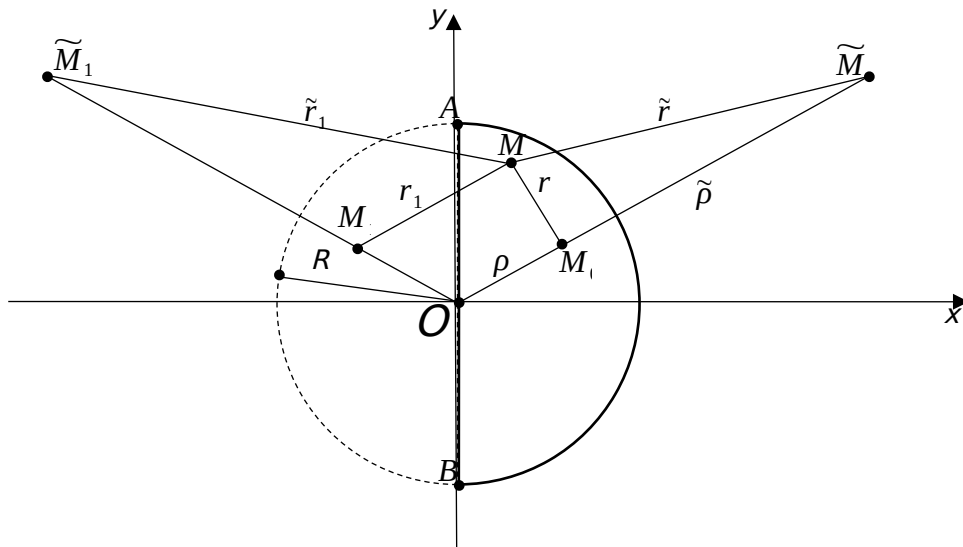


Рис. 2

полученную функцию из самой функции Грина для круга. Пусть

Пусть $\tilde{r} = |MM_0|$, $\tilde{r}_1 = |MM_1|$, $r = |MM_0|$, $r_1 = |MM_1|$, $\rho = |OM_0|$, $\tilde{\rho} = |OM_1|$ (см. рис. 2). Функция Грина будет иметь вид:

$$G_2^{(1,0)}(M, M_0) = G_2(M, M_0) - G_2(M, M_1). \quad (9)$$

Если точка $M \in S_2^1$, то из подобия соответствующих треугольников: $\triangle OMM_0$ и $\triangle OMM_1$, получим:

$$\frac{1}{r} - \frac{R}{\rho \tilde{r}} = 0, \quad \frac{1}{r_1} - \frac{R}{\rho \tilde{r}_1} = 0.$$

Если точка $M \in AB$, то

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1}, \quad \frac{R}{\rho \tilde{r}} = \frac{R}{\rho \tilde{r}_1}.$$

Тогда функция Грина (9) определяется формулой

$$G_2^{(1,0)}(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{1}{r} - \ln \frac{R}{\rho \tilde{r}} - \ln \frac{1}{r_1} + \ln \frac{R}{\rho \tilde{r}_1} \right). \quad (10)$$

Поскольку граница области Ω_2^1 в данном случае является кусочно-гладкой, то решение задачи $D^1 N_2^0$ можно выписать следующим образом:

$$u(M_0) = - \int_{S_2^1} \varphi(M) \frac{\partial G_2^{(1,0)}}{\partial N} dS_2^1 + \int_R^R \tau_1(y) \frac{\partial G_2^{(1,0)}}{\partial x} \Big|_{x=0} dy \quad (11)$$

Вычислим $\frac{\partial G_2^{(1,0)}}{\partial N}$ на полуокружности S_2^1 . Произвольную по нормали первых двух слагаемых (10), т.е. функции (4), мы уже вычисляли при выводе формулы (16). Вычислим $\frac{\partial G_2(M, M_1)}{\partial N}$ на полуокружности S_2^1 из (9) и (10). Предварительно найдем:

$$\frac{\partial}{\partial N} \left(\ln \frac{1}{r_1} \right) = - \frac{1}{r_1} \cos(r_1, N), \quad \frac{\partial}{\partial N} \left(\ln \frac{R}{\rho \tilde{r}_1} \right) = - \frac{1}{\tilde{r}_1} \cos(\tilde{r}_1, N).$$

Из треугольников OM_1M и $O\tilde{M}_1M$ имеем соответственно: $\rho^2 = R^2 + r_1^2 - 2Rr_1 \cos(r_1, N)$, $\tilde{\rho}^2 = R^2 + \tilde{r}_1^2 - 2R\tilde{r}_1 \cos(\tilde{r}_1, N)$. Отсюда следует, что:

$$\cos(r_1, N) = \frac{R^2 + r_1^2 - \rho^2}{2Rr_1}, \quad \cos(\tilde{r}_1, N) = \frac{R^2 + \tilde{r}_1^2 - \tilde{\rho}^2}{2R\tilde{r}_1}.$$

$$2\pi \frac{\partial G_2(M, M_1)}{\partial N} = - \frac{1}{r_1} \cos(r_1, N) + \frac{1}{\tilde{r}_1} \cos(\tilde{r}_1, N) = \frac{\rho^2 - R^2}{Rr_1^2}.$$

Тогда

$$2\pi \frac{\partial G_2^{(1,0)}(M, M_0)}{\partial N} = \frac{\rho^2 - R^2}{Rr^2} - \frac{\rho^2 - R^2}{Rr_1^2}. \quad (12)$$

Вычислим производную G_2 по нормали к отрезку AB . В этом случае будем иметь:

$$\frac{\partial G_2}{\partial N} = - \frac{\partial G_2}{\partial x}; \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\ln \frac{1}{r} \right) = - \frac{x - x_0}{r^2}; \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\ln \frac{1}{r_1} \right) = - \frac{x + x_0}{r_1^2};$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\ln \frac{R}{\tilde{r}\rho} \right) = - \frac{x - \tilde{x}_0}{\tilde{r}^2}; \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\ln \frac{R}{\tilde{r}_1\rho} \right) = - \frac{x + \tilde{x}_0}{\tilde{r}_1^2}; \quad \tilde{x}_0 = \frac{R^2}{\rho^2} x_0;$$

$$2\pi \frac{\partial G_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = 2x_0 \left(\frac{1}{r^2} - \frac{R^2}{\tilde{r}^2 \rho^2} \right). \quad (13)$$

Подставляя (12) и (13) в (11), будем иметь

$$u(M_0) = \frac{x_0}{\pi} \int_R^R \tau_1(y) \left(\frac{1}{r_{(1)}^2} - \frac{R^2}{\rho^2 \tilde{r}_{(1)}^2} \right) dy + \frac{1}{2\pi} \int_{S_2^1} \varphi(M) \frac{R^2 - \rho^2}{R} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{\tilde{r}^2} \right) dS_2^1.$$

Здесь и далее введены обозначения:

$$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2, \quad r_1^2 = (x + x_0)^2 + (y - y_0)^2,$$

$$r_2^2 = (x - x_0)^2 + (y + y_0)^2, \quad r_{12}^2 = (x + x_0)^2 + (y + y_0)^2,$$

$$r_{(1)}^2 = x_0^2 + (y - y_0)^2, \quad r_{(2)}^2 = (x - x_0)^2 + y_0^2, \quad r_{1(2)}^2 = (x + x_0)^2 + y_0^2,$$

$$r_{2(1)}^2 = x_0^2 + (y + y_0)^2,$$

$$\tilde{r}^2 = \left(x - \frac{R^2}{\rho^2} x_0 \right)^2 + \left(y - \frac{R^2}{\rho^2} y_0 \right)^2, \quad \tilde{r}_1^2 = \left(x + \frac{R^2}{\rho^2} x_0 \right)^2 + \left(y - \frac{R^2}{\rho^2} y_0 \right)^2,$$

$$\tilde{r}_2^2 = \left(x - \frac{R^2}{\rho^2} x_0 \right)^2 + \left(y + \frac{R^2}{\rho^2} y_0 \right)^2, \quad \tilde{r}_{12}^2 = \left(x + \frac{R^2}{\rho^2} x_0 \right)^2 + \left(y + \frac{R^2}{\rho^2} y_0 \right)^2,$$

$$\tilde{r}_{(1)}^2 = \frac{R^4}{\rho^4} x_0^2 + \left(y - \frac{R^2}{\rho^2} y_0 \right)^2, \quad \tilde{r}_{(2)}^2 = \left(x - \frac{R^2}{\rho^2} x_0 \right)^2 + \frac{R^4}{\rho^4} y_0^2,$$

$$\tilde{r}_{1(2)}^2 = \left(x + \frac{R^2}{\rho^2} x_0 \right)^2 + \frac{R^4}{\rho^4} y_0^2, \quad \tilde{r}_{2(1)}^2 = \frac{R^4}{\rho^4} x_0^2 + \left(y + \frac{R^2}{\rho^2} y_0 \right)^2; \quad R^2 = x^2 + y^2,$$

$$\rho^2 = x_0^2 + y_0^2.$$

4. Другие краевые задачи для уравнения Лапласа в полукруге и четверти круга.

Задача $D^0 N_2^1$ (Задача N (Хольмгрена) в полукруге). Найти гармоническое решение уравнения Лапласа (1) в полукруге Ω_2^1 , удовлетворяющее условиям

$$u_x|_{x=0} = \nu_1(y), \quad -R < y < R; \quad u|_{S_2^1} = \varphi(M), \quad M \in S_2^1,$$

Функция Грина:

$$G_2^{(0,1)}(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{1}{r} - \ln \frac{R}{\rho \tilde{r}} + \ln \frac{1}{r_1} - \ln \frac{R}{\rho \tilde{r}_1} \right);$$

Решение:

$$u(M_0) = -\frac{1}{\pi} \int_R^R \nu_1(y) \left(\ln \frac{1}{r_{(1)}} - \ln \frac{R}{\rho \tilde{r}_{(1)}} \right) dy + \frac{1}{2\pi} \int_{S_2^1} \varphi(M) \frac{R^2 - \rho^2}{R} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\tilde{r}^2} \right) ds.$$

Задача $D^2N_2^0$ (Задача Дирихле в четверть круга). Найти гармоническое решение уравнения Лапласа (1) в четверть круге Ω_2^2 , удовлетворяющее условиям

$$u|_{x=0} = \tau_1(y), \quad u|_{y=0} = \tau_2(x), \quad 0 \leq x, y \leq R; \quad u|_{S_2^2} = \varphi(M), \quad M \in S_2^2, \\ \tau_1(0) = \tau_2(0), \quad \tau_1(R) = \varphi(A), \quad \tau_2(R) = \varphi(B),$$

Функция Грина:

$$G_2^{(2,0)}(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{1}{r} - \ln \frac{1}{r_1} - \ln \frac{1}{r_2} + \ln \frac{1}{r_{12}} - \ln \frac{R}{\rho \tilde{r}} + \ln \frac{R}{\rho \tilde{r}_1} + \ln \frac{R}{\rho \tilde{r}_2} - \ln \frac{R}{\rho \tilde{r}_{12}} \right);$$

Решение:

$$u(M_0) = \frac{x_0}{\pi} \int_0^R \tau_1(y) \left(\frac{1}{r_{(1)}^2} - \frac{1}{r_{2(1)}^2} - \frac{R^2}{\rho^2 \tilde{r}_{(1)}^2} + \frac{R^2}{\rho^2 \tilde{r}_{2(1)}^2} \right) dy \\ + \frac{y_0}{\pi} \int_0^R \tau_2(x) \left(\frac{1}{r_{(2)}^2} - \frac{1}{r_{1(2)}^2} - \frac{R^2}{\rho^2 \tilde{r}_{(2)}^2} + \frac{R^2}{\rho^2 \tilde{r}_{1(2)}^2} \right) dx \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{S_2^2} \varphi(M) \frac{R^2 - \rho^2}{R} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_{12}^2} \right) dS_2^2.$$

Задача $D^1N_2^1$ (Задача Дирихле-Хольмгрена в четверть круга). Найти гармоническое решение уравнения Лапласа (1) в четверть круге Ω_2^2 , удовлетворяющее условиям

$$u|_{x=0} = \tau_1(y), \quad 0 \leq y \leq R; \quad u_y|_{y=0} = \nu_2(x), \quad 0 < x < R; \\ u|_{S_2^2} = \varphi(M), \quad M \in S_2^2, \quad \tau_1(R) = \varphi(A).$$

Функция Грина:

$$G_2^{(1,1)}(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{1}{r} - \ln \frac{1}{r_1} + \ln \frac{1}{r_2} - \ln \frac{1}{r_{12}} - \ln \frac{R}{\rho \tilde{r}} + \ln \frac{R}{\rho \tilde{r}_1} - \ln \frac{R}{\rho \tilde{r}_2} + \ln \frac{R}{\rho \tilde{r}_{12}} \right);$$

Решение:

$$\begin{aligned}
u(M_0) = & \frac{x_0}{\pi} \int_0^R \tau_1(y) \left(\frac{1}{r_{(1)}^2} + \frac{1}{r_{2(1)}^2} - \frac{R^2}{\rho^2} \left[\frac{1}{\tilde{r}_{(1)}^2} + \frac{1}{\tilde{r}_{2(1)}^2} \right] \right) dy \\
& - \frac{1}{\pi} \int_0^R \nu_2(x) \left(\ln \frac{1}{r_{(2)}} - \ln \frac{1}{r_{1(2)}} - \ln \frac{R}{\rho \tilde{r}_{(2)}} + \ln \frac{R}{\rho \tilde{r}_{1(2)}} \right) dx \\
& - \frac{1}{2\pi} \int_{S_2^2} \varphi(M) \frac{R^2 - \rho^2}{R} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_{12}^2} \right) ds.
\end{aligned}$$

Задача $D^0 N_2^2$ (**Задача Хольмгрена в четверть круга**). Найти гармоническое решение уравнения Лапласа (1) в четверть круге Ω_2^2 , удовлетворяющее условиям

$$u|_{x=0} = \nu_1(y), \quad u|_{y=0} = \nu_2(x), \quad 0 < x, y < R; \quad u|_{S_2^2} = \varphi(M), \quad M \in S_2^2,$$

Функция Грина:

$$G_2^{(0,2)}(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{1}{r} + \ln \frac{1}{r_1} + \ln \frac{1}{r_2} + \ln \frac{1}{r_{12}} - \ln \frac{R}{\rho \tilde{r}} - \ln \frac{R}{\rho \tilde{r}_1} - \ln \frac{R}{\rho \tilde{r}_2} - \ln \frac{R}{\rho \tilde{r}_{12}} \right);$$

Решение:

$$\begin{aligned}
u(M_0) = & - \frac{1}{\pi} \int_0^R \nu_1(y) \left(\ln \frac{1}{r_{(1)}} + \ln \frac{1}{r_{20}} - \ln \frac{R}{\rho \tilde{r}_{(1)}} - \ln \frac{R}{\rho \tilde{r}_{20}} \right) dy \\
& - \frac{1}{\pi} \int_0^R \nu_2(x) \left(\ln \frac{1}{r_{(2)}} + \ln \frac{1}{r_{10}} - \ln \frac{R}{\rho \tilde{r}_{(2)}} - \ln \frac{R}{\rho \tilde{r}_{10}} \right) dx \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_{S_2^2} \varphi(M) \frac{R^2 - \rho^2}{R} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_{12}^2} \right) ds.
\end{aligned}$$

5. Единственность решения поставленных задач.

Теорема. Каждая из задач имеет не более одного решения.

Доказательство теоремы непосредственно следует из принципа экстремума для эллиптических уравнений.

Заключение

В данной статье исследованы краевые задачи уравнения Лапласа в круге, полукруге и четверти круга, задачи Дирехле и Хольмгрена и сделан вывод, что единственность решения обусловлена принципом экстремума. Видно,

что метод функции Грина является одним из наиболее эффективных методов определения трендов эллиптического типа.

Литература

- [1] Karimov E.T. On a boundary problem with Neumann's condition for 3D singular elliptic equations//Appl. Math. Lett., 2010, No.23. P.517-522.
- [2] Karimov E.T., Nieto J.J. The Dirichlet problem for a 3D elliptic equation with two singular coefficients//Computers and Mathematics with Applications, 2011, No.62. P. 214 - 224.
- [3] Nieto J.J., Karimov E.T. On an analogue of the Holmdreen's problem for 3D singular elliptic equation//Asian-European J. of Math., 2012, v.5, No.2. P. 1 - 18.
- [4] Каримов Э.Т. Краевая задача для трехмерного эллиптического уравнения с сингулярными коэффициентами. Узбекский математический журнал, 2, 2012, 56-66.
- [5] Мавлявиев Р.М. Решение основных краевых задач для одного В-эллиптического уравнения методом потенциалов. Известия ВУЗов. Математика. 2002, 9 (484), с. 64 - 66.
- [6] Эргашев Т.Г. Задача Холмгрена для многомерного эллиптического уравнения с одним сингулярным коэффициентом//Бюллетень Института математики. Ташкент, 2019. № 2. С. 23 - 32.
- [7] Ergashev T.G. Generalized Holmgren Problem for an Elliptic Equation with Several Singular Coefficients//Differential Equations. 2020. V. 56, No. 7. pp. 842 - 856.
- [8] Ergashev T.G. The Dirichlet problem for with several singular coefficients. Electronic Journal of Analysis and Applied Mathematics, 2018, № 1, p.81 - 99.
- [9] Ergashev T. G., Hasanov A. Holmgren problem for elliptic equation with singular coefficients. Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki. 2020, № 32:3, P.159 - 175.
- [10] Сабитов К.Б. Уравнения математической физики. Москва, Физматлит, 2013. 352 с.