

XOS SON VA XOS VEKTORLARNI TOPISHNING NO'ANANAVIY USULLARI

Xo'jamqulov Bekzod Turdalievich, Abduraimov Yo'lchi Norbo'ta og'li

Termiz davlat universiteti, o'qituvchilari

E-mail; xojamqulovb@mail.ru; **Tel;** +998909848794.

yolchiabduraimov@gmail.com; **Tel;** 998997504596

Annotatsiya. Ushbu ishda xos son va xos vektorlarni hisoblash bilan o'zaro ortogonal bo'lgan vektorlar sistemasi ketma – ket quriladi. Aniq yoki to'g'ri metoddan foydalanilib xarakteristik ko'phadning koeffisientlari topiladi. Xos vektorning komponentlari xos sonlar orqali aniq formulalar yordamida ifodalaniladi.

Kalit so'zlar: Vektor fazo, Matritsa, Vektor, Ko'phadlar.

НЕОБИЧНЫЕ МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ

Аннотация. В данной работе система взаимно ортогональных векторов сделано последовательно путем вычисления собственных значений и собственных векторов. Используется точный или правильный метод и в этом методе также точно находятся коэффициенты характеристического многочлена. Компоненты собственного вектора выражаются специальными формулами с использованием собственных значений.

Ключевые слова; Векторное пространство, матрица, вектор, многочлено.

UNCONVENTIONAL METHODS FOR FINDING EIGENVALUES AND EIGENVECTORS

Abstract. In this work, a system of mutually orthogonal vectors is made sequentially by calculating the eigenvalues and eigenvectors. The exact or correct method is used and in this method the coefficients of the characteristic polynomial are also found exactly. Eigenvector components are expressed by special formulas using eigenvalues.

Keywords; Vector space, matrix, vector, polynomial.

KIRISH

Hozirgi zamon hisoblash matematikasi jadal rivojlanib bormoqda. Hisoblash matematikasini qamrab olgan masalalar juda ko'p. Tabiiyki, bu masalalarni yechish ham xilma – xildir. Hisolash matematikasida uchraydigan ko'p masalalarni

$$y = Ax \quad (1)$$

shaklda yozish mumkin, bu yerda x va y berilgan W va V funksional fazolarning elementlari bo'lib, A - operator yoki xususiy holda funksionaldir. Matritsaning xos sonlari va xos vektorlarini topish muammosi fizika, mexanika va astronomiyaning ko'plab amaliy muammolarini hal qilishda zarur bo'ladi. Bunda $Ax = \lambda x$ ko'rinishdagi tenglamalarning notrivial yechimni aniqlashda kerak bo'ladi va bunday yechim mavjud bo'lgan λ son ko'phadning xos sonlari [1]. Ushbu maqola chiziqli operatorlarning xos soni va xos vektorlarini topishning turli metodlardan foydalanilgan holda topishga bag'ishlangan. Unda turli metodlar ya'ni Kirilov metodi, Lantsosh metodi, Faddeev metodi va noaniq koeffizitsiyentli metodlar keltirilgan.

Ushbu maqolaning asosiy mazmuni chiziqli operatorlarning xos soni va xos vektorlarini topishning turli metodlar ko'plab tasdiqlarni isbotlashni osonlashtiradi. Keling, turli mualliflar tomonidan yaqinda olingan bir nechta natijalarni yagona usul bilan isbotlaylik. Maqolada keltirilgan natijalarning aksariyati matritsaning xos soni va xos vektorlarini topishning taniqli metodlarining to'g'ridan-to'g'ri o'xshashlari bo'lib, ularning ba'zilar so'nggi paytlarda ushbu mavzuga bag'ishlangan ko'plab maqolalarda isbotlangan [2].

TADQIQOT MATERIALLARI VA METODOLOGIYASI

Faraz qilaylik V va W lar mos ravishda n va m o'lchovli ixtiyoriy chiziqli fazo bo'lsin. Biror A akslantirish V fazoni W fazoga akslantirsa; ya'ni A akslantirish V fazoning har bir x elementiga W fazoning biror y elementni mos keltirsin. Shunday qilib, A akslantirish V fazoni W fazoga akslantiradi. Biz buni

$y = A(x)$ yoki $y = Ax$ deb belgilaymiz va bu A akslantirishni operator deb ataymiz ya'ni $A: V \rightarrow W$ deb yozamiz.

1-ta'rif. Agar V ni W ga akslantiruvchi A operator, $x_1, x_2 \in V$ elementlar va ixtiyoriy λ son uchun:

$$1) A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2;$$

$$2) A(\lambda x) = \lambda Ax$$

shartlar bajarilsa, u holda A operator **chiziqli operator** deb ataladi.

1 – *eslatma*: Agar W fazo V fazo bilan mos tushsa (ya'ni A operator V ni V ga akslantirsa), u holda bunday A operator **chiziqli almashtirish** deb ataladi.

2 – *eslatma*: Agar A operator ixtiyoriy V fazoni haqiqiy sonlar fazosi W ga akslantirsa, u holda bunday chiziqli operator **chiziqli funksional** deyiladi. [2]

Xos vektor chiziqli algebradagi tushuncha bo'lib, kvadrat matritsa uchun vektor sifatida belgilanadi, matritsani x vektorga ko'paytirish natijasida bir xil vektor matritsaning xos son deb ataladigan shunday skalyar songa ko'paytiriladi.

Shunday qilib, A matritsaning xos vektori shunday nolga teng bo'lmagan x vektor bo'lib, shunday λ son uchun

$$Ax = \lambda x \quad (2)$$

bajariladi

O'z navbatida, A matritsasining xos qiymati λ soni bo'lib, uning uchun xos vektor x mavjud, ya'ni (2) tenglik mavjud. [3]

1 - teorema. n o'chovli R_n fazodagi ixtiyoriy A chiziqli operatorning xos vektori mavjud.

Agar A operatorning matritsasi

$$A(e) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

dan iborat bo'lsa, u holda

$$D(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

tenglama λ ga nisbatan A operatorning xarakteristik tenglamasi deb ataladi. (3)

$$\det(A - \lambda E) = (-1)^n (\lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} - p_2 \lambda^{n-2} - \dots - p_n) \quad (4)$$

n -darajali ko'phad bo'lib, u A operatorning *xarakteristik ko'phadi* deyiladi. Ayrim hollarda (4) ko'phad o'rnida A operatorning *xos ko'phadi* deb ham ataladi.

$$P(\lambda) = \lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} - p_2 \lambda^{n-2} - \dots - p_n \quad (5)$$

Bu yerda A operatorni matritsa deb olsak. Matritsaning xos sonlari uning xos ko'phadlari ildizlari bo'ladi. (5) ko'phad n -darajali bo'lgani uchun n ta ildizga ega. [3]

TADQIQOT NATIJALARI VA XULOSASI

Bizga $\det(A - \lambda E) \bar{x} = \bar{0}$ tenglama berilgan bo'lsin. Algebradan ma'lumki, umumiy holda, $p(\lambda)$ ning p_i koeffitsienti A matritsaning $(-1)^{i-1}$ ishora bilan olingan i - tartibli bosh minorlari yig'indisiga teng.

Viyet teoremasidan foydalanib, quyidagi tengliklarni yozishimiz mumkin:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = p_1,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n = (-1)^{n-1} p_n.$$

Endi biz matritsalar nazariyasidagi yana bir muhim metodni taqdim etamiz, u A matritsaga (butunlay boshqa g'oyalar va usullardan foydalangan holda) to'liq umumlashtiriladi.

2-ta’rif. Ixtiyoriy $A \in M_n(C)$ matritsaning bosh dioganallar yig‘indisiga A matritsaning **izi** deb ataladi.

Bu ta'rifga ko'ra A matritsaning izi quyidagicha belgilanadi.

$$a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \text{Tr}(A),$$

endi biz bu tenglikdan foydalanim quyidagi ko'phadni hosil qilamiz.

$$\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - \text{Tr}(A)\lambda + (\det A)E_2 = 0 \quad (6)$$

3-ta'rif. (6) xarakteristik ko'phadning λ_1, λ_2 kompleks ildizlari $A \in M_2(C)$ matritsaning **xos sonlari** deb ataladi.

Bu yerda

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \text{Tr}(A), \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det(A).$$

2-teorema. (Gamilton – Keli) Ixtiyoriy $A \in M_2(C)$ tenglik o'rinli

$$A^2 - \text{Tr}(A)A + \det(A)E_2 = O_2$$

Shunday qilib, matritsaning barcha xos sonlar yig'indisi uning iziga teng bo'lib, ularning ko'paytmasi shu matritsaning determinantiga teng.

Xos sonlar va vektorlarni topish uchun iteratsiya usuli.

Xos sonlar va xos vektorlarning qisman muammosini hal qilish uchun ko'pincha takrorlash usuli (darajali metod) amaliy hisob-kitoblarda qo'llaniladi [5]. Unga asoslanib A matritsasining taxminiy xos sonlarini aniqlash mumkin.

Iteratsiya usuli algoritmi quyidagi bosqichlardan iborat:

1. $X^{1(0)}$ xos vektorining ixtiyoriy boshlang'ich yaqinlashuvini tanlab (u holda qavs ichidagi indeks yaqinlashish sonini bildiradi, qavssiz indeks esa xos son yoki vektor soniga mos keladi);

2. $k=0$ ni qaraymiz.

$$X^{1(1)} = AX^{1(0)} \quad (7)$$

$$\lambda_1^{(1)} = \frac{X_i^{1(1)}}{X_i^{1(0)}} \quad (8)$$

(7) xos vektorlar va (8) birinchi yaqinlashishlarining qiymatlarnin topamiz. Bu yerda i - oraliqda $1 \leq i \leq n$;

3. Endi quydagi ko'phadni

$$X^{1(k+1)} = AX^{1(k)}, \quad (9)$$

hisoblaymiz

4. Keyingi yaqinlashuvchidan xos son topiladi:

$$\lambda_1^{(k+1)} = \frac{X_i^{l(k+1)}}{X_i^{l(k)}}, \quad (10)$$

bu yerda $X^{l(k+1)}$ va $X^{l(k)}$ vektorlarning mos keladigan koordinatalari $X_i^{l(k+1)}, X_i^{l(k)}$. Bunda i sonli ixtiyoriy koordinatadan foydalanish mumkin, $1 \leq i \leq n$;

5. Agar jarayonni yakunlab, topilgan λ_1 ni $\Delta = |\lambda_1^{(k+1)} - \lambda_1^{(k)}| \leq \varepsilon$, tengsizlik qo'ysak

$$\lambda_1 \cong \lambda_1^{(k+1)}. \quad (11)$$

(11) ga ega bo'lamiz.

Agar $\Delta > \varepsilon$, musbat $k = k + 1$ va 3-qadamga o'tamiz.

$\lambda_1^{(k+1)}$ uchun algoritmnining 4-qadamdagi shakl o'rniga turli koordinatalar uchun mos nisbatlarning o'rtacha arifmetik qiymatini olish mumkin. [5]

λ_1 dan foydalanib, (12) formula yordamida λ_2 ning keyingi qiymatini aniqlashimiz mumkin.

$$\lambda_2 = \frac{X_i^{l(k+1)} - \lambda_1 X_i^{l(k)}}{X_i^{l(k)} - \lambda_1 X_i^{l(k-1)}} \quad (12)$$

Faddeev metodi.

D. K. Faddeev Leveri metodini shunday takomillashtirdiki, natijada, berilgan A matritsaning xos ko'phadini topish bilan birgalikda teskari bo'lgan A^{-1} matritsani hamda A matritsaning xos vektorlarini ham topish mumkin.

$$A_1 = A, \text{tr} A_1 = q_1, B_1 = A_1 - q_1 E,$$

$$A_1 = AB_1, \frac{\text{tr} A_2}{2} = q_2, B_2 = A_2 - q_2 E,$$

.....

$$A_{n-1} = AB_{n-2}, \frac{\text{tr} A_{n-1}}{n-1} = q_{n-1}, B_{n-1} = A_{n-1} - q_{n-1} E,$$

$$A_n = AB_{n-1}, \frac{\text{tr} A_n}{n} = q_n, B_n = A_n - q_n E.$$

(13)

(13) dan quyidagilar kelib chiqadi.

$$1. \quad q_1 = p_1, q_2 = p_2, \dots, q_n = p_n;$$

2. B_n nol matritsa;
3. Agar A xosmas matritsa bo'lsa, u holda

$$A^{-1} = \frac{B_{n-1}}{p_n}.$$

1-misol. Quyidagi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Matritsaning xos ko'phadini va teskari matrisasi A^{-1} ni topamiz.

Yechish. (13) formulaga ko'ra

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad p_1 = \text{Tr}(A_1) = 3, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} - \text{Tr}(A_1)E_3 = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = AB_1 = \begin{bmatrix} 11 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & 11 \end{bmatrix}, \quad p_2 = \frac{\text{Tr}(A_2)}{2} = 14, \quad B_2 = A_2 - \frac{\text{Tr}(A_2)}{2}E_3 = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 4 & -8 & 4 \\ 1 & 4 & -3 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = AB_2 = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

Demak, $p_3 = \frac{\text{Tr}(A_3)}{3} = 8$ bo'lib,

$$P_3(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 14\lambda - 8$$

va

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{8} \end{bmatrix}.$$

Foydalanilgan adabiyotlar.

1. M.I.Isroilov. Hisoblash metodlari. Darslik. TOSHKENT – “O‘zbekiston” – 2003. – 440 bet.
2. Sh.A.Ayupov, B.A.Omirov, A.X.Xudoyberdiyev. Chiziqli Algebra. Darslik /[Matn] “MUHR PRESS” nashriyoti. Toshkent, 2023, – 392 bet
3. G.G‘ayipnazarov, O.Gaimnazarov. Algebra va sonlar nazariyasidan misol va masalalar yechish, TOSHKENT – 2015.
4. Titu Adreescu, Essential linear algebra with applications A Problem – Solving Approach Springer is part of Springer Science+Business New York 2014 Media (www.birkhauser-science.com)
5. Бахвалов Н.С. Численные методы, т. I, М., «Наука», 1973,
6. Бахвалов Н.С. Об оптимальных оценках скорости сходимости квадратурных процессов и методов интегрирования типа Монте -Карло на классных функций, Сб. «Численные методы решения дифф. интегральных уравнений и квадратурные формулы». М., «Наука», 1964 (5—6 3-бетлар).
7. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений, т. 1., изд.3-е. М., «Наука», 1966.
8. Бусленко Н.П. и др. Методы статистических испытаний (метод Монте — Карло). М., Физматгиз, 1962.
9. Варга Р. Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе. М., «Мир», 1974.
10. Воеводин В.В. Численные методы алгебры. Теория и алгоритмы. М., «Наука», 1966.