

Ibragimov.R. NamDU

professori

Mashrabboyev.A. NamDU professori

Abduxolisova.F. NamDU

magistranti

Gmail: fabduxolisova@gmail.com

Tel:+998884661031

BARCHA DAVRDAGI GALTON -VATSON JARAYONI YIG'INDISI HAQIDAGI TEOREMA

Annotatsiya : Galton-Vatson tarmoqlanish jarayoni uchun n vaqtgacha bo'lgan zarrachalarning umumiy sonining yig'indisi. Ushbu maqolada tarmoqlanish jarayonlari uchun zarrachalarning umumiy soni yig'indilari uchun chegaraviy teoremlar ko'rib chiqiladi.

Kalit so'zlar: Galton-Vatson jarayoni yig'indisi, Markov zanjiri, hosil qiluvchi funksiya, tasodifiy miqdor, taqsimot funksiya.

Ибрагимов.Р. НамГУ профессор

Машраббоев.А. НамГУ профессор

Абдухолисова .Ф. НамГУ

магистрант

ТЕОРЕМА О СУММЕ ПРОЦЕССА ГАЛЬТОНА-ВАТСОНА ВО ВСЕХ ПЕРИОДАХ

Аннотация: Сумма обобщенное число частиц до момента времени n для ветвящегося процесса Гальтона-Ватсона. В работе рассматривается предельная теорема для суммарного числа частиц для ветвящегося процесса.

Ключевые слова: Сумма процесса Гальтона-Ватсона, марковского ветвящегося процесса, производящая функция, случайная величина, функция распределения.

Ibragimov.R. NamSU professor

Mashrabboyev.A. NamSU professor

Abduxolisova.F. Master of NamSU

THEOREM ABOUT THE SUM OF THE GALTON-WATSON PROCESSES IN ALL PERIODS

Abstract: Sum of the total number of particles up to time n for branching Galton-Watson processes. This article considers limit theorems for sums of the total number of particles for branching processes.

Key words: The sum of Galton-Watson process, Markov branching chain, the generating function, the random variable, the distribution function

Bog'liq ketma-ketligini ayrim sodda holi hisoblangan Galton-Watson deb ataluvchi modelni qaraymiz.

Umumiy holda tajribalar ketma ketligi chekli yoki sanoqli $\{E_1, E_2, \dots, E_n, \dots\}$ to'plamdan iborat bo'lgan S ni ko'raylik. Tajriba ketma- ket o'tkazish natijasida E_n ni ro'y berishini ehtimolligi oldingi $n-1$ inchi tajribada qanday hodisa ro'y berganiga bog'liq. Agar E_n hodisani ro'y berish ehtimolligi faqat $n-1$ tajriba natijasiga bog'liq bo'lib oldingi $n-2, n-3, \dots$ tajribalar natijasiga bog'liq bo'lmasa u holda bunday tajribalar ketma- ketligiga Markov zanjiri deyiladi.

Markov zanjirini boshqacha talqin qilish ham mumkin. Agar n -tajribada E_j hodisa ro'y bersa, $x_n = j$ deb belgilasak, u holda shartli ehtimollik

$$P(x_n = j / x_0 = k_0, x_1 = k_1, \dots, x_{n-1} = i) = P(x_n = j / x_{n-1} = i) = P_{i,j}(n)$$

bajarilsa $\{x_n\}_1^\infty$ ketma ketlik Markov zanjirini tashkil qiladi deyiladi.

Demak tajribalar ketma ketlikda boshlang'ich taqsimot berilgan va sistema n vaqtdagi holati oldingi vaqtdagi holatlarni ehtimolligini (xususiyati) saqlagan holda va ularga bog'liq bo'lmasdan faqat $n-1$ nchi holatga bog'liq bo'lishi kerak ekan.

Tabiatda bunday jarayonlar juda ko'p uchraydi, masalan fizikada, kimyoda, genetikada, demografik jarayonda, biologiyada, meditsinada va hokazo.

Jarayonlardan Galton-Vatson jarayoni bunga yaxshi misol bo'la oladi.

Faraz qilaylik μ_{n+1} tasodifiy miqdor μ_1 dona $\mu_{1,n+1}^{(j)}$, $j=\overline{1, \mu_1}$ tasodifiy miqdorlar yig'indisidan iborat bo'lib $\mu_{1,n+1}^{(j)}$ j ga nisbatan bog'liqsiz va μ_{n+1} bilan bir xil taqsimlangan bo'lsin, ya'ni

$$\mu_{n+1} = \begin{cases} \mu_{1,n+1}^{(1)} + \mu_{1,n+1}^{(2)} + \dots + \mu_{1,n+1}^{(\mu_1)}, & \mu_1 > 0 \\ 0, & \mu_1 = 0 \end{cases}$$

yoki

$$\mu_{n+1} = \sum_{j=1}^{\mu_1} \mu_{1,n+1}^{(j)},$$

yoki

$$\mu_{n+1} = \sum_{j=1}^{\mu_1} \mu_n^{(j)},$$

bu yerda $\mu_n^{(j)}$ lar bog'liqsiz μ_n bilan bir xil taqsimlangan [5].

Agar $f_1(s)$ bilan $MS^{\mu_1}, (s \in [0,1])$ μ_1 ni hosil qiluvchi funksiyasini belgilasak, yuqoridagilarni hisobga olgan holda μ_n ni hosil qiluvchi funksiyasi

$$f_n(s) = f_1(f_1 \dots f_1(s)) \dots \overset{\text{red}}{\underbrace{f_1}} = f_k(f_{n-k}(s)) = f_{n-k}(f_k(s)) \quad n-1$$

ga teng bo'ladi, $f_0(s) = s, f_n(s) = MS^{\mu_n}$,

μ_n n - davrdagi zarrachalar soni.

Ma'lumki agar

$$\mu_0 + \mu_1 + \dots + \mu_n + \dots = \mu \quad (1)$$

bilan barcha davrdagi zarrachalar sonini belgilasak, u holda (1) ni hosil qiluvchi funksiyasi $MS^\mu = F(S), F(1) = 1$ yoki $F(1) < 1$ bo'ladi, ya'ni μ chekli yoki cheksiz bo'lishi mumkin. Xususan agar $F_n(S)$ bilan $\mu_0 + \mu_1 + \dots + \mu_n$ ni hosil qiluvchi funksiyasini belgilasak, u holda

$$F_{n+1}(S) = Sf(F_n(S)) \quad (2)$$

ligi ko'rsatilgan, bu yerda $f(s) = f_1(s)$, natijada (1) ning hosil qiluvchi funksiyasi $n \rightarrow +\infty$ da $F(S) = Sf(F(S))$ bo'ladi (Xokins, Ulam, Gud, Otter, Xarris [2]).

(1) Va (2) yordamida μ ning holatlarini o'rganish muhimdir.

(1) uchun muhim natijalar hisoblangan Duoss, O, V, Viskov, Boyd [3] kabilarni ishlarini keltirish mumkin [2]:

$$P\{\mu_0 + \mu_1 + \dots + \mu_n + \dots = J / \mu_0 = i\} = i j^{-1} p(\xi_j) \quad (3)$$

bu yerda ξ_i lar bog'liqsiz va μ_1 bilan bir xil taqsimlangan. Bu teorema kritikkacha va kritik hol uchun juda muhimdir, kritikdan keyingi holda j cheksizlikka ketadi.

Ma'lumki (3) da μ ni o'rganish $\mu_1^{(1)} + \xi_1 + \mu_1^{(2)} + \dots + \xi_1 + \mu_1^{(j)}$ ni o'rganishga olib keladi, bu yerda $\mu_1^{(k)}, k = \overline{1, j}$ lar bog'liqsiz va μ_1 bilan bir xil taqsimlangan. Bu o'z navbatida bog'liq bo'lmagan va panjarasimon bir xil taqsimlangan $x_1, x_2, \dots, x_n$ tasodifiy miqdorlar yig'indisini o'rganishga olib keladi.

Ma'lumki $S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ ham panjarasimon taqsimlangan bo'ladi va $P_n(k) = P(S_n = na + kh)$ ehtimollik o'rganilgan, bu yerda h maksimal qadam, a haqiqiy son.

$$\text{Agar } Z_{n,k} = \frac{an + kh - A_n}{B_n}, A_n = MS_n, B_n^2 = DS_n$$

belgilar kiritsak u holda $0 < DX_I < +\infty$ va $n \rightarrow \infty$ da

$$\frac{B_n}{h} P_n(k) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Z_{n,k}^2}{2}} \rightarrow 0 \quad (4)$$

munosabat k ga nisbatan tekis bajariladi [4]

1-Teorema. Agar μ_1 maksimal qadamli Puasson qonuni bo'yicha taqsimlangan tarmoqlanish jarayoni bo'lsa, u holda $M\mu_1 \leq 1, D\mu_1 < +\infty$ shartda

$P(\mu_1^{(2)} + \dots + \mu_1^{(j)} = aj + kh)$ uchun (4) ga ekvivalent teorema

keltirish mumkin, bu teoremani isboti (4) day, [4] bajariladi.

Agar μ_1 tarmoqlanish jarayoni taqsimot funksiyaga ega bo'lsa va

$M\mu_1 \leq 1, D\mu_1 < +\infty$ shartda

$$\frac{\mu_1^{(1)} + \mu_1^{(2)} + \dots + \mu_1^{(j)} - JM\mu_1}{\sqrt{jD\mu_1}}$$

munosabat $P_j(x)$ zichlik funksiyaga ega bo'lsa u holda $j \rightarrow \infty$ da

$$P_j(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \rightarrow 0 \quad (5)$$

o'rinli bo'lishi uchun $P_{n_0}(x) < \infty$ qanoatlantiruvchi n_0 mavjud bo'lishi zarur va yetarlidir, bu yerda $\mu_1^{(k)}, k = \overline{1, j}$ bog'liqsiz va bir xil taqsimlangan, μ_1 kabi taqsimotga ega.

(5) ni isboti (4) dagi kabi bajariladi.

Navbatda μ_1 kritikdan keyingi jarayon deb faraz qilinsa (3) dagi ξ_i lar ham kritikdan keyingi jarayon bo'ladi. Natijada bir ehtimollik bilan

$$\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{\bar{\mu}_n} = \bar{\mu}_n - i$$

ekvivalentlik bajariladi, bu yerda

$$\bar{\mu}_n = \mu_0 + \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n.$$

Bu esa (3) dan bir ehtimollik bilan

$$P(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{\bar{\mu}_n} = \bar{\mu}_n - i) \quad (6)$$

ligini taminlaydi.

Demak $n \rightarrow \infty$ da

$$S_{\bar{\mu}_n} = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{\bar{\mu}_n}$$

yig'indini o'rganishga olib keladi.

Bu yig'indida $\bar{\mu}_n$ jarayon tarmoqlanish jarayonini modifikatsiyasini tashkil qiladi.

(6) da ikkinchi momentlar mavjud bo'lganda

$$\mathfrak{L}_x P\left(\frac{S_{\bar{\mu}_n}}{\sqrt{D\bar{\mu}_n}} < x\right) = \int_0^{+\infty} \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{z}}\right) dG(x) \quad (7)$$

ekanligi ko'rsatilgan, bu yerda $n \rightarrow \infty$ da

$$G_n(x) = P\left\{\frac{\bar{\mu}_n}{M\bar{\mu}_n} < x/W > 0\right\}, \quad W_n = \frac{\bar{\mu}_n}{M\bar{\mu}_n} \rightarrow W,$$

ya'ni $G_n(x) \rightarrow G(x)$ taqsimot absolyut uzluksiz, $G(x) = P(W < x/W > 0)$,

$\Phi(\cdot)$ standart normal, $\mathfrak{L}_x G'(x) \leq A < +\infty$.

Albatta bu tasdiqda $\bar{\mu}_n$ deyarli bog'liqsiz deb faraz qilinishi kerak.

Agar $\frac{S_{\bar{\mu}_n}}{\sqrt{D\bar{\mu}_n}}$ ning zichlik funksiyasini $\varphi_n(x)$ va $\varphi(\cdot)$ bilan standart normal

taqsimotni zichlik funksiyasini belgilasak, u holda quyidagi teorema o'rinli.

2-teorema. $\beta_3 = M|\xi_1|^3 < +\infty, n \rightarrow \infty$

$D\bar{\mu}_1 = b < \mathfrak{L} + \infty, \mathfrak{L}_x G(x) \leq A, D\xi_i = \sigma^2, MW^{-1} < +\infty$ da

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_x \left| \varphi_n(x) - \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{z}} \varphi\left(\frac{x}{\sqrt{z}}\right) dG(z) \right| &\leq c \frac{\beta_3}{\sigma^3} \sqrt{MW_n^{-1}} \mathfrak{L} \mathfrak{L} \mathfrak{L} \\ &+ \max(MW_n^{-1}, MW^{-1}) \mathfrak{L} m^{\frac{-n}{6}} \end{aligned}$$

bajariladi, bu yerda $m = i + M\bar{\mu}_1$, $c - \mathfrak{L}$ absolyut o'zgarmas.

2-teorema isboti [6] dagiday bajariladi.

Kimmel va David E. Axelrodlar misoli uchun hosil qiluvchi funksiya

$f(s) = p_0 + p_1 s + p_2 s^2, p_0 + p_1 + p_2 = 1, p_1 + 2p_2 < 1$ bo'lsin.

Keyingi misol bitta zarracha $p(\xi_i = p_i)$ geometrik qonun bilan taqsimlangan bo'lsin, bu misolni birinchi bor Shreder [2] ko'rgan. Bunda $p(\xi_i = p_i) = b c^{k-1}$, $k=1,2,\dots$, $0 < b, c, b \leq 1-c, p_0 = 1 - p_1 - p_2$ u holda

$f(s) = 1 - b/(1-c) + bs/(1-cs)$ bo'ladi.

Natijada

$$M S^{\mu_n} = 1 - m^n \frac{1-s_0}{m^n - s_0} + \frac{m^n \left(\frac{1-s_0}{m^n - s_0} \right)^2 k}{1 - \left(\frac{m^n - 1}{m^n - s_0} \right) s},$$

$M \xi_1 = m \neq 1, s_0 = \frac{1-b-c}{c(1-c)}$ tugash ehtimolligi.

Bu hol uchun $\bar{\mu}_n$ ning hosil qiluvchi funksiyasi

$$F(s) = s \left(1 - \frac{b}{1-c} + \frac{b F_{n-1}(s)}{1 - c F_{n-1}(s)} \right)$$

tenglamani yechimidan, yoki μ ni hosil qiluvchi funksiyasi

$$F(s) = s \left(1 - \frac{b}{1-c} + \frac{b F(s)}{1 - c F(s)} \right)$$

tenglamani yechimidan iborat bo'ladi.

Har bir ona hujayra mustaqil ravishda p_2 ehtimollik bilan ko'payadi, p_0 ehtimollik bilan o'ladi, p_1 ehtimollik bilan nafaol bo'ladi ($p_0 + p_1 + p_2 = 1$)

Bunday tarmoqlanish jarayoni uchun $F_{n+1}(s) = s f(s)$ dan, bir necha n uchun $F_n(s)$ ni hisoblaymiz.

$$F_0(s)=s, F_1(s)=sf_0(s)=sf(s)=s(p_0+p_1s+p_2s^2)$$

bu yerda bitta hujayra qaraladi.

$$F_2(s)=sf(F_1(s))=s(p_0+p_1F_1(s)+p_2F_1^2(s))=$$

$$s(p_0+p_1(p_0+p_1s+p_2s^2)+p_2(p_0+p_1s+p_2s^2)^2)$$

$$F_3(s)=sf(F_2(s))=s(p_0+p_1F_2(s)+p_2F_2^2(s))$$

.....

$$F_n(s)=sf(F_{n-1}(s))=s(p_0+p_1F_{n-1}(s)+p_2F_{n-1}^2(s))$$

.....

Agar $f(s)=p_2s^2$, $p_2=1$ ya'ni $f(s)=s^2$ bo'lsa

$$F_0(s)=s, \quad F_1(s)=s^2f(s)=s^3, F_2(s)=sf(F_1(s))=s(s^3)=s^4$$

$$F_3(s)=s^5 \quad F_n(s)=s^{n+2} \quad \text{bo'ladi.}$$

Agar $n \rightarrow \infty$ bo'lsa u holda $F_{n+1}(s)=Sf(F_n(s)) \quad F(s)=sf(F(s))$ yoki

$F(s)=s(p_0+p_1F(s)+p_2F^2(s))$, bu tenglamani $F(s)$ ga nisbatan yechsak

$$F_{1,2}(s)=\frac{1-p_1s \pm \sqrt{(1-p_1s)^2-4p_0p_2s^2}}{2sp_2},$$

bundan

$$F(s)=\frac{1-p_1s-\sqrt{(1-p_1s)^2-4p_0p_2s^2}}{2sp_2} \quad (8)$$

yechim bo'ladi.

Yuqoridagilarni hisobga olsak quyidagi teoremani keltirish mumkin.

3-teorema. Agar $f(s)=p_0+p_1s+p_2s^2$, $m=p_1+2p_2<1$ bo'lsa u holda μ bir

ehtimollik bilan chekli bo'ladi va $F(s)=\frac{1-p_1s-\sqrt{(1-p_1s)^2-4p_0p_2s^2}}{2sp_2}$

3-teoremani isbot qilish uchun (8) dan $F(1)=1$ ligini ko'rsatish yetarli, haqiqatdan ham

$$F(1) = \frac{p_0 - p_2 - p_0 p_2}{2 p_2} = 1$$

Xususan $f(s) = p_0 + p_1 s + p_2 s^2$ misolda $p_0 = 0.5, p_1 = 0.2, p_2 = 0.3$ olinsa u holda $m = 0.8$ bo'ladi va demak jarayon kritikacha bo'ladi va μ ni chekli bo'lish imkoniyati katta va boshlang'ich hujayra chekli hol uchun

$$F(s) = \frac{1 - 0.2s - \sqrt{(1 - 0.2s)^2 - 0.6s^2}}{0.6s}, F(1) = 1$$

Bundan $F'(1) = M\mu = 5$

Demak bu holda $\mu = \mu_0 + \mu_1 + \dots + \mu_n + \dots$ o'rtacha 5 ga teng bo'ladi

Xulosa

Ishni asosiy maqsadi barcha davrdagi Galton-Vatson tarmoqlanish jarayoni yig'indisi $\mu_0 + \mu_1 + \dots + \mu_n$ ni o'rganilsa bu o'z navbatida ommaviy xizmat nazariyasi, tiklanish jarayoni, tarmoqlanish jarayonlari uchun zarur bo'lgan

$$\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{v_n}$$

tasodifiy v_n sondagi tasodifiy ξ_i sonlar yig'indisiga olib kelishdan iborat

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Романовский В.И., Дискретные цепи Маркова, М.-Л., Гостехиздат, 1949.
2. Харрис Т., Теория ветвящихся случайных процессов, из., "Мир", М. 1966

3. Ватутин В.А., А.М.Зубков, Итоги науки и техники. Теория вероятностей, математическая статистика, теоретическая кибернетика, том 23, М.1985.

4. Гнеденко Б.В., Курс теории вероятностей (Изд.1-5), М, ''Наука''.1965,1969,... .

5. Marek Kimmel, David E. Axelrod, Branching processes in biology. Springer-New York. 2002.

6. Mogyorodi. J.Studia Sci Math. Hung.8.1973, 29.