

ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ПУТЕЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ДЕЙСТВИЯ ГРУППЫ ГАЛИЛЕЕГО-СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ

Муминов Кобилжон Кодирович¹, Султонова Барно Раззоковна²

¹Профессор Национального университета Узбекистана,
qobiljonmuminov2023@gmail.com

²Докторант Гулистанского государственного университета,
barnosultonova444@gmail.com

Аннотация: В настоящей работе дается необходимые и достаточные условия для $\Gamma Sp(6, R)$ – эквивалентности путей. В настоящей работе дается необходимые и достаточные условия для $\Gamma Sp(6, R)$ – эквивалентности путей. Теорема об эквивалентности путей относительно действия $\Gamma Sp(6, R)$ –Галилеего-симплектической группы доказывается с помощью задачи об эквивалентности путей относительно действия $Sp(6, R)$ –симплектической группы

Ключевые слова: действие группы, путь, эквивалентность путей, Галилея симплектическая группа.

GALILEY-SIMPLEKTIK GRUPPA TASIRIGA NISBATAN YO'LLARNING EKVIVALENTLIGI.

Mo‘minov Kobiljon Kodirovich¹, Sultonova Barno Razzoqovna²

1.O‘zbekiston Milliy universiteti professori,
qobiljonmuminov2023@gmail.com

2.Guliston Davlat universiteti tayanch doktoranti,
barnosultonova444@gmail.com

Annotatsiya: Ushbu maqolada $GSp(6, R)$ – yo‘l ekvivalentligi uchun zarur va yetarli shartlar berilgan. $GSp(6, R)$ -Galiley-simplektik guruppa ta’siriga nisbatan yo‘llarning ekvivalentligi haqidagi teorema $Sp(6, R)$ -simplektika ta’siriga nisbatan yo‘llarning ekvivalentligi masalasi yordamida isbotlangan.

Kalit so‘zlar: guruppa tasiri, yo‘l, ekvivalent yo‘llar, Galiley simplektik guruppa.

EQUIVALENCE OF PATHS WITH RESPECT TO THE ACTION OF THE GALILEO-SYMPLECTIC GROUP

Mo‘minov Kobiljon Kodirovich¹, Sultonova Barno Razzoqovna²

1. Professor of the National University of Uzbekistan , qobiljonmuminov2023@gmail.com

2. Doctoral student of Gulistan State University , barnosultonova444@gmail.com

Abstract: This article presents necessary and sufficient conditions for $GSp(6, R)$ -path equivalence. The theorem on the equivalence of paths with respect to the action of the $GSp(6, R)$ -Galileo-symplectic group is proved using the problem of the equivalence of paths with respect to the action of the $Sp(6, R)$ -symplectic group

Key words: group effect, path, equivalent paths, Galilean symplectic group.

1. Введение

Пусть X – n -мерное линейное пространство над полем действительных чисел R . Через $GL(6, R)$ обозначим группу всех обратимых линейных преобразований пространства X где $6 = \dim X$, и пусть G подгруппа группы $GL(6, R)$. Одной из важных задач дифференциальной геометрии является нахождение легко проверяемых необходимых и достаточных условий , обеспечивающих G –эквивалентность путей, лежащих в X . При решении этой задачи используются методы теории дифференциальных инвариантов, дающие описание образующих дифференциального поля G -инвариантных дифференциальных рациональных функций. Явный вид этих образующих позволяет установить эффективные критерии для G -эквивалентности путей[2,4]. Такой подход был использован при решении задачи об эквивалентности путей относительно действия линейных, ортогональных, псевдоортогональных симплектических и галилеевых групп [1,3]

В настоящей работе дается необходимые и достаточные условия для $GSp(6, R)$ – эквивалентности путей.

2. Предварительные сведения

Пусть $V = R^6$, 6 –мерное действительное линейное пространство. Элементы из V представляем в виде 6 –мерных вектор столбцов $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_6 \end{pmatrix}$ где $x_i \in R, i = 1, \dots, 6$. Обозначим через $GL(6, R)$ группу всех обратимых линейных преобразований V , и элементы из $GL(6, R)$ отождествляем с обратимыми 6×6

матрицами $g = (g_{ij})_{i,j=1}^6$. Обычное умножение матрицы g на вектор столбец $x = (x_i)_{i=1}^6$ рассматривается как левое действие $(g, x) \rightarrow gx$ группы $GL(6, R)$ в пространстве V .

Обозначим через $Sp(6, R) = \{g \in GL(6, R) : gI g^T = g^T I g = I\}$ симплектическую подгруппу в $GL(6, R)$, где g^T транспонированная матрица для матрицы g , и I есть 6×6 матрица следующего вида

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Путем в V называется вектор-функция $x : (0, 1) \rightarrow V$, $x(t) = (x_i)_{i=1}^6$, у которой все координатные отображения $x_i : (0, 1) \rightarrow R$ являются бесконечно дифференцируемыми функциями.

Производной r -го порядка от пути $x(t) = (x_i)_{i=1}^6$, назовем вектор-функцию $x^{(r)}(t) = (x_i^{(r)}(t))_{i=1}^6$, где $x_i^{(r)}(t)$ r -ая производная координатной функции $x_i(t)$, $i = 1, \dots, 6$, $r \in N$. Ясно, что $x_i^{(r)}(t)$ также является путем для всех r .

Пусть G - подгруппа группы $GL(6, R)$. Два пути $x(t)$ и $y(t)$ называются эквивалентными, если существует такой элемент $g \in G$, что $y(t) = gx(t)$ для всех $t \in (0, 1)$.

Рассмотрим множество всех путей в V , т.е. множество всех векторов $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_6(t))$, где $x_i(t)$ есть бесконечно дифференцируемые функции на интервале $(0, 1)$, $i = 1, \dots, 6$.

Для каждого пути $x(t) = (x_i)_{i=1}^6$ через $M(x(t))$ обозначим 6×6 матрицу $(x_i^{(j-1)}(t))_{i=1}^6$, где j -ый столбец имеет координаты $x_i^{(j-1)}(t)$, $x_i^{(0)}(t) = x_i(t)$, $i, j = 1, \dots, 6$. Через $M'(x(t))$ обозначается матрица $(x_i^{(j)}(t))_{i,j=1}^6$. Путь $x(t)$ называется *регулярным*, если определитель матрицы $M(x(t))$ не равен нулю при всех $t \in (0, 1)$. Заметим, что два пути $x(t)$ и $y(t)$ являются эквивалентными в том и только в том случае, когда $M(y(t)) = gM(x(t))$ для некоторого $g \in G$.

Известны следующие необходимые и достаточные условия $Sp(6, R)$ эквивалентности регулярных путей и описываемые с помощью матриц $M(x(t))$ и $M(y(t))$ (см. Лемму 3 из [1]).

Теорема1. Два регулярных пути $x(t)$ и $y(t)$ являются $Sp(6, R)$ -эквивалентными тогда и только тогда, когда выполнены следующие равенства

$$(M(x(t)))^{-1} M'(x(t)) = (M(y(t)))^{-1} M'(y(t))$$

$$M^T(x(t)) I M(x(t)) = M^T(y(t)) \mathfrak{I}(y(t))$$

3. Основные результаты.

Рассмотрим следующий симплектический вариант группы Галилея. Пусть, как и ранее e_i есть канонический базис в R^6 , где $i=2, \dots, 6$. Положим $U_6 = \{\alpha e_1 : \alpha \in R\}$, $V_6 = \sum_2^5 \alpha_i e_i : \alpha_i \in R$ и $W_6 = \{\alpha e_6 : \alpha \in R\}$. Как и при определении группы Галилея рассмотрим подгруппу $\Gamma Sp(6, R)$ в $GL(6, R)$ всех таких $g = (g_{ij})_{i,j=1}^6 \in GL(6, R)$ для которых $g(U_6) = U_6$, $g_{11} = \pm 1$, $g(W_6) = W_6$; $g_{66} = \pm 1$ и сужение g/V_6 на подпространство V_6 есть элемент симплектической группы $Sp(4, R)$. Очевидно, что $U_6 \oplus V_6 \oplus W_6 = R^6$ и $(x, y) = 0$ для всех $x \in U_6$, $y \in V_6$, $(y, z) = 0$ для всех $y \in V_6$, $z \in W_6$.

Рассмотрим в симплектической группе $Sp(6, R)$ следующую подгруппу: $\Gamma Sp(6, R) = \{g \in Sp(6, R) : g(U_6) = U_6, g_{11} = \pm 1, g(W_6) = W_6; g_{66} = \pm 1\}$.

Для каждого элемента $g \in \Gamma Sp(6, R)$ получим $g e_1 = [y_1, 0, 0, 0, 0, 0] \in U_6$, $g e_6 = [0, 0, 0, 0, 0, y_6] \in W_6$, т.е.

$$g_{i6} = (g e_6, e_i) = 0, i = 1, \dots, 5$$

$$g_{1j} = (g e_1, e_j) = 0, j = 2, \dots, 6$$

Поэтому матрица $g \in \Gamma Sp(6, R)$ имеет следующий вид:

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & g_{23} & g_{24} & g_{25} & 0 \\ 0 & g_{32} & g_{33} & g_{34} & g_{35} & 0 \\ 0 & g_{42} & g_{43} & g_{44} & g_{45} & 0 \\ 0 & g_{52} & g_{53} & g_{54} & g_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{66} \end{pmatrix}$$

Взяв в V_6 базис $e_2, \dots, e_5$ и отождествив V_6 с R^4 , получим, что для любого $g \in \Gamma Sp(6, R)$ сужение g/V_6 преобразования g на подпространство V_6 является элементом группы $Sp(4, R)$, при этом, для $h = (h_{ij})_{i,j=2}^5 = g/V_6$ имеем $h_{ij} = (h e_i, e_j) = (g e_i, e_j) = g_{ij}$ для всех $i, j = 2, \dots, 5$. Таким образом, сужение

$$g/V_6 = \begin{pmatrix} g_{22} & g_{23} & g_{24} & g_{25} \\ g_{32} & g_{33} & g_{34} & g_{35} \\ g_{42} & g_{43} & g_{44} & g_{45} \\ g_{52} & g_{53} & g_{54} & g_{55} \end{pmatrix} \in Sp(4, R)$$

Поскольку $\Gamma Sp(6, R)$ есть подгруппа в симплектической группе $Sp(6, R)$ выделяется условием сохранения координат $x_1(t)$ и $x_6(t)$, остальные координаты подвергаются произвольному симплектическому преобразованию на $Sp(4, R)$. Эту подгруппу естественно называть *группой Галилея симплектических линейных преобразований в R^6* .

Следовательно,

$$\Gamma Sp(6, R) = \{g = (g_{ij})_{i,j=1}^6 \in GL(6, R) : g(U_6) = U_6, g_{11} = \pm 1, g(W_6) = W_6; g_{66} = \pm 1, (g_{ij})_{i,j=2}^5 \in Sp(4, R)\}.$$

Путь $x(t) = [x_i(t)]_{i=1}^6 \in R^6, t \in (0, 1)$ назовем $\Gamma Sp(6, R)$ -регулярным, если $\det M_4(x(t)) \neq 0$ всех $t \in (0, 1)$ где $M_4(x(t)) = [x_i^{(j)}(t)]_{j=0, \dots, 3, i=2, \dots, 5}$

$$x_i^{(0)}(t) = x_i(t), i = 2, \dots, 5.$$

Следующая теорема дает критерий для $\Gamma Sp(6, R)$ -эквивалентности $\Gamma Sp(6, R)$ -регулярных путей в пространстве R^6 .

Теорема 2. $\Gamma Sp(6, R)$ -регулярные пути $x(t)$ и $y(t)$ $\Gamma Sp(6, R)$ -эквивалентны тогда и только тогда, когда выполнены следующие равенства (для всех $t \in (0, 1)$):

$$y_1(t) = \pm x_1(t) \quad (1.1)$$

$$y_6(t) = \pm x_6(t) \quad (1.2)$$

$$M_4^{-1}(x(t)) M_4^{-1}(x(t)) = M_4^{-1}(y(t)) M_4^{-1}(y(t)) \quad (1.3)$$

$$M_4^T(x(t)) I M_4(x(t)) = M_4^T(y(t)) \mathfrak{I}_4(y(t)). \quad (1.4)$$

Доказательство. Пусть пути $x(t)$ и $y(t)$ являются $\Gamma Sp(6, R)$ -эквивалентными, т.е. существует такое $g = (g_{ij})_{i,j=1}^6 \in \Gamma Sp(6, R)$ что $y(t) = gx(t)$ для всех $t \in (0, 1)$. Так как $g_{66} = \pm 1, g_{i2n} = 0$ для всех $i = 1, \dots, 5, g_{11} = \pm 1, g_{j1} = 0$ для всех $j = 2, \dots, 6$ и $g(U_6) = U_6, g(W_6) = W_6$, то

$$\begin{aligned} g[0, 0, 0, 0, 0, x_6(t)] &= [0, 0, 0, 0, 0, \pm x_6(t)] \\ g[x_1(t), 0, 0, 0, 0, 0] &= [\pm x_1(t), 0, 0, 0, 0, 0], \\ g[0, x_2(t), x_3(t), x_4(t), x_5(t), 0] &= [0, z_2(t), z_3(t), z_4(t), z_5(t), 0]. \end{aligned}$$

Поэтому верно тождество

$$\begin{aligned} y(t) &= (y_1(t), y_2(t), y_3(t), y_4(t), y_5(t), y_6(t)) = g(x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t), x_5(t), x_6(t)) = \\ &= \dot{g}(x_1(t), 0, 0, 0, 0, 0) + g(0, x_2(t), x_3(t), x_4(t), x_5(t), 0) + g(0, 0, 0, 0, 0, x_6(t)) = \dot{g} \\ &= \dot{g}(\pm x_1(t), 0, 0, 0, 0, 0) + (0, z_2(t), z_3(t), z_4(t), z_5(t), 0) + (0, 0, 0, 0, 0, \pm x_6(t)) = \\ &= \dot{g}(\pm x_1(t), z_2(t), z_3(t), z_4(t), z_5(t), \pm x_6(t)) \end{aligned}$$

Это означает, что $y_1(t) = \pm x_1(t)$ и $y_6(t) = \pm x_6(t)$ для всех $t \in (0, 1)$ и $(y_2(t), y_3(t), y_4(t), y_5(t)) = h(x_2(t), x_3(t), x_4(t), x_5(t))$, где

$$h = (g_{ij})_{i,j=2}^5 \in Sp(4, R).$$

Используя теперь теорему 1, получим справедливость следующих равенств

(для всех $t \in (0, 1)$) $\dot{g}$:

$$\begin{aligned} M_4^{-1}(x(t)) M_4^{-1}(x(t)) &= M_4^{-1}(y(t)) M_4^{-1}(y(t)) \\ M_4^T(x(t)) I M_4(x(t)) &= M_4^T(y(t)) \mathfrak{I}_4(y(t)) \end{aligned}$$

Пусть теперь выполнены (1.1)- (1.4). Из теорем 6 и равенств (1.3), (1.4) вытекает существование такого симплектического преобразования [5]

$$h = \begin{pmatrix} g_{22} & g_{23} & g_{24} & g_{25} \\ g_{32} & g_{33} & g_{34} & g_{35} \\ g_{42} & g_{43} & g_{44} & g_{45} \\ g_{52} & g_{53} & g_{54} & g_{55} \end{pmatrix} \in Sp(4, R)$$

для которого $(y_2(t), y_3(t), y_4(t), y_5(t)) = h(x_2(t), x_3(t), x_4(t), x_5(t))$, причем $g \in \Gamma Sp(6, R)$, если

$$g = (g_{ij})_{i,j=1}^6 = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & g_{23} & g_{24} & g_{25} & 0 \\ 0 & g_{32} & g_{33} & g_{34} & g_{35} & 0 \\ 0 & g_{42} & g_{43} & g_{44} & g_{45} & 0 \\ 0 & g_{52} & g_{53} & g_{54} & g_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

При этом

$$\begin{aligned} g((x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t), x_5(t), x_6(t))) &= \sum_{i=1}^6 g_{ij} \{x_j(t)\}_{i=1}^6 = \dot{g} \\ &= \dot{g}(\pm x_1(t), y_2(t), y_3(t), y_4(t), y_5(t), \pm x_6(t)) \end{aligned}$$

Согласно равенств (1.1), (1.2) получим, что Если $y_1(t)=-x_1(t)$ и $y_6(t)=-x_6(t)$, то берем $g_{11}=-1$ и $g_{66}=-1$ соответственно ; если же $y_1(t)=x_1(t)$, и $y_6(t)=x_6(t)$, то полагаем $g_{11}=1$ и $g_{66}=1$.

В обоих случаях получим, что $g \in \Gamma Sp(6, R)$ и $y(t)=gx(t)$ для всех $t \in (0,1)$.

Заклучения

В настоящей работе дается необходимые и достаточные условия для $\Gamma Sp(6, R)$ – эквивалентности путей. Теорема об эквивалентности путей относительно действия $\Gamma Sp(6, R)$ –Галилеего-симплектической группы доказывается с помощью задачи об эквивалентности путей относительно действия $Sp(6, R)$ –симплектической группы.

Список использованной Литературы

1. Муминов К.К. Эквивалентность путей относительно действия симплектической группы. Известия ВУЗов. Математика, 2002, № 7, 27-38.
2. Хаджиев Дж. Приложение теории инвариантов к дифференциальной геометрии кривых. Ташкент. ФАН, 1988.
3. Муминов К.К., Чилин В.И. Эквивалентность путей в геометрии Галилея. Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. Том 144 (2018). С. 3-16.
4. Арипов Р.Г., Хаджиев Дж. Полная система глобальных дифференциальных и интегральных инвариантов кривой в евклидовой геометрии. Известия ВУЗов. Математика. 2007. No 7, С. 3-15.
5. Муминов К.К. Эквивлентность Кривых относительно действия симплектической группы. Известия ВУЗов. Математика, 2009, № 6, 31-36.