

Bogdan Anna Mixaylovna
Farg'ona davlat universiteti,
Matematika yo'nalishi 3-kurs talabasi
E-mail: isayevislom95@gmail.com

PARABOLIK TENGLAMALAR UCHUN RETROSPEKTIV TESKARI MASALALAR.

Annotatsiya: Bu maqolada turli sohalar uchun amaliy ahamiyatga ega bo'lgan, dinamik obyektlarning boshlang'ich holatini yoki oldingi holatini joriy vaqtdagi maydon xususiyatlari asosida aniqlash zarur bo'lgan teskari retrospektiv masalalar ko'rib chiqiladi. Parabolik tenglamalar uchun teskari va noto'g'ri masalalarga alohida e'tibor qaratiladi, chunki ular teskari masalalarning eng murakkab va amaliy ahamiyatga ega sinflari hisoblanadi. Parabolik tenglamalar uchun retrospektiv teskari masalalar boshlang'ich-chegaraviy masalalarni tahlil qilishga asoslangan turli qo'yilishlarga ega ekanligini ta'kidlash lozim.

Kalit so'zlar: teskari retrospektiv masalalar, parabolik tenglamalar, noto'g'ri masalalar, giperbolik tenglamalar, retrospektiv teskari masalalar, boshlang'ich-chegaraviy masalalar, issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi, temperaturani o'lchash, temperatura maydoni, Fredgolm 1-turi integral tenglamasi, to'qlik o'zaro perpendikulyar sistemasi, Veyershtrass teoremasi

Bogdan Anna Mixaylovna
Ferghana Satate University,
direction of mathematics, 3th year student
E-mail: isayevislom95@gmail.com

RETROSPECTIVE INVERSE PROBLEMS FOR PARABOLIC EQUATIONS.

Abstract: This article examines inverse retrospective problems, which have important practical applications in various fields where it is necessary to determine the initial state or previous state of dynamic objects based on the available information about the characteristics of the field at the current time. Particular attention is paid to inverse and ill-posed problems for parabolic equations, which are among the most complex and practically significant classes

of inverse problems. It is noted that retrospective inverse problems for parabolic equations have various formulations based on the analysis of initial-boundary value problems for the equation.

Key words: *inverse retrospective problems, parabolic equations, ill-posed problems, hyperbolic equations, retrospective inverse problems, initial-boundary value problems, heat equation, temperature measurement, temperature field, Fredholm integral equation of the first kind, complete orthogonal system, Weierstrass theorem.*

Богдан Анна Михайловна
Ферганский Государственный
Университет, факультета математики-
информатики, направление математики,
студентка третьего курса.

РЕТРОСПЕКТИВНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ.

Аннотация: *В данной статье рассматриваются обратные ретроспективные задачи, имеющие важные практические применения в различных областях, где необходимо определить начальное состояние или предыдущее состояние динамических объектов по имеющейся информации о характеристиках поля в текущий момент времени. Особое внимание уделяется обратным и некорректным задачам для параболических уравнений, которые являются одними из самых сложных и практически значимых классов обратных задач. Отмечается, что ретроспективные обратные задачи для параболических уравнений имеют различные постановки, основанные на анализе начально-краевых задач для уравнения.*

Ключевые слова: *обратные ретроспективные задачи, параболические уравнения, некорректные задачи, гиперболические уравнения, ретроспективные обратные задачи, начально-краевые задачи, уравнение теплопроводности, измерение температуры, температурное поле, интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода, полная ортогональная система, теорема Вейерштрасса.*

Введение.

Обратные ретроспективные задачи имеют важные практические применения в различных областях, где необходимо определить начальное состояние или предыдущее состояние динамических объектов по имеющейся информации о характеристиках поля в текущий момент времени [1, 2, 3, 4].

Обратные и некорректные задачи для параболических уравнений являются одними из самых сложных и практически значимых классов обратных задач. Они менее устойчивы по сравнению с соответствующими обратными задачами для гиперболических уравнений.

Ретроспективные обратные задачи для параболических уравнений имеют различные постановки, основанные на анализе начально-краевых задач для уравнения теплопроводности при разных способах измерения температуры. Подробный анализ различных видов ретроспективных обратных задач представлен в монографиях [2, 4].

В качестве модельных примеров таких задач рассмотрим следующую одномерную начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности [1, 2].

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (3)$$

$$u(x, T) = f(x), x \in [0, l]. \quad (4)$$

Наша основная задача будет заключаться в восстановлении временной динамики температурного поля. Для этого нам необходимо найти начальное распределение температуры, используя имеющуюся информацию о температурных следах на некоторых множествах. При этом мы будем

рассматривать две наиболее распространенные постановки обратных задач в этой области.

1. Имеется информация о распределении температуры в стержне в определенный момент времени.

$$T > 0:$$

$$u(x, T) = f(x), x \in [0, l].$$

2. Известно поле температур в некоторой точке x_0 внутри среды (отрезка $[0, l]$): $u(x_0, t) = g(t), t \in [t_1, t_2]$.

С точки зрения постановки эксперимента и наблюдения за объектом исследования, вторая постановка задачи является более простой. Это связано с тем, что она предполагает измерение температуры в одной точке в некотором временном промежутке.

В то же время, сравнительный анализ двух постановок задач позволяет выявить важные особенности реконструкции начального условия. Эти особенности важны для правильной постановки эксперимента и последующей процедуры реконструкции.

Таким образом, хотя вторая постановка задачи является более простой с точки зрения проведения эксперимента, сравнение двух подходов может дать ценную информацию, которая поможет улучшить процесс реконструкции начальных условий и повысить качество эксперимента в целом.

Исследуем первую постановку.

Итак, поставим задачу о нахождении начального распределения температур $\varphi(x)$ по информации об этом поле в некоторый момент времени: $t = T > 0$:

$$z(x, T) = f(x), x \in [0, l] \tag{5}$$

Для исследования обратной задачи, необходимо построить соответствующие операторные уравнения, которые позволят связать заданные и искомые функции. Далее, следует построить решение прямой задачи, используя метод разделения переменных [2, 5] и найти решение в виде $u(x, t) = X(x)T(t)$.

Разделяя переменные, получим $\frac{X''}{X} = \frac{1}{a} \frac{T'}{T} = \text{const} = -\lambda^2$, откуда выводим обыкновенное дифференциальное уравнение $X'' + \lambda^2 X = 0$ и определяем общее решение в виде $X = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x$. Используя граничные условия, находим $C_2 = 0, C_1 \sin \lambda x = 0$ и, следовательно, определяем собственные значения и собственные функции:

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{l}, X_n = \cos \frac{\pi n x}{l}, T_n = C_n e^{-a \lambda_n^2 t}.$$

Удовлетворяя начальным условиям, определим неизвестные постоянные C_n :

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \cos \lambda_n \xi d\xi, n = 1, 2, \dots, C_0 = \frac{1}{l} \int_0^l \varphi(\xi) d\xi.$$

Таким образом, решение прямой задачи имеет вид

$$u(x, t) = \int_0^l K(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi, \quad (6)$$

где

$$K(x, \xi, t) = \frac{1}{l} + \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \lambda_n x \cos \lambda_n \xi e^{-\lambda_n^2 a t} \quad (7)$$

Отношение (7) позволяет вычислить температурное поле в любой точке стержня в любой момент времени, если известно начальное распределение температуры. Перейдем к рассмотрению обратных задач. При выполнении дополнительного условия (5) обратная задача сводится к интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода на основе формул (6) -(7).

$$K_1 \varphi = \int_0^l K_1(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi = f(x), x \in [0, l], \quad (8)$$

причем $K_1(x, \xi) = K(x, \xi, t)$. Отметим, что ядро $K_1(x, \xi)$ является симметричным, а оператор $K_1 \varphi$ – самосопряженным в $L_2[0, l]$. Собственные функции ядра – $1, \cos \lambda_n x$ – представляют собой полную ортогональную систему в $L_2[0, l]$ а сингулярными числами оператора K_1 являются $\sigma_n^2 = e^{-\lambda_n^2 a \Gamma}, n=0, 1, 2, \dots$, быстро убывающие при $n \rightarrow \infty$. В силу

оценки $|K_1(x, \xi)| \leq \frac{1}{l} + \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 a \Gamma}$ и сходимости ряда в правой части этого неравенства в соответствии с теоремой Вейерштрасса [2] ядро, $K_1(x, \xi)$ представляет собой непрерывную функцию, следовательно, оператор $K_1(x, \xi)$ является вполне непрерывным из $L_2[0, l]$ в $L_2[0, l]$, поэтому K_1^{-1} неограничен и задача решения операторного уравнения (8) требует регуляризации. Заметим, что, используя ортогональность системы $\{1, \cos \lambda_n x\}$ нетрудно выписать формальное решение (8) с помощью линейного оператора вида

$$\varphi(\xi) = \int_0^l K_1^*(x, \xi) f(x) dx, \quad (9)$$

поскольку коэффициенты Фурье φ_k и f_k функций соответственно связаны зависимостью

$$\varphi(x) \sigma_n^2 = f_k, k=0, 1, \dots \quad (10)$$

Анализируя представление (9)–(10) для функции $\varphi(x)$, можно заметить, что для сходимости ряда в этом представлении необходимо выполнение довольно жестких условий на характер убывания коэффициентов Фурье функции f_k . Это условие не выполняется для многих

функций из $L_2[0, l]$, даже бесконечно дифференцируемых. Поэтому формальное решение (10) нельзя использовать для практических расчетов, когда функция $f(\xi)$ задана в конечном наборе точек. Такая структура решения отражает тот факт, что оператор $K_1(x, \xi)$, обратный к оператору, описывающему задачу, является неограниченным.

По-видимому, одним из наиболее эффективных способов построения регуляризованного решения (8) является метод усеченных сингулярных разложений, согласно которому это решение имеет вид

$$\varphi_\delta(x) = R_N f_\delta = \frac{1}{l} \int_0^l f_\delta(\xi) d\xi + \frac{2}{l} \sum_{n=1}^N f_\delta \cos \lambda_n \xi \cos \lambda_n x e^{-\lambda_n^2 a T}, \quad (11)$$

а число N (параметр регуляризации в данном случае) выбирается согласованным с погрешностью δ задания функции $f(\|f - f_\delta\| \leq \delta)$. Найдем, из каких условий оно определяется. Оценим погрешность в норме

$$L_2[0, l]: \|R_N f_\delta - \varphi\|_{L_2[0, l]} \leq \|R_N\| \cdot \|f - f_\delta\|_{L_2[0, l]} + \|R_N f - \varphi\|_{L_2[0, l]},$$

причем $\|R_N\| = (1 + \sum_{n=1}^N e^{-\lambda_n^2 a T})^{\frac{1}{2}} = M(N)$ монотонно возрастает с ростом, N а $\|R_N f - \varphi\|_{L_2[0, l]} = C(N)$ представляет собой норму остатка сходящегося ряда и, следовательно, стремится к 0 при $N \rightarrow \infty$.

Таким образом, погрешность регуляризованного решения оценивается через величину $m(N, \delta) = M(N) \cdot \delta + C(N)$ и по заданному δ всегда найдется $N \cdot \delta$ доставляющее минимум $m(N, \delta)$. Если необходимо построить решение обратной задачи с погрешностью, не превышающей, ε при условии, что погрешность задания входных данных δ , то порядок величины N таков:

$$N = c^{-1} \ln\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right), c = \pi l^{-1} (aT)^{0.5}. \quad \text{Итак, при определенных соотношениях между}$$

параметрами ε и δ может оказаться, что необходимое целое число N не существует. Это означает, что достигнуть требуемой точности решения при заданной погрешности входных данных невозможно. Важную роль в исследовании задачи играет параметр, характеризующий скорость убывания сингулярных чисел. С увеличением времени наблюдения T , величина этого параметра также растет, и в какой-то момент изменение текущей температуры становится значительно меньше погрешности ее измерения. Температура выравнивается, стремясь к равновесному состоянию, и определить ее начальное распределение становится невозможно.

Примечания и комментарии по теме: „Ретроспективные обратные задачи для параболических уравнений”.

В принципе для решения поставленной ретроспективной задачи достаточно сделать замену переменных, $\tau = T - t$ где T – известное время наблюдения объекта исследования, и решить задачу с обращенным временем. Соответствующая начально-краевая задача относительно функции $v(\tau) = u(T - \tau)$ имеет вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = - \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \tau}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(0, \tau) = \frac{\partial v}{\partial x}(l, \tau) = 0, \quad (13)$$

$$v(x, 0) = f(x). \quad (14)$$

Для определения температуры $v(x, T) = \varphi(x)$ стержня в момент T необходимо решить начально-краевую задачу, описываемую уравнениями (12)-(14). Это можно сделать двумя способами:

1. Решить уравнение Фредгольма 1-го рода с гладким ядром, заданное формулой (7).

2. Непосредственно решить задачу (12)-(14) методом разделения переменных, представив решение в виде ряда. Члены этого ряда, согласно (11), содержат экспоненциально растущие сомножители, поэтому для сходимости ряда требуются очень жесткие ограничения на функцию $f(x)$ в виде очень быстрого убывания коэффициентов ее ряда Фурье. Даже бесконечная дифференцируемость функции $f(x)$ не гарантирует сходимости этого ряда.

Вывод.

Обратные ретроспективные задачи имеют важное практическое применение в различных областях, где необходимо определить начальное или предыдущее состояние динамических объектов по имеющейся информации о характеристиках поля в текущий момент времени. Обратные и некорректные задачи для параболических уравнений, таких как уравнение теплопроводности, являются одними из наиболее сложных и практически значимых классов обратных задач. Эти задачи менее устойчивы по сравнению с обратными задачами для гиперболических уравнений. Существует множество различных постановок ретроспективных обратных задач для параболических уравнений, основанных на анализе начально-краевых задач при разных способах измерения температуры. Подробный анализ этих видов обратных задач представлен в специализированной литературе.

Литература:

1. Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. – М.: Физматлит, 2007. – 224 с
2. Денисов А. М. Введение в теорию обратных задач. – М.: МГУ, 1994. – 208 с.
3. Романов В. Г. Обратные задачи математической физики. – М.:

Наука, 1984. – 264 с.

4. Кабанихин С. И. Проекционно-разностные методы определения коэффициентов гиперболических уравнений. – Новосибирск: Наука, 1988. – 168 с.

5. Ватульян А. О. Драгилев В. М., Драгилева Л. Л. Восстановление динамических напряжений, действующих на вязкоупругий слой // Акуст. журн. 2005. Т. 51. № 6. – С. 742–748.

6. Лаврентьев М.М. Некорректные задачи для дифференциальных уравнений. учебное пособие. - НГУ, 1981. - 75 с.

7. Каримов Ш.Т., Юлбарсов Х. Задача Гурса для одного псевдопараболического уравнения третьего порядка с оператором Бесселя. Материалы IX международной научной конференции «Современные проблемы математики и физики» посвященная 70-летию чл.-корр. АН РБ К.Б. Сабитова, 12 - 15 сентября, Стерлитамак, 2021 г.

8. Каримов Ш.Т., Мамадалиева Ш. Решение коэффициентной обратной задачи для гиперболического уравнения сведением её к уравнению Гелфанда-Левитана первого рода. Fars Int J Edu Soc Sci Hum 10(12), 2022; Volume-10, Issue-12, pp. 142-151.

9. Каримов Ш.Т. О некоторых обобщениях свойств оператора Эрдейи-Кобера и их приложение. Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2017. № 2(18). С. 20-40. DOI: 10.18454/2079-6641-2017-18-2-20-40.

10. Каримов Ш.Т. Новые свойства обобщенного оператора Эрдейи – Кобера и их приложения. Доклады АН РУз. – 2014. -№ 5 -С. 11-13

11. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. – М: Наука, 1980. – 286 с

12. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 287 с.

13. Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. – М.: Физматлит, 2007. – 224 с.

14. Денисов А. М. Введение в теорию обратных задач. – М.: МГУ,

1994. – 208 с.

15. Латтес Р., Лионс Ж.-Л. Метод квазиобращения и его приложения.
– М.: Мир, 1970. – 336 с.