

Issiqlik tarqalish tenglamasi uchun ichki chegaraviy nolokal masala

Mirzayev Fayzulla Saydulla o'g'li, Termiz davlat universiteti stajyor-tadqiqotchisi

Tel: +99 890 266 85 65

E-mail: fayzullamirzayev95@gmail.com

Annotatsiya: Maqolada parabolik tipdagi tenglamalarning eng sodda vakili bo'lgan issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun ikkinchi ichki nolokal masalani o'rganamiz. Masala yechimining yagonaligi ekstremum prinsipi va hosila funksiyaning ishorasi haqidagi teoremdan foydalanib ko'rsatamiz, yechimning mavjudligini esa grin funksiyasi yordamida ko'rsatamiz.

Kalit so'zlar: Issiqlik tarqalish tenglamasi, nolokal shart, ekstremum prinsipi, hosila funksiyaning ishorasi, Grin funksiyasi.

Внутренняя краевая нелокальная задача уравнения теплопроводности

Мирзаев Файзулла Сайдуллаевич, Стажер-исследователь Термезского
государственного университета

Tel: +99 890 266 85 65

E-mail: fayzullamirzayev95@gmail.com

Аннотация: В статье изучается внутренняя граничная нелокальная задача для уравнения теплопередачи, которая является простейшим представлением уравнений параболического типа. Единственность решения задачи показана с помощью принципа экстремума и теоремы о знаке производной функции, а существование решения - с помощью функции Грина.

Ключевые слова: уравнение теплопередачи, нелокальное условие, принцип экстремума, знак производной функции, функция Грина

Internal boundary value nonlocal problem of the heat equation

Mirzayev Fayzulla Saydulla o'g'li, Trainee-researcher of Termiz State University

Tel: +99 890 266 85 65

E-mail: fayzullamirzayev95@gmail.com

Annatation: The article studies the internal boundary nonlocal problem for the heat transfer equation, which is the simplest representation of parabolic type equations. The uniqueness of the solution to the problem is shown using the extremum principle and the theorem on the sign of the derivative of a function, and the existence of a solution is shown using the Green's function.

Key words: heat transfer equation, nonlocal condition, extremum principle, sign of the derivative of the function, Green's function

Kirish

Parabolik tipdagi tenglamalarning turli ko'rinishlari uchun lokal masalalar juda ko'plab avtorlar tomonidan o'rganilgan. Hozirgi kunda zamonaviy fanning yutuqlari, shu bilan birgalikda ishlab chiqarishning turli masalalari hamda fizika, mexanika, texnika, biologiya, ekologiya va sotsiologiya kabi fanlarning juda ko'plab muammolarining matematik modellari parabolik tipdagi tenglamalarning turli ko'rinishlari uchun nolokal (sohaning chegaralarida funksiyaning qiymati berilmasdan, balki sohaning u yoki bu qismi orasidagi bog'lanishlar beriladi) masalalami o'rganishni talab qilmoqda. Nolokal masalalar noklassik masalalar jumlasiga kirib, noklassik masalalar bilan hozirgi kunda dunyoning turli mamlakatlarida juda ko'plab ilmiy maktablar olimlari tomonidan ilmiy izlanishlar olib borilmoqda. [1,2,3,4,5,6]

Masalaning qo'yilishi. $D = \{(x, t): 0 < x < l, 0 < t \leq T\}$ sohada

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), \quad (x, t) \in D \quad (1)$$

tenglamaning

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (2)$$

boshlang'ich va

$$u_x(0, t) = \psi(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (3)$$

$$u(l, t) = \alpha u(x_0, t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (4)$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin. Bu (1)-(4) masalada quyidagilar berilgan deb faraz qilamiz:

1. $\varphi(x)$ va $\psi(t)$ - berilgan uzluksiz funksiyalar.
2. α va x_0 -musbat o'zgarmaslar bo'lib quyidagi tengsizliklarni qanoatlantirsin: $0 < \alpha \leq 1, \quad 0 \leq x_0 \leq l$.
3. Quyidagi kelishuvlik shartlari bajarilsin. $\varphi'(0) = \psi(0), \varphi(l) = \alpha \cdot \varphi(x_0)$.

Masala yechimining yagonaligi.

1-teorema. Agar (1)-(4) masalaning yechimi mavjud bo'lib 1.2.3. shartlar bajarilsa, u holda (1)-(4) masalaning yechimi yagonadir. [1,3,6]

Isbot. Faraz qilaylik, D sohada (1)-(4) masala ikkita $u_1(x,t)$ va $u_2(x,t)$ yechimlarga ega bo'lsa, u holda $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ funksiya ham (1)-(4) masalaning yechimi bo'ladi. Bundan $v(x,t)$ funksiya uchun D sohada quyidagi masalani olamiz.

$$v_t(x,t) = v_{xx}(x,t), \quad (x,t) \in D, \quad (5)$$

tenglamaning

$$v(x,t) = 0, \quad 0 \leq x \leq l \quad (6)$$

boshlang'ich va

$$v(0,t) = \alpha v(x_0,t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (7)$$

$$v_x(l,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T \quad (8)$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin. Endi yangi hosil bo'lgan (5)-(8) masalani yechimini qaraymiz. Bu masala yechimining nolga teng ekanligini ko'rsatishimiz kerak. Masaladan ko'rinadiki, parabolik tipdagi tenglamalar uchun ekstremum prinsipiga ko'ra, $v(x,t)$ funksiya o'zining eng katta musbat

maksimumiga va eng kichik manfiy minimumiga $\Gamma = \{x=0, t=0, x=l\}$ chiziqlarda erishadi. (6) shartga asosan $v(x,t)$ nolga teng ekanligidan chap va o'ng chegaralarni tekshiramiz.

Faraz qilaylik $v(x,t)$ funksiya chap chegarada $x=0$ chiziqdagi $P(0,t_1)$ nuqtada o'zining musbat maksimumiga erishsin. U holda (7) nolokal shartga ko'ra $v(P) = \alpha v(x_0, t_1)$ tenglik o'rinli bo'ladi. 2. shartga ko'ra ya'ni $0 < \alpha \leq 1$ ekanligidan $v(P) \leq v(x_0, t)$ tengsizlik hosil bo'ladi. Sohaning ichida $v(P)$ dan ham katta qiymati mavjud. Bunday bo'lishi mumkin emas. Demak $v(x,t)$ funksiya chap chegarada musbat maksimumga erishmas ekan.

Faraz qilaylik $v(x,t)$ funksiya chap chegarada $x=0$ chiziqdagi $Q(0,t_2)$ nuqtada manfiy minimumga erishsin. U holda (7) nolokal shartga ko'ra $v(Q) = \alpha v(x_0, t_1)$ tenglik o'rinli bo'ladi. Masaladagi 2. shartga ko'ra ya'ni $0 < \alpha \leq 1$ ekanligidan $v(Q) \geq v(x_0, t)$ tengsizlik hosil bo'ladi. Sohaning ichida $v(Q)$ dan ham kichiqroq manfiy minimumga erishar ekan. Demak, $v(x,t)$ funksiya chap chegarada manfiy minimumga ham erishmas ekan.

Endi o'ng chegaradagi $x=l$ chiziqlarni tekshiramiz. Faraz qilaylik o'ng chegarada eng katta musbat maksimumga erishsin. Funksiya hosilasining ishorasi haqidagi teorema [5] ko'ra $v_x(l,t) > 0$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu esa (8) shartga zid. Demak, o'ng chegarada eng katta qiymatga erishmaydi.

Faraz qilaylik o'ng chegarada eng kichik qiymatga erishsin. U holda funksiya hosilasining ishorasi haqidagi teorema ko'ra $v_x(l,t) < 0$ tengsizlik hosil bo'ladi. Bu ham (8) shartga zid. Demak o'ng chegarada eng kichik qiymatga ham erishmaydi.

Bulardan kelib chiqadiki (5)-(8) masalaning yechimi D sohada nolga teng bo'ladi ya'ni $v(x,t) \equiv 0$ hosil bo'ldi. Bundan $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$ ekanligini olamiz. Demak (1)-(4) masala yagona yechimga ega.

1-teorema isbot bo'ladi.

Masala yechimining mavjudligi.

Faraz qilaylik (1)-(4) masalaning $u(x,t)$ yechimi mavjud bo'lsin. Agar $u(0,t) = \mu(t)$, $t \in [0, T]$ deb belgilash kiritsak, $u(x,t)$ funksiyani (1) tenglama uchun D sohada qo'yilgan ikkinchi aralash chegaraviy masalaning yagona yechimi sifatida quyidagi ko'rinishda yozish mumkin. [6]

$$u(x,t) = \int_0^l \varphi(\xi) G_4(x,t;\xi,0) d\xi + \int_0^t \mu(\eta) G_{4\xi}(x,t;0,\eta) d\eta + \int_0^t \psi(\eta) G_4(x,t;l,\eta) d\eta, \quad (10)$$

Bu yerda $G_4(x,t;\xi,\eta)$ -ikkinchi aralash chegaraviy masalaning Grin funksiyasi:

$$G_4(x,t;\xi,\eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\eta)}} \times \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\exp \left[-\frac{(x-\xi-4nl)^2}{4(t-\eta)} \right] - \exp \left[-\frac{(x+\xi-4nl)^2}{4(t-\eta)} \right] + \exp \left[-\frac{(x-\xi-2l-4nl)^2}{4(t-\eta)} \right] + \exp \left[-\frac{(x+\xi-2l-4nl)^2}{4(t-\eta)} \right] \right] \right\}$$

(10) formuladan $u(x_0,t)$ funksiyani topamiz.

$$u(x_0,t) = \int_0^l \varphi(\xi) G_4(x_0,t;\xi,0) d\xi +$$

$$+ \int_0^t \mu(\eta) G_{4\xi}(x_0, t; 0, \eta) d\eta + \int_0^t \psi(\eta) G_4(x_0, t; l, \eta) d\eta,$$

$u(x_0, t)$ ning bu ifodasini masaladagi (3) shartga qo'yib, $u(0, t) = \mu(t)$, $t \in [0, T]$ belgilashni hisobga olib $\mu(t)$ noma'lum funksiyani topamiz:

$$\mu(t) = \alpha \int_0^1 \varphi(\xi) G_4(x_0, t; \xi, 0) d\xi +$$

$$+ \alpha \int_0^t \mu(\eta) G_{4\xi}(x_0, t; 0, \eta) d\eta + \alpha \int_0^t \psi(\eta) G_4(x_0, t; l, \eta) d\eta.$$

Bu tenglikdan $\mu(t)$ noma'lum funksiyaga nisbatan quyidagi integral tenglamaga ega bo'lamiz:

$$\mu(t) = \alpha \int_0^t G_{4\xi}(x_0, t, 0, \eta) \mu(\eta) d\eta + f(t), \quad (11)$$

bu yerda

$$f(t) = \alpha \int_0^l G_4(x_0, t, \xi, 0) \varphi(\xi) d\xi + \alpha \int_0^t G_4(x_0, t, l, \eta) \psi(\eta) d\eta. \quad (12)$$

(11) – ikkinchi turdagi Volterra integral tenglamasi bo'lib, uning yadrosi quyidagi ko'rinishga ega:

$$G_{4\xi}(x_0, t; 0, \eta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x_0 - 4nl}{2(t - \eta)^{\frac{3}{2}}} \exp \left\{ - \frac{(x_0 - 4nl)^2}{4(t - \eta)} \right\}.$$

$\forall x_0 \in (0, l)$ va $\forall n \in Z$ uchun $x_0 - 4nl \neq 0$ bo'lib, $\eta < t$ bo'lganda bu qator tekis yaqinlashadi hamda $\forall n \in Z$ uchun

$$\lim_{\eta \rightarrow t} \frac{x_0 - 4nl}{2(t - \eta)^{\frac{3}{2}}} \exp \left\{ - \frac{(x_0 - 4nl)^2}{4(t - \eta)} \right\} = 0.$$

Demak, $G_{4\xi}(x_0, t; 0, \eta)$ yadro $\{(t, \eta): 0 \leq \eta < t \leq T\}$ sohada uzluksiz va chegaralangan bo'lib, $\lim_{\eta \rightarrow t} G_{4\xi}(x_0, t; 0, \eta) = 0$.

Endi $f(t)$ funksiyani o'rganamiz. Grin funksiyasi tuzilishiga asosan

$I_1 \in C[0, T]$ degan xulosaga kelamiz.

$$G_{\xi}(x_0, t, l, \eta) \in C(0 \leq \eta < t \leq T), \quad \lim_{\eta \rightarrow t} G_{\xi}(x_0, t, l, \eta) = 0 \quad \text{va} \quad \psi(t) \in C[0, T]$$

bo'lganligi uchun $f(t)$ funksiyaning ikkinchi integrali ham uzluksiz funksiya bo'ladi. Yuqoridagilarni hisobga olsak. $f(t) \in [0, T]$ ekanligi kelib chiqadi.

Demak, (11)-yadrosi sust maxsuslikka ega, $f(t)$ esa uzluksiz bo'lgan ikkinchi tur Volterra integral tenglamasidir. Shuning uchun bu integral tenglama yagona uzluksiz yechimga ega.

(11) integral tenglamadan topilgan $\mu(t)$ funksiyani (10) formulaga qo'ysak (1)-(4) masalaning yechimiga ega bo'lamiz.

Foydalanilgan adabiyotlar.

1. Жураев Т. Ж., Абдиназаров С. Математик физика тенгламалари. Тошкент, Университет, 2013. 332 бет.
2. Зикиров О. С. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар. Тошкент, Университет, 2012. 260 бет.
3. Салоҳиддинов М. С. Математик физика тенгламалари. Тошкент. "Ўқитувчи". 2002. 445 б.
4. Ладыженская О.А, Солонников В.А, Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967, с.736.

5. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968. 428 с.
6. Ўринов А.Қ. Параболик типдаги дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар. Тошкент МУМТОЗ СЎЗ. 2015. 196 с.