

TRIGONOMETRIYANING MATEMATIK INSTRUMENT SIFATIDA IMKONIYATLARI

Xonqulov Ulugʻbek Xursanalievich

Fargʻona davlat universiteti dotsenti, (PhD).

Annotatsiya

Maqolada trigonometriyning matematik instrument sifatida imkoniyatlari bayon qilingan boʻlib, xususan geometrik teoremlar va tengsizliklarni isbotlash, burchaklarning gradus qiymatini hisoblashda trigonometrik usulning afzalliklari va muammoli jihatlari tahlil qilingan. Usullarning xususiyatlari, misol va masalalarni yechishda eng samarali usullarni tanlash boʻyicha tavsiyalar berilgan. Maqolada 18^0 burchak qiymatini hisoblash boʻyicha mualliflik usullari keltirilgan.

Kalit soʻzlar: teorema, Molveyde teoremasi, trigonometrik va geometrik usul.

ВОЗМОЖНОСТИ ТРИГОНОМЕТРИИ КАК МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТРУМЕНТА

Ханкулов Улугбек Хурсаналиевич

Доцент Ферганского государственного университета (PhD).

Аннотация

В статье описываются возможности тригонометрии как математического инструмента, в частности, анализируются преимущества и проблемные стороны тригонометрического метода при доказательстве геометрических теорем и неравенств, вычислении градусных значений углов. Приводятся особенности методов, примеры и рекомендации по выбору наиболее эффективных методов решения задач. В статье представлены авторские методы вычисления значения угла 18^0 .

Ключевые слова: теорема, теорема Мольвейде, тригонометрический и геометрический подход.

POSSIBILITIES OF TRIGONOMETRY AS A MATHEMATICAL INSTRUMENT

Khankulov Ulugbek Khursanalievich

Annotation

The article describes the possibilities of trigonometry as a mathematical instrument, in particular, the advantages and problematic aspects of the trigonometric method in proving geometric theorems and inequalities, calculating the degree values of angles are analyzed. Features of the methods, examples and recommendations for choosing the most effective methods for solving problems are given. The author's methods for calculating the value of an angle of 18° are presented in the article.

Keywords: theorem, Molveyde theorem, trigonometric and geometric approach.

KIRISH. Trigonometriya matematik instrument sifatida keng imkoniyatlarni taqdim etadi va turli matematik hamda amaliy sohalarda muhim rol o'ynaydi. Trigonometriyaning matematik instrument sifatidagi asosiy imkoniyatlari geometrik masalalarni yechishda (geometrik figura elementlari va burchaklari o'rtasidagi munosabatlarni ifodalash), davriy jarayonni modellashda (to'lqinlar, elektromagnit nurlar, tovush va yorug'lik kabi ko'plab davriy jarayonlarni trigonometrik funksiyalar yordamida ifodalash), algebraik masalalarni yechishda, fizika va muhandislik sohasida (mexanikada kuchlar va harakatlar analizi, elektromagnit to'lqinlar, akustika va optikada trigonometrik tahlillar, harakat trayektoriyasi, burchakli tezlik va burchakli tezlanishni aniqlash), navigatsiya va astronomiyada (sferik trigonometriya yordamida sayyoralar harakatini va yulduzlar orasidagi masofalarni aniqlash, joylashuv va yo'nalishni aniqlash) qo'llaniladi. Ayniqsa trigonometrik usul yordamida geometrik teoremlar va tengsizliklarni isbotlash, trigonometrik funksiya qiymatlarini hisoblash birmuncha oson, qulay hisoblanadi. Bunda trigonometrik usul o'quvchilarga masala chizmasini oddiy tasvirlash orqali tezroq uning mazmuniga kirish va uni yechishga imkon beradi. Bundan tashqari trigonometrik materiallar geometriya va algebra kursining bog'langan qismi sifatida qiziqarli va o'ziga xos ekanligi bilan ahamiyatlidir [1].

Mavzuga oid adabiyotlar tahlili. N.K. Tuktamyshev va T.Yu. Gorskaya tomonidan trigonometriyani o'rganish jarayonida APOS nazariyasi (APOS "Action, Process, Object, Schema" matematikani o'rganish jarayonida o'quvchirning kognitiv rivojlanishi va tushunchalarni qanday tushunishiga oid nazariy model) xususiyatlari tahlil qilingan [2]. APOS nazariyasiga ko'ra o'quvchilar matematik tushunchalarning integratsiyasi va amaliy jihatlari asosida trigonometriyani bir butun tizim sifatida o'zlashtiradilar. A.N. Marasov, N.I. Popov va O.V. Nesteruk trigonometriya masalalari sistemasini tuzishning tamoyillari va kriteriyalarini taklif etadi [4]. Gurwinder Singh va Wahyu Hidayat trigonometrik tushunchalarning grafik vizualizatsiyasi orqali o'quvchilarning fazoviy ko'nikmalari va kontseptual bilimlarini rivojlantirish muhim ekanligini ta'kidlaydi [5;6]. D.L. Ball va A.O. Keldibekova trigonometriyaning asosiy tushunchalari va ularni matematik masalalarni yechishda qanday qo'llash mumkinligi haqida ma'lumot beradi [3;7]. Unda matematika olimpiadalari topshiriqlarida trigonometriya bo'limining tutgan o'rnini aniqlangan, ba'zi matematik masalalarni yechishda trigonometrik usullar, trigonometrik tenglamalar va tengsizliklarni yechish usullari taklif etiladi. Trigonometrik usullar ko'plab geometrik va algebraik masalalarni yechishda juda samarali bo'lsa-da, ba'zi holatlarda ularning murakkabligi va cheklangan qo'llanish sohalari sababli metodik muammolar kelib chiqishi mumkin. Shu sababli, o'qituvchilar va o'quvchilar trigonometrik usullarni qo'llashda ehtiyot bo'lishlari va ularni to'g'ri kontekstda ishlatishlari uchun trigonometrik usul xususiyatlarini chuqur o'rganish muhim ahamiyat kasb etadi.

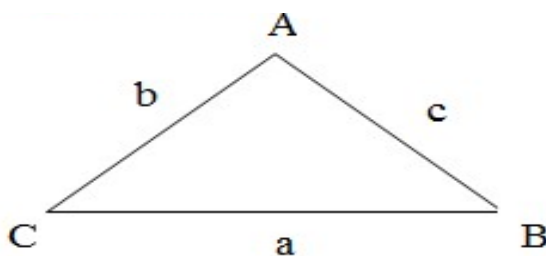
Tadqiqot metodologiyasi. Trigonometrik usul umumiy shakllar va munosabatlarni ifodalashda juda qulay bo'lib, murakkab geometriya masalalarini soddalashtiradi. Trigonometrik funksiyalar ko'p holatlarda aniq va soddalashtirilgan formulalar orqali natijani olish imkonini beradi. Bu, ayniqsa, burchaklarning gradus qiymatlarini hisoblashda foydali. Trigonometriya davriy jarayonlarni ifodalashda kuchli vosita hisoblanadi. Bu usullar orqali turli parametrlar orqali o'zgaradigan burchakli harakatlarini va boshqa davriy

jarayonlarni tahlil qilish mumkin. Trigonometrik usulda geometrik shakllarni vizualizatsiya qilish orqali burchaklar va tomonlar orasidagi munosabatlarni ko'rish va ularni tahlil qilish osonlashadi. Lekin trigonometrik usul cheklangan sohalarda qo'llanishi va aniq asoslangan yondashuvni talab qilishi bilan ba'zi muammoli jihatlari tug'diradi. Trigonometriya o'quvchilar uchun ba'zan juda abstrakt bo'lib tuyuladi, bu esa masalalarni tushunishni qiyinlashtirishi mumkin. Ayniqsa, trigonometrik almashtirishlar va formulalarni qo'llashda, murakkab algebraik jarayonlar talab etiladi. Ko'p sonli trigonometrik formulalar va qoida-istisnolarning mavjudligi o'quvchilar uchun masalalarni yechishda chalkashliklarga olib keladi. Trigonometrik usullar faqat burchaklar va geometrik shakllariga bog'liq bo'lgan masalalar bilan cheklanadi. Agar masala boshqa koordinatalar sistemasiga bog'liq bo'lsa, trigonometrik usullarni qo'llash qiyinlashadi. Trigonometrik usullardan foydalanish uchun oldindan aniq usul va fundamental bilim zarur. Shunday bo'lsada ba'zi teoremlarni isbotlashda geometrik usulga nisbatan trigonometrik usulning qulayligi ko'rinadi. Buni quyidagi teoremlar misolida ko'rib chiqamiz.

Tangenslar teoremasi. Uchburchakning ikkita tomoni ayirmasini shu tomonlar yg'indisiga nisbati tomonlar qarshisidagi burchaklarning yarim ayirmasi tangensining shu burchaklar yarim yg'indisi tangensiga nisbati kabi:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}} \quad (1)$$

Isboti: *Trigonometrik usul.* ABC uchburchakning tomonlari a, b, c bo'lsin.



Sinuslar teoremasidan foydalanamiz: $a = 2R \sin A$, $b = 2R \sin B$. Ifodalarni hadma-had qoshamiz va ayiramiz:

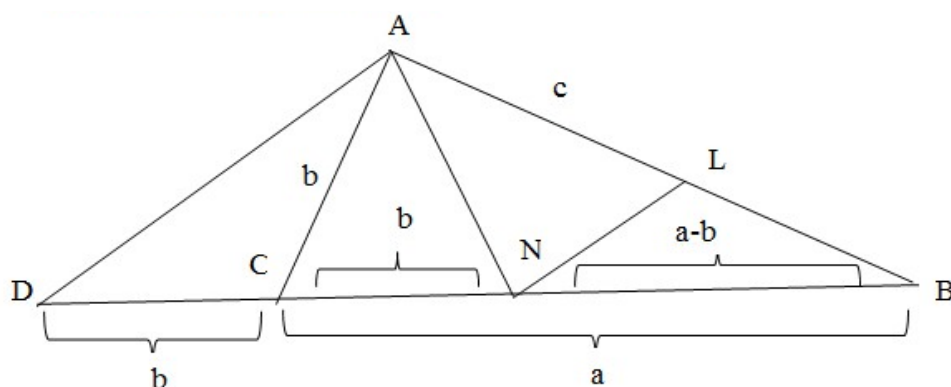
$$a + b = 2R(\sin A + \sin B) = 2R \left(2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \right) \quad (2)$$

$$a - b = 2R(\sin A - \sin B) = 2R \left(2 \sin \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2} \right) \quad (3)$$

(3) ifodani (2) ifodaga hadma-had bo'lish natijasida teoremaning isboti kelib chiqadi:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\sin \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2}}{\sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}} = \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{A+B}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}}$$

Isboti: *Geometrik usul.*



ABC uchburchakning BC tomoniga va uning davomiga $AC = b$ uzunlikdagi kesmalar o'tkazamiz: $AC = DC = NC = b$. U holda $BN = BC - NC = a - b$. N nuqtadan AD tomonga parallel NL chiziq o'tkazamiz: $DA \parallel NL$. Hosil bo'lgan uchburchakning burchaklari orasidagi munosabatni aniqlaymiz:

$$\begin{aligned} \angle ACD &= 180 - \angle C, & \angle CAN &= \frac{180 - \angle C}{2} = 90 - \frac{\angle C}{2} \\ \angle ADC &= \angle DAC = \frac{\angle C}{2}, & \angle DAN &= \frac{\angle C}{2} + 90 - \frac{\angle C}{2} = 90. \end{aligned}$$

$DA \parallel NL$ bo'lgani uchun $DA \perp AN$, $AN \perp NL$. $\angle ADN = \angle LNB$ ekanligidan DAB va NLB uchburchaklarning o'xshashligi kelib chiqadi: $\triangle DAB \sim \triangle NLB$. U holda

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{DA}{NL} \quad (4)$$

$$\angle NAL = \angle A - \angle CAN = \angle A - \frac{180 - \angle C}{2} = \frac{2A - (A + B + C) - C}{2} = \frac{A - B}{2}.$$

$$\Delta DAN \text{ uchburchakdan} \quad DA = \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \cdot AN = AN + \operatorname{tg} \frac{A + B}{2}.$$

$$\Delta ANL \text{ uchburchakdan} \quad NL = AN \cdot \operatorname{tg} \frac{A - B}{2}. \text{ Bu ifodalarni (4) ga qo'yish orqali teoremaning isboti kelib chiqadi:}$$

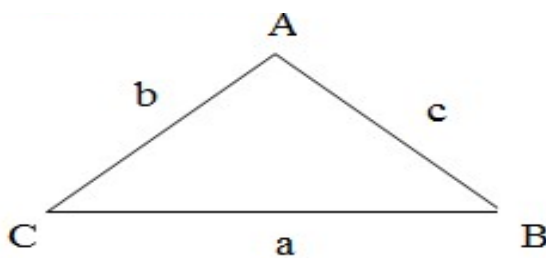
$$\frac{a + b}{a - b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A + B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A - B}{2}}$$

Molveyde teoremasi. Uchburchakning ikkita tomoni ayirmasi (yig'indisi) ning uchinchi tomonga nisbati shu tomonlar qarshisidagi burchaklar yarim ayirmasi sinusi (cosinusi) ning uchinchi tomon qarshisidagi burchak yarmining cosinusi (sinusi) nisbati kabidir:

$$\frac{a - b}{c} = \frac{\sin \frac{A - B}{2}}{\cos \frac{C}{2}} \quad \text{yoki} \quad \frac{a + b}{c} = \frac{\cos \frac{A + B}{2}}{\sin \frac{C}{2}}$$

Isboti. *Trigonometrik usul.* ABC uchburchakning tomonlari a, b, c bo'lsin.

Sinuslar teoremasidan foydalanamiz: $a = 2R \sin A$, $b = 2R \sin B$, $c = 2R \sin C$.



$$a - b \text{ ayirma:} \quad a - b = 2R \left(2 \sin \frac{A - B}{2} \cos \frac{A + B}{2} \right). \text{ U holda}$$

$$\frac{a - b}{c} = \frac{2R \left(2 \sin \frac{A - B}{2} \cos \frac{A + B}{2} \right)}{2R \sin C} = \frac{2 \sin \frac{A - B}{2} \cos \frac{A + B}{2}}{2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} A+B+C=\pi \\ C=\pi-(A+B) \\ \frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{A+B}{2}\right) \end{array} \right\} = \frac{\sin \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2}}{\cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{C}{2}} = \frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{C}{2}}.$$

Ushbu teoremani geometrik usul yordamida isbotlash uchun ABC uchburchakka bir nechta qoshimcha chiziqlar chizishga to'g'ri keladi. Bu esa o'quvchidan nostandart fikrlash, maqbul qaror qabul qilish, doimiy ravishda yangi g'oyalarni izlash, topish va amalga tatbiq etish ko'nikmalarini shakllantirishni taqozo qiladi. Bunday shakldagi qobiliyat turlari ayrim o'quvchilarda birdek rivojlanmagan. Masalani yechishga trigonometrik usul esa barcha o'quvchilarni birdek faollashtiradi.

Trigonometrik usul asosida tengsizliklarni isbotlash, tayin burchak gradus qiymatlarini hisoblash ham mumkin.

1-misol. $\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}, \quad (\alpha + \beta + \gamma = \pi)$ isbotlang.

: *Trigonometrik usul.* Trigonometrik shakl almashtirishlarni bajaramiz:

Isboti

$$\begin{aligned} \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} &= \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \frac{\gamma}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \sin \frac{\gamma}{2} \right) \cdot \sin \frac{\gamma}{2} = -\frac{1}{2} \sin^2 \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}. \end{aligned}$$

Oxirgi ifodani t , $\sin \frac{\gamma}{2}$ ni esa x deb belgilaymiz:

$$-\frac{1}{2} \sin^2 \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = t \quad \text{va} \quad \sin \frac{\gamma}{2} = x.$$

U holda $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - t = 0$ kvadrat tenglama hosil bo'ladi.

Kvadrat tenglama yechimga ega bo'lishi uchun $D \geq 0$ bo'lishi keraki:

$$\cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} - 8t \geq 0, \quad t \leq \frac{1}{8} \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} \leq \frac{1}{8} \cdot 1 = \frac{1}{8}.$$

Bundan $\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}$, ($\alpha + \beta + \gamma = \pi$) kelib chiqadi.

2-misol. $\sin 18^\circ$ ni hisoblang.

Trigonometrik usul. Keltirish formulasiga ko'ra $\sin 36^\circ = \cos 54^\circ$.
 $\sin 36^\circ = \cos(18^\circ + 36^\circ)$. Ikkilangan burchak, darajani pasaytirish va qo'shish formulasidan foydalanamiz:

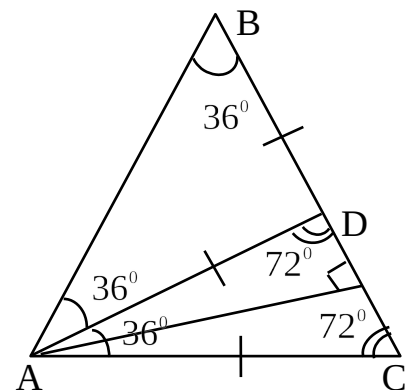
$$2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ = \cos 18^\circ \cos 36^\circ - \sin 18^\circ \sin 36^\circ,$$

$$2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ = \cos 18^\circ (1 - 2 \sin^2 18^\circ) - 2 \sin^2 18^\circ \cos 18^\circ.$$

Tenglikning har ikkala tomonini $\cos 18^\circ$ ($\cos 18^\circ > 0$) ga bo'lib yuboramiz.
 Natijada $4 \sin^2 18^\circ + 2 \sin 18^\circ - 1 = 0$, ($\sin 18^\circ > 0$) tenglama hosil bo'ladi. Bundan

tenglamaning ildiz $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$.

Geometrik usul. ABC teng yonli uchburchakda $AB = BC = a$, $AC = b$, $\angle ABC = 36^\circ$ bo'lsin (1-rasmga qarang). ABC uchburchakning BC tomonida shunday D nuqta olamiz, natijada $BD = DA = AC$ bo'lsin. ABC va ADC uchburchaklarning 3 ta burchagi teng bo'lgani uchun ular o'xshash. Shuning uchun $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{DC}$, $AC^2 = AB \cdot DC$. $DC = a - b$ bo'lgani



1-rasm.

uchun $b^2 = a^2 - ab$. Uni a^2 bo'lib yuboramiz: $\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{b}{a} - 1 = 0$. Bundan

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \quad \sin 18^\circ = \cos 72^\circ = \frac{\frac{1}{2} CD}{AC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{CD}{AC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AC}{AB} = \frac{b}{2a}, \quad \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

Xulosa va takliflar. Teoremlarni isbotlash, geometrik va algebraik masalalarni yechishda bunday usullar o'quvchilarda masala yechishga bo'lgan motivatsiyaning rivojlanishiga hamda mantiqiy tafakkurni chuqurlashishda ijobiy natijalarni beradi. Trigonometriyaning matematik instrument sifatidagi ahamiyati

matematik nazariyalarning chuqurlashtirilishi bilan belgilanadi va bunda matematik tushunchalarni trigonometriya bilan bog'liq holda o'rganilishi analitik tafakkurni rivojlanishiga yordam beradi. Trigonometrik usul matematikani o'rganish jarayonida bog'langan-integrativlik (o'quv fanining ichki bog'liqligi), integrativlik (fanlararo aloqadorlik) ni mustahkamlash uchun xizmat qiladi.

Adabiyotlar

1. U.X. Xonqulov. Trigonometrik tengsizliklarni yechishning nostandart usullari. *FIZIKA, MATEMATIKA va INFORMATIKA* -Toshkent, 2024. -№ 1. - B.51-58.
2. Tuktamyshev N.K., Gorskaya T.Yu. APOS Theory in Learning Mathematics (Using Trigonometry as an Example). *Integration of Education*. 2024; 28(1):111–124.
3. Ball, D. L. The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. *Elementary School Journal*. 2022; -№ 4, pp.49 - 56.
4. Попов Н.И. Об учебно-методическом обеспечении преподавания школьного курса тригонометрии. Диагностико-технологическое обеспечение преемственности в системе образования: материалы второй всеросс. науч.-практ. конф. - Кошкар-Ола -Сургут, 2018.-С.81.
5. Gurwinder Singh. Hyperspace AR: an augmented reality application to enhance spatial skills and conceptual knowledge of students in trigonometry. *Multimedia Tools and Applications*. 2024; 83:60881–60902.
6. Wahyu Hidayat. How can android-based trigonometry learning improve the math learning process?. *Digital Learning Innovations*. 2023; -№ 9, pp.1 - 13.
7. А.О. Келдибекова. Базовые принципы решения олимпиадных заданий по тригонометрии. *Педагогические науки*. № 9, 2018; -С. 16-23.