

НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБ ОДНОЗНАЧНОМ РЕШЕНИИ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДВУМЯ ЛИНИЯМИ ВЫРОЖДЕНИЯ.

Бегимкулов Фозил Хидирович

Международный Университет Нордик старший преподаватель

Tel: 930052030 e-mail: beginqulov.fozil181511@gmail.com

Аннотация. В настоящей статье исследовано существование и единственность решения аналога проблемы Франкля с нелокальным условием для вырожденного уравнения параболо-гиперболического типа. Существование и единственность решения исследуемой проблемы доказывается принципом экстремума, а существование решения - методом интегральных уравнений.

Ключевые слова: Краевая задача, параболо-гиперболический тип, принцип экстремума, метод интегральных уравнений, вырождающееся уравнение и интегрально дифференциальный оператор.

IKKITA BUZILISH CHIZIG'IGA EGA ARALASH TIPDAGI TENGLAMA UCHUN NOLOKAL MASALANING BIR QIYMATLI YECHIMI HAQIDA AYRIM NATIJALAR

Begimqulov Fozil Xidirovich

Xalqaro Nordik universiteti katta o'qituvchisi

Annotatsiya. Ushbu maqolada, bir xil darajali ikkita buzulish chizig'iga ega bo'lgan parabolo-giperbolik tipdagi tenglama uchun qo'yilgan nolokal shartli, Frankl masalasiga o'xshash masala yechimining mavjudligi va yagonaligi o'rganilgan. Qo'yilgan masala yechimining yagonaligi ekstremum prinsipi yordamida, mavjudligi esa integral tenglamalar usuli bilan isbotlangan.

Kalit so'zlar: Chegaraviy masala, yechimning mavjudligi va yagonaligi, aynigan tenglama, parabolik giperbolik tip, ekstremum prinsipi, integral tenglamalar usuli.

SOME RESULTS ON THE UNIQUE SOLUTION OF A NONLOCAL PROBLEM FOR A MIXED-TYPE EQUATION WITH TWO DEGENERATION LINES

Begimkulov Fozil Khidirovich

Annotation. *In this paper, the existence and the uniqueness of solution of the Frankl type boundary value problem with nonlocal condition for the degenerating parabolic-hyperbolic equation was investigated. The uniqueness of solution of the investigated problem was proved by an extreme principle and the existence of solution by the method integral equations.*

Key words: *Boundary value problem, existence and uniqueness of solution, degenerating equation, parabolic-hyperbolic type, a principle an extremum, method of integral equations.*

Введение

В теории частных производных было открыто новое направление. Работа А.В. Бицадзе [4] впервые предложила и исследовала задачу типа Франкля для модельных уравнений смешанного типа. Помните, что задачи Франкля для уравнения Лаврентьева-Бицадзе были изучены в исследованиях [1] и [2]. Gou-chun Wen и Н. Begehr доказали существование решения задачи Франкля для общего уравнения Лаврентьева-Бицадзе [3]. В.А. Елеев [7] и А.В. Псху [13] изучают краевые задачи с условием Франкля для не вырождающегося смешанного типа уравнений. М. М. Смирнов [15], исследовали различные краевые задачи и задачи со смешением для вырождающегося смешанного и гиперболического типов уравнений. О. Х. Абдуллаев [5] и Б. И. Исломов, Ф. Х. Бегимкулов [6], [13] исследовали краевые задачи с условием Франкля для уравнений параболо-гиперболического типа с двумя линиями вырождения.

Постановка задачи.

В статье рассматривается краевая задача типа Франкля для параболо-гиперболических уравнений.

$$0 \equiv \begin{cases} y^{m+1} u_{xx} - x^{n_0} u_y, & \text{в } \Omega_0, \\ (-y)^n u_{xx} - x^n u_{yy}, & \text{в } \Omega_1, \\ y^m u_{xx} - (-x)^m u_{yy}, & \text{в } \Omega_2, \end{cases} \quad (1)$$

где $n_0, n, m = \text{const}$, $n_0, m, n > 0$, в области Ω - область, ограниченная при $x > 0$, $y > 0$, отрезками AB , BB_0 , B_0A_0 , A_0A прямых $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $x = 0$ при

$x > 0, y < 0$ ($x < 0, y > 0$) ограниченной прямой $x = 0$ ($-1 < y < 0$), ($-1 \leq x \leq 0$) $y = 0$

характеристиками $BC: x^q + (-y)^q = 1$, ($A_0D: y^p + (-x)^p = 1$) уравнения (1).

Здесь,

$$2q = n + 2, 2p = m + 2, 2\beta = m / (m + 2), 2\alpha = n / (n + 2), \alpha_0 = (n_0 + 1) / (n_0 + 2)$$

причем

$$0 < 2\alpha, 2\beta < 1, 1 < 2\alpha_0 < 2, \quad (2)$$

$$\alpha_0 > 2\alpha. \quad (3)$$

Введем следующие обозначения:

$$J_1 = \{(x, y): 0 < x < 1, y = 0\}, J_2 = \{(x, y): 0 < y < 1, x = 0\}, \Omega_0 = \Omega \cap \{y > 0, x > 0\},$$

$$\Omega_1 = \Omega \cap \{y < 0, x > 0\}, \Omega_2 = \Omega \cap \{y > 0, x < 0\}, \Omega_{11} = \Omega_1 \cap \{(x, y): x + y > 0\},$$

$$\Omega_{12} = \Omega_1 \cap \{(x, y): x + y < 0\}, \Omega_{21} = \Omega_2 \cap \{(x, y): x + y > 0\},$$

$$\Omega_{22} = \Omega_2 \cap \{(x, y): x + y < 0\}, \Omega^* = \Omega_0 \cup \Omega_{11} \cup J_1, \Omega^{**} = \Omega_0 \cup \Omega_{21} \cup J_2.$$

Обозначим, через

$$\theta_1(x) = \left(\frac{x^q}{2}\right)^{1/q} - i \left(\frac{x^q}{2}\right)^{1/q}, \theta_2(x) = \left(\frac{1+x^q}{2}\right)^{1/q} - i \left(\frac{1-x^q}{2}\right)^{1/q}, \quad (4)$$

$$\theta_1^*(y) = -\left(\frac{y^p}{2}\right)^{1/p} + i \left(\frac{y^p}{2}\right)^{1/p}, \theta_2^*(y) = -\left(\frac{1+y^p}{2}\right)^{1/p} + i \left(\frac{1-y^p}{2}\right)^{1/p}, \quad (5)$$

-аффикс точки пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точек $(x, 0) \in J_1$ ($(0, y) \in J_2$) с характеристиками BC_0 и AC_0 (A_0C_1 и AC_1) соответственно.

Задача. F_B Найти функцию $u(x, y)$, обладающую следующими свойствами:

1) $u(x, y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^{2,1}(\Omega_0) \cap C^2(\Omega_{11} \cup \Omega_{12} \cup \Omega_{21} \cup \Omega_{22})$;

2) $u(x, y)$ удовлетворяет уравнения (1) в областях $\Omega_0, \Omega_{11}, \Omega_{12}, \Omega_{21}$ и Ω_{22} ; 3)

$u_x \in C(\Omega^{**})$, причем $u_x(+0, y)$ может иметь особенность порядка меньше $1 - \alpha_0$

при $y \rightarrow 0$ и ограничена при $y \rightarrow 1$; 4) $y^{-(m+1)}u_y \in C(\Omega_0 \cup J_1)$ и $u_y \in C(\Omega_1 \cup J_1)$

причем $u_y(x, +0)$ может иметь особенность порядка меньше $1 - 2\beta$ при $x \rightarrow 1$, а

при $x \rightarrow 0$ ограничена, кроме того, на интервале AB выполняется условия склеивание:

$$\lim_{y \rightarrow +0} y^{-(m+1)} u_y(x, y) = - \lim_{y \rightarrow -0} u_y(x, y), \quad (x, 0) \in J_1, \quad (6)$$

5) $u(x, y)$ удовлетворяет следующим краевым условиям:

$$u|_{BB_0} = \varphi_0(y), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (7)$$

$$a_1(x) D_{0x^{2q}}^{1-\alpha} u[\theta_1(x)] + b_1(x) D_{x^{2q_1}}^{1-\alpha} u[\theta_2(x)] = c_1(x), \quad 0 < x < 1, \quad (8)$$

$$a_2(y) D_{0y^{2p}}^{1-\beta} u[\theta_1^*(y)] + b_2(y) D_{y^{2q_1}}^{1-\beta} u[\theta_2^*(y)] = c_2(y), \quad 0 < y < 1, \quad (9)$$

$$u(-x, 0) - \mu_1(x) u(+x, 0) = \rho_1(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (10)$$

$$u_x(0, -y) - \mu_2(y) u_x(0, +y) = \rho_2(y), \quad 0 < y < 1, \quad (11)$$

где $\varphi_0(y), a_1(x), b_1(x), c_1(x), \mu_1(x), \rho_1(x), a_2(y), b_2(y), c_2(y), \mu_2(y), \rho_2(y)$ -заданные непрерывные функции, причем

$$\varphi_0(y) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1), \quad (12)$$

$$a_1(x), b_1(x), c_1(x) \in C^2[2^{-1/q}, 1], \quad (13)$$

$$\mu_1(x) \neq 1, x \in (0, 1), \mu_1(x), \rho_1(x) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1), \quad (14)$$

$$a_2(y), b_2(y), c_2(y) \in C^3[2^{-1/p}, 1], \quad (15)$$

$$\mu_2(y) \neq 1, y \in (0, 1), \mu_2(y), \rho_2(y) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1). \quad (16)$$

Функциональное соотношение $\tau_1^\pm(x), \nu_1^\pm(x)$ и $\tau_2^\pm(y), \nu_2^\pm(y)$.

Решение задачи Коши для уравнения (1) в области Ω_{11}^- удовлетворяющее условиям $\tau_1^-(x) = u(x, -0), 0 \leq x \leq 1$ $\nu_1^-(x) = u_y(x, -0), 0 < x < 1$, для уравнения (1), дается формулой [4]:

$$u(x, y) = \gamma_1 \int_0^1 \tau_1^-(z_1^{1/2q}) z^{\alpha-1} (1-z)^{\alpha-1} dz - \gamma_2 x y \int_0^1 z_1^{-1/2q} \nu_1^-(z_1^{1/2q}) z^{-\alpha} (1-z)^{-\alpha} dz, \quad (17)$$

где

$$z_1|_{BC_0} = x^{2q} + (-y)^{2q} + 2x^q(-y)^q(2z-1)|_{BC_0} \quad \gamma_1 = \frac{\Gamma(2\alpha)}{\Gamma^2(\alpha)}, \quad \gamma_2 = \frac{\Gamma(2-2\alpha)}{\Gamma^2(1-\alpha)}.$$

В силу (4) с учетом свойств интегро-дифференциальных операторов [4§. (4.1)][5] из (17) имеем

$$u[\theta_1(x)] = \gamma_1 \Gamma(\alpha) (x^{2q})^{1-2\alpha} D_{0x^{2q}}^{-\alpha} (x^{2q})^{\alpha-1} \tau_1^-(x) + \gamma_2 \Gamma(1-\alpha) 4^{2\alpha-1} D_{0x^{2q}}^{\alpha-1} (x^{2q})^{-\alpha-1/2q} \nu_1^-(x). \quad (18)$$

Подставив (18) в краевое условие (8) получим соотношение между $\tilde{\tau}_1^-(x)$ и $\tilde{\nu}_1^-(x)$ на отрезке J_1 , принесенное из области Ω_{11}^- :

$$d(x)\tilde{\nu}_1^-(x) = x^\alpha (1-x)^\alpha \tilde{c}_1(x) - \gamma_1 \Gamma(\alpha) \left[(1-x)^\alpha \tilde{a}_1(x) D_{0x}^{1-2\alpha} \tilde{\tau}_1^-(x) + x^\alpha \tilde{b}_1(x) D_{x1}^{1-2\alpha} \tilde{\tau}_1^-(x) \right], \quad (19)$$

где

$$\tilde{\tau}_1^-(x) = \tau_1^-(x^{1/2q}), \tilde{\nu}_1^-(x) = \nu_1^-(x^{1/2q}), \tilde{a}_1(x) = a_1(x^{1/2q}), \tilde{b}_1(x) = b_1(x^{1/2q}), \tilde{c}_1(x) = c_1(x^{1/2q}),$$

$$d(x) = \gamma_2 \Gamma(1-\alpha) 4^{2\alpha-1} \left(x^{\alpha-1/2} (1-x)^\alpha \tilde{a}_1(x) + x^{2\alpha-1/2} \tilde{b}_1(x) \right).$$

Используя решение задачи Коши с начальными данными $\tau_2^-(y) = u(-0, y)$, $0 \leq y \leq 1$, $\nu_2^-(y) = u_x(-0, y)$, $0 < y < 1$ для уравнения (1) в области Ω_{21}^- , с учетом (5) и подставляя (9), получим функциональное соотношение между $\tilde{\tau}_2^-(y)$ и $\tilde{\nu}_2^-(y)$ на отрезке J_2 , принесенное из области Ω_{21}^- :

$$e(y)\tilde{\nu}_2^-(y) = y^\beta (1-y)^\beta \tilde{c}_2(y) - \gamma_3 \Gamma(\beta) \left[(1-y)^\beta \tilde{a}_2(y) D_{0y}^{1-2\beta} \tilde{\tau}_2^-(y) + y^\beta \tilde{b}_2(y) D_{y1}^{1-2\beta} \tilde{\tau}_2^-(y) \right], \quad (20)$$

здесь

$$e(y) = \gamma_4 \Gamma(1-\beta) 4^{2\beta-1} \left(y^{\beta-1/2} (1-y)^\beta \tilde{a}_2(y) + y^{2\beta-1/2} \tilde{b}_2(y) \right), \tilde{\tau}_2^-(y) = \tau_2^-(y^{1/2p}),$$

$$\tilde{\nu}_2^-(y) = \nu_2^-(y^{1/2p}), \tilde{a}_2(y) = a_2(y^{1/2p}), \tilde{b}_2(y) = b_2(y^{1/2p}), \tilde{c}_2(y) = c_2(y^{1/2p}),$$

$$\gamma_3 = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}, \gamma_4 = \frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}.$$

Из уравнения $u_{xx} - x^{n_0} y^{-(m+1)} u_y = 0$ при $y \rightarrow +0$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\tau_1^{n+}(x) - x^{n_0} \nu_1^+(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (21)$$

где

$$\tau_1^+(x) = u(x, +0) \text{ и } \nu_1^+(x) = \lim_{y \rightarrow +0} y^{-(m+1)} u_y(x, y).$$

Решая уравнения (21) с условиями $\tau_1^+(0) = \tau_0(0)$ и $\tau_1^+(1) = \varphi_0(0)$, получим функциональное соотношение между $\tilde{\tau}_1^+(x)$ и $\tilde{\nu}_1^+(x)$ [7]:

$$\tilde{\tau}_1^+(x) = \int_0^1 \tilde{G}(x, t) \tilde{\nu}_1^+(t) dt + \tilde{f}(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (22)$$

где $G(x, t)$ - функция Грина.

$$\tilde{G}(x_1, t) = 1/2q \cdot t^{(n_0+1)/2q-1} G(x^{1/2q}, t^{1/2q}), \quad G(x, t) = \begin{cases} x(t-1), & 0 \leq x \leq t, \\ t(x-1), & t \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (23)$$

$$\tilde{\tau}_1^+(x) = \tau_1^+(x^{1/2q}), \quad \tilde{\nu}_1^+(x) = \nu_1^+(x^{1/2q}), \quad \tilde{f}(x) = f(x^{1/2q}), \quad f(x) = \tau_0(0) + x(\varphi_0(0) - \tau_0(0)), \quad (24)$$

Единственность решения.

Теорема. Если выполнены условия (2), то в области Ω поставленной решение задачи единственно.

Лемма. Если выполнены условия

$$d(x) \neq 0, \quad \tilde{a}_1(x) < 0, \quad \tilde{b}_1(x) < 0, \quad 0 < x < 1, \quad (25)$$

и $\rho_1(x) \equiv \rho_2(y) \equiv \tilde{c}_1(x) \equiv \tilde{c}_2(y) \equiv 0$, то решение $u(x, y)$ достигает свой положительный максимум и отрицательный минимум в замкнутой области $\bar{\Delta}$ лишь на $\bar{J}_1 \cup \bar{J}_2 \cup \overline{BB_0}$.

Доказательство. В силу принципа экстремума для параболических уравнений[3], решение $u(x, y)$ уравнения (1) в замкнутой области $\bar{\Omega}_0$ достигает своего положительного максимума и отрицательного минимума. Покажем, что решение $u(x, y)$ уравнения (1) не достигает своего положительного максимума (отрицательного минимума) на интервалах J_1 и J_2 . Предположим обратное. Пусть функция $u(x, y)$ достигает свой положительный максимум (отрицательный минимум) в точке $N(x_0, 0)$ на интервала J_1 , тогда учитывая $\tilde{c}_1(x) \equiv 0$ из (19), получим

$$d(x_0)\tilde{\nu}_1^-(x_0) = -\gamma_1\Gamma(\alpha) \left[(1-x_0)^\alpha \tilde{a}_1(x_0) D_{0x_0}^{1-2\alpha} \tilde{\tau}_1^-(x_0) + x_0^\alpha \tilde{b}_1(x_0) D_{x_01}^{1-2\alpha} \tilde{\tau}_1^-(x_0) \right]. \quad (26)$$

Отсюда, в силу (25) и принципа экстремума для дифференциальных операторов дробного порядка, в точке положительного максимума (отрицательного минимума) $D_{0x_0}^{1-2\alpha}[\dots]$ и $D_{x_01}^{1-2\alpha}[\dots]$ строго положительно (отрицательно), т.е. $D_{0x_0}^{1-2\alpha} \tilde{\tau}_1^-(x_0) > 0$, $D_{x_01}^{1-2\alpha} \tilde{\tau}_1^-(x_0) > 0$ ($D_{0x_0}^{1-2\alpha} \tilde{\tau}_1^-(x_0) < 0$ и $D_{x_01}^{1-2\alpha} \tilde{\tau}_1^-(x_0) < 0$). Из (26), получим $\tilde{\nu}_1^-(x_0) > 0$ ($\tilde{\nu}_1^-(x_0) < 0$). Учитывая (6) и (25), имеем $\tilde{\nu}_1^+(x_0) > 0$ ($\tilde{\nu}_1^+(x_0) < 0$). Это неравенство противоречит неравенству $\tilde{\nu}_1^+(x_0) < 0$ ($\tilde{\nu}_1^+(x_0) > 0$), которое непосредственно следует из (21). Таким образом, решение $u(x, y)$ не

достигает свой положительный максимум (отрицательный минимум) на интервале J_1 .

Аналогично доказывается, что решение $u(x, y)$ не достигает свой положительный максимум (отрицательный минимум) на интервале J_2 . **Лемма доказано.**

В точке $A(0, 0)$ в силу (2) из (20) имеем $\tau_2^-(0) = 0$, т.е. $u(0, 0) = 0$. На основании леммы, из (2), учитывая непрерывность функции $u(x, y)$ в замкнутой области $\bar{\Omega}_0$, решение первой краевой задачи для уравнения (1) в области Ω_0 , тождественно равно нулю при $\varphi_0(y) \equiv 0$, т.е. $u(x, y) \equiv 0$ в $\bar{\Omega}_0$. Так как $u(x, y) \equiv 0$ в области $\bar{\Omega}_0$, имеем $\tilde{\tau}_1^-(x) \equiv 0$ и в силу (19), $\tilde{\nu}_1^-(x) \equiv 0$ (имеем $\tilde{\tau}_2^-(y) \equiv 0$ и в силу (20), $\tilde{\nu}_2^-(y) \equiv 0$). Из решение задачи Коши получим $u(x, y) \equiv 0$ в области $\bar{\Omega}_{11}(\bar{\Omega}_{21})$.

В силу решения однородной первой краевой задачи для уравнения (1) в области Ω_0 , с учетом (8)((9)), получим $u(-x, 0) - \mu_1(x)u(+x, 0) \equiv 0$ ($u_x(0, -y) - \mu_2(y)u_x(0, +y) \equiv 0$). Следовательно, решение задачи Коши-Гурса для уравнения (1) с нулевыми данными тождественно равно нулю в области $\bar{\Omega}_{12}(\bar{\Omega}_{22})$, т.е. $u(x, y) \equiv 0$ в области $\bar{\Omega}_{12}(\bar{\Omega}_{22})$. **Теорема доказана.**

Существования решения.

Исключая $\tilde{\tau}_1^+(x) = \tilde{\tau}_1^-(x)$ из (19) и (21), получим интегральное уравнение

$$\tilde{\nu}_1^+(x) = \int_0^1 \tilde{K}(x, s) \tilde{\nu}_1^+(s) ds + \tilde{H}(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (27)$$

где

$$\tilde{K}(x, s) = \tilde{K}_1(x, s) + \tilde{K}_2(x, s), \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \tilde{K}_1(x, s) = & 2\alpha\gamma_1\Gamma(\alpha)(1-x)^\alpha x^{2\alpha-1} \frac{\tilde{a}_1(x)}{d(x)} \int_0^1 (1-z)^{2\alpha-1} \tilde{G}(xz, s) dz - \\ & - 2\alpha\gamma_1\Gamma(\alpha)x^\alpha (1-x)^{2\alpha-1} \frac{\tilde{b}_1(x)}{d(x)} \int_0^1 z^{2\alpha-1} \tilde{G}(x+(1-x)z, s) dz, \quad 0 \leq z \leq x, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \tilde{K}_2(x,s) = & y_1 \Gamma(\alpha) (1-x)^\alpha x^{2\alpha} \frac{\tilde{a}_1(x)}{d(x)} \int_0^1 (1-z)^{2\alpha-1} \frac{d}{dx} \tilde{G}(xz,s) dz - \\ & - 2\alpha y_1 \Gamma(\alpha) x^\alpha (1-x)^{2\alpha} \frac{\tilde{b}_1(x)}{d(x)} \int_0^1 z^{2\alpha-1} \frac{d}{dx} \tilde{G}(x+(1-x)z,s) dz, \quad x \leq z \leq 1, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}(x) = & \frac{2\alpha y_1 \Gamma(\alpha)}{d(x)} \left(x^{2\alpha-1} (1-x)^\alpha \tilde{a}_1(x) \int_0^1 (1-z)^{2\alpha-1} f(xz) dz - \right. \\ & - x^\alpha (1-x)^{2\alpha-1} \tilde{b}_1(x) \int_0^1 z^{2\alpha-1} f(x+(1-x)z) dz \left. \right) + \frac{y_1 \Gamma(\alpha)}{d(x)} \left(x^{2\alpha} (1-x)^\alpha \tilde{a}_1(x) \int_0^1 z (1-z)^{2\alpha-1} f'(xz) dz + \right. \\ & \left. + x^\alpha (1-x)^{2\alpha} \tilde{b}_1(x) \int_0^1 z^{2\alpha-1} (1-z) f'(x+(1-x)z) dz \right) + \frac{\tilde{c}_1(x)}{d(x)} x^\alpha (1-x)^\alpha. \end{aligned} \quad (31)$$

Учитывая (2), (7), (12), (13), $d(x) \neq 0$ из (28) и (29)-(31) следует, что допускает оценку

$$|\tilde{K}_1(x,s)| \leq c_1 \cdot x^{2\alpha-1} s^{(n_0+1)/2q-1} + c_2 \cdot (1-x)^{2\alpha-1} s^{(n_0+1)/2q-1}, \quad (32)$$

$$|\tilde{K}_2(x,s)| \leq c_3 \cdot s^{(n_0+1)/2q-1}, \quad (33)$$

$$|\tilde{H}(x)| \leq c_3 x^{2\alpha-1} + c_4 (1-x)^{2\alpha-1}, \quad (34)$$

где $c_1, c_2, c_3, c_4 = \text{const}$, причем $H(x)$ может обращаться в бесконечность порядка меньше $1-2\alpha$ при $x \rightarrow 1$, а при $x \rightarrow 0$ ограничена.

Таким образом, в силу (32), (33) и (34) интегральное уравнение (27) является интегральным уравнением Фредгольма второго рода со слабой особенностью[1], однозначная разрешимость которой следует из единственности решения поставленной задачи, т.е. уравнение (27) имеет единственное решение, $\nu_1^+(x) \in C^2(0,1)$ причем $\nu_1^+(x)$ может иметь особенность порядка меньше $1-2\alpha$ при $x \rightarrow 1$, а при $x \rightarrow 0$ ограничено. После определения $\nu_1^-(x)$ из (19), с учетом (22), находим функцию $\tau_1^+(x)$. В силу (2), с учетом (23) и (22) заключаем, что $\tau_1(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$.

Второй соотношение между $\tau_2^+(y)$ и $\nu_2^+(y)$, принесенное на J_2 из области Ω_0 представимо в виде [3],[6]:

$$\nu_2^+(y) = y^{-(m+1)} \frac{d}{dy} \int_0^y a(y-t) t^{m+1} \tau_2^+(t) dt + E(y, \varphi_0, \tau_1^+), \quad (35)$$

здесь

$$a(y-t) = A(y-t) - \frac{(m+2)^{1-\alpha_0}}{\Gamma(1-\alpha_0)} (y^{m+2} - t^{m+2})^{\alpha_0-1}, \quad (36)$$

$$E(y, \varphi_0, \tau_1^+) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{d}{dx} \left(\int_0^1 G_1(x, \xi, y; \alpha_0) \tau_1^+(\xi) \xi^{\alpha_0} d\xi + y^{-(m+1)} \frac{d}{dy} \int_0^y G_3(x, y-t; \alpha_0) \varphi_0(t) t^{m+1} dt \right), \quad (37)$$

где $A(y-t)$ - непрерывно дифференцируемая функция при $y \geq t$ и $G_1(x, \xi, y; \alpha_0)$ - функция Грина первой краевой задачи [8].

Заменяя y на $(p^2 y)^{1/2p}$ в (20) и (35), получим

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_2^-(y) = & \frac{\bar{c}_2(y)}{\bar{e}(y)} - \frac{4^{2\beta-1} p^{4\beta-1} \Gamma(1-\beta) \gamma_4}{k_2 \Gamma(1-2\beta) \bar{e}(y)} \bar{a}_2(y) y^\beta \int_0^y s^{\beta-1/2} (t-s)^{-2\beta} \bar{\nu}_2^-(s) + \\ & + \frac{4^{2\beta-1} p^{1-2\beta} \Gamma(1-\beta) \gamma_4}{k_2 \Gamma(1-2\beta) \bar{e}(y)} \bar{b}_2(y) (1-y)^\beta \int_y^{1/p^2} s^{\beta-1/2} (s-t)^{-2\beta} \bar{\nu}_2^-(s), \end{aligned} \quad (38)$$

$$\bar{\nu}_2^+(y) = \frac{d}{dy} \int_0^y \bar{A}(y-t) \bar{\tau}_2^+(t) dt - k_1 p^{2(\alpha_0-1)} \frac{d}{dy} \int_0^y (y-t)^{\alpha_0-1} \bar{\tau}_2^+(t) dt + \bar{E}(y, \varphi_0, \tau_1^+), \quad (39)$$

здесь $k_1 = \frac{(2p)^{1-\alpha_0}}{\Gamma(1-\alpha_0)}$, $\bar{\tau}_2^\pm(y) = \tau_2^\pm \left[(p^2 y)^{1/2p} \right]$, $\bar{\nu}_2^\pm(y) = \nu_2^\pm \left[(p^2 y)^{1/2p} \right]$,

$$\bar{E}(y, \varphi_0, \tau_1^+) = E \left((p^2 y)^{1/2p}, \varphi_0, \tau_1^+ \right), \bar{A}(y-t) = A \left((p^2 y)^{1/2p} - (p^2 t)^{1/2p} \right).$$

Исключив $\bar{\tau}_2^-(y)$ из соотношений (38) и (40), с учетом 3) получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$\bar{\nu}_2^+(y) = \int_0^{1/p^2} N(y, z) \bar{\nu}_2^+(z) dz + F(y, \tau_1), \quad 0 < y < 1, \quad (40)$$

где

$$N(y, z) = \begin{cases} N_1(y, z), & 0 \leq z \leq y \\ N_2(y, z), & y \leq z \leq 1 \end{cases} \quad (41)$$

$$N_1(y, z) = k_2 \frac{d}{dy} \int_z^y \frac{\bar{A} \cdot \bar{a}_2(t)}{\bar{e}(t)} t^\beta (t-z)^{-2\beta} dt + k_4 \frac{d}{dy} \int_z^y \frac{\bar{a}_2(t)}{\bar{e}(t)} t^\beta (t-z)^{-2\beta} (y-t)^{\alpha_0-1} dt +$$

$$+k_3 \frac{d}{dy} \int_0^z \frac{\bar{A} \cdot \bar{b}_2(t)}{\bar{e}(t)} (1-t)^\beta (z-t)^{-2\beta} dt + k_5 \frac{d}{dy} \int_0^z \frac{\bar{b}_2(t)}{\bar{e}(t)} (1-t)^\beta (z-t)^{-2\beta} (y-t)^{\alpha_0-1} dt, \quad (42)$$

$$N_2(y, z) = k_3 \frac{d}{dy} \int_0^y \frac{\bar{A} \cdot \bar{b}_2(t)}{\bar{e}(t)} (1-t)^\beta (z-t)^{-2\beta} dt + k_5 \frac{d}{dy} \int_0^y \frac{\bar{b}_2(t)}{\bar{e}(t)} (1-t)^\beta (z-t)^{-2\beta} (y-t)^{\alpha_0-1} dt, \quad (43)$$

$$F(y, \tau_1) = \frac{d}{dy} \int_0^y \frac{\bar{A} \cdot \bar{c}_2(t)}{\bar{e}(t)} dt - k_1 p^{2(\alpha_0-1)} \frac{d}{dy} \int_0^y \frac{\bar{c}_2(t)}{\bar{e}(t)} (y-t)^{\alpha_0-1} dt + \bar{E}(y, \varphi_0, \tau_1^+), \quad (44)$$

Здесь

$$k_2 = \frac{4^{2\beta-1} \Gamma(1-\beta) p^{4\beta-1} \gamma_4}{\Gamma(1-2\beta)}, \quad k_3 = \frac{4^{2\beta-1} \Gamma(1-\beta) p^{1-2\beta} \gamma_4}{\Gamma(1-2\beta)}, \quad k_4 = \frac{4^{2\beta-1} \Gamma(1-\beta) p^{4\beta+2\alpha_0-3} \gamma_4 k_1}{\Gamma(1-2\beta)},$$

$$k_5 = \frac{4^{2\beta-1} \Gamma(1-\beta) p^{2\alpha_0-2\beta} \gamma_4 k_1}{\Gamma(1-2\beta)}.$$

Учитывая (15), $e(y) \neq 0$ и непрерывно дифференцируемая функция $A(y-t)$ из (42) и (43) имеем оценку

$$|N_1(y, z)| \leq c_5 \cdot z^{\beta-1/2} (y-z)^{\alpha_0-2\beta-1}, \quad (45)$$

$$|N_2(y, z)| \leq c_6 \cdot z^{\beta-1/2} y^{\alpha_0-1}. \quad (46)$$

В силу (45), (46) из (41) получим

$$|N(y, z)| \leq c_5 \cdot z^{\beta-1/2} (y-z)^{\alpha_0-2\beta-1} + c_6 \cdot z^{\beta-1/2} y^{\alpha_0-1}, \quad (47)$$

Следовательно, в силу (2), (3), (12) и (15) из (44), следует оценка

$$|F(y, \tau_1)| \leq c_7 \cdot y^{\alpha_0-1}, \quad (48)$$

$c_5, c_6, c_7, c_8 = \text{const}$, причем $F \in C^2(0,1)$ - имеет особенность порядка меньше $1-\alpha_0$ при $y \rightarrow 0$, а при $y \rightarrow 1$ ограничена.

Так как $\alpha_0 - 2\beta - 3/2 > -1$, то из оценку (47) с учетом (2) и (3) следует, что ядро $N(y, z)$ имеет слабую особенность.

Таким образом, из (47), (48) заключаем, что интегральное уравнение (40) является интегральным уравнением Фредгольма второго рода со слабой особенностью[1], разрешимость которого следует из единственности поставленной решения задачи причем, $\bar{v}_2^+(y) \in C^2(0,1)$ - может обращаться в бесконечность порядка меньше $1-\alpha_0$ при $y \rightarrow 0$, а при $y \rightarrow 1$ ограничена. После

определения $\nu_2^+(y)$ с учетом 3) находим $\bar{\nu}_2^-(y) \in C^2(0,1)$, далее из (20) заключаем, что $\bar{\tau}_2^-(y) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$.

Следовательно, поставленной решение задачи в области Ω_0 - восстанавливается как решение первой краевой задачи, в области $\Omega_{11}^-(\Omega_{21}^-)$ восстанавливается как решение задачи Коши (17). Отсюда, в силу (10) ((11)) восстанавливается решение в области $\Omega_{12}(\Omega_{22})$ как решения задачи Коши-Гурса, удовлетворяющее условиям $u_x(0,y) = \nu_2^+(y)$ и $u(-y,y) = h_1(y)$ ($u_y(x,0) = \nu_1^+(x)$ и $u(x,-x) = h_2(x)$), где $h_1(y)$ ($h_2(x)$)- след решения задачи Коши в области $\Omega_{11}^-(\Omega_{21}^-)$ на характеристике $y = -x$.

Список литературы

1. Gou-chun Wen and H. Begehr. Existence of solutions of Frankl problem for general Lavrent'ev- Bitsadze equations. // Revue Romaine. Math Pure Appl. 45 (2000). P.141-160.
2. Псху А.В. Задача Франкля для уравнений смешанного типа. // «Диссертация на соискание ученой степени канд. физ-мат. наук. НИИ ПМА КБНЦ РАН». 1999 г.-52.с.
3. Михлин С. Г. Интегральные уравнения. // М. 1947.-304 стр.
4. Bitsadze.A.V. Differetial equations of Mixed type. // Mac Millan.co. N.York. 1964.
5. Терсенов С. А. Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе. // Новосибирск. Изд. НГУ. 1973. -144с.
6. Салахитдинов М.С., Менгзияев Б. Краевые **задачи** для одного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения. // Изв. АН. УзССР. сер. физ-мат. наук. 1976 г.
7. Смирнов М.М. Уравнение смешанного типа. // М. Выс. Школа. 1985. -304.
8. Акбарова. С. Х. Краевые задачи для уравнений смешанного параболического и эллиптического-гиперболического типа с двумя линиями и различными порядками вырождения. Диссертация на соискание ученой степени канд. Физ-мат. Наук. 1995. -116 с.

9. Исломов Б. И., Очилова Н.К. О краевой задаче для уравнения параболического типа с двумя линиями и различными порядками вырождения. // УзМЖ. 2005г.Стр. 42-53.
- 10.Абдуллаев О. Х., Бегимкулов Ф.Х. Об исследовании задач типа задачи Франкля с разрывным условием склеивания для вырождающегося уравнения смешанного типа. // Доклады Адыгской (Черкесской) международной Академии наук. 2012 г. Т14. №1. стр. 9-21.
- 11.Исломов Б. И., Бегимкулов Ф.Х. Краевая задача с условием Франкля для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения. // УзМЖ. 2014 г.Стр. 78-91.
- 12.Abdullaev O. X., Begimkulov F.X. About one non-local problem for the degenerating parabolic-hyperbolic type equation// Konuralp Journal of Mathematics Volume 2 №. 1pp. 12(23) 2014
- 13.Бегимкулов Ф.Х. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа с двумя перпендикулярными линиями вырождения. Научный Вестник Бухарского Государственного Университета. 1(12) 2024 г Стр. 61-71.