

Каримов Камолиддин Туйчибоевич

Доцент Ферганского государственного университета,
ВНС Института Математики имени В.И.Романовского АН РУ,

Email: karimovk80@mail.ru

Орипов Дастонбек Дилшодбек угли

Докторант Ферганского государственного университета,
Email: dastonbekoripov94@gmail.com tel: +998993662806

УДК 517.956

**НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ЧЕТНОГО
ПОРЯДКА С ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ**

Аннотация: В данной работе сформулирована и исследована начально-краевая задача с граничным условием третьего рода для одного вырождающегося дифференциального уравнения в частных производных высокого четного порядка в прямоугольнике. Применяя метод Фурье, получена спектральная задача для обыкновенного дифференциального уравнения. Методом функции Грина спектральная задача эквивалентно сведена к интегральному уравнению Фредгольма второго рода с симметричным ядром, откуда следует существование собственных значений и система собственных функций спектральной задачи. С использованием теоремы Мерсера, доказана равномерная сходимость некоторых билинейных рядов, зависящих от найденных собственных функций. Установлен порядок коэффициентов Фурье. Решение изучаемой задачи выписано в виде суммы ряда Фурье по системе собственных функций спектральной задачи. Методом интегралов энергии доказана единственность решения задачи. Получена оценка для решения задачи.

Ключевые слова: функция Бесселя, вырождающееся уравнение, начально-краевая задача, метод разделения переменных, спектральная задача, метод функции Грина, интегральное уравнение, ряд Фурье.

Karimov Kamoliddin Tuychiboevich

Farg'ona davlat universiteti dotsenti,
O'zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasi V.I. Romanovskiy nomidagi
Matematika instituti katta ilmiy xodimi

Email: karimovk80@mail.ru

Oripov Dostonbek Dilshodbek o'g'li

Farg'ona davlat universiteti doktoranti
Email: dastonbekoripov94@gmail.com

BESSEL OPERATORI QATNASHGAN YUQORI JUFT TARTIBLI BUZILADIGAN DIFFERENSIAL TENGLAMA UCHUN BOSHLANG'ICH- CHEGARAVIY MASALA

Annotatsiya. Mazkur maqolada to'g'ri to'rtburchak sohada yuqori juft tartibli buziladigan xususiy hosilali differensial tenglama uchun uchinchi chegaraviy shartli boshlang'ich-chegaraviy masala qo'yilgan va tadqiq qilingan. Furiye usuli yordamida oddiy differensial tenglama uchun spektral masala hosil qilingan. Grin funksiyasi usuli orqali spektral masala ekvivalent tarzda yadrosi simmetrik bo'lgan ikkinchi tur Fredholm integral tenglamasiga keltirilgan, bundan esa spektral masalaning xos sonlari va bunga mos xos funksiyalari sistemasining mavjudligi kelib chiqadi. Mercer teoremasi yordamida topilgan xos funksiyalarga bog'liq bo'lgan ba'zi bichiziqli qatorlarning tekis yaqinlashishi isbotlangan. Furiye koeffitsiyentlarining tartibi aniqlangan. O'rganilayotgan masalaning yechimi spektral masalaning xos funksiyalari sistemasi bo'yicha Furiye qatori ko'rinishida ifodalangan. Energiya integrallar usuli orqali masalaning yechimi yagona ekanligi isbotlangan. Masala yechimi uchun baho olingan.

Kalit so'zlar: Bessel funksiyasi, buziladigan tenglama, boshlang'ich-chegaraviy masala, o'zgaruvchilarni ajratish usuli, spektral masala, Grin funksiyasi usuli, integral tenglama, Furiye qatori.

Karimov Kamoliddin Tuychiboevich

Associate Professor, Fergana State University

Senior Researcher, V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan

Academy of Sciences

Email: karimovk80@mail.ru

Oripov Dostonbek Dilshodbek ugli

PhD Student, Fergana State University

Email: dostonbekoripov94@gmail.com

AN INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A DEGENERATE HIGHER EVEN ORDER DIFFERENTIAL EQUATION WITH THE BESSEL OPERATOR

Abstract. In the present paper, we formulate and investigate an initial-boundary value problem with a third-type boundary condition for a degenerate partial differential equation of higher even order in a rectangle. By applying the Fourier method based on separation of variables, a spectral problem for an ordinary differential equation has been obtained. Using the Green's function method, the spectral problem is equivalently reduced to a second kind Fredholm integral equation with a symmetric kernel, which implies the existence of eigenvalues and

eigenfunctions of the spectral problem. Employing Mercer's theorem, the uniform convergence of certain bilinear series depending on the obtained eigenfunctions is established. The order of the Fourier coefficients is determined. The solution of the studied problem is represented as a Fourier series expansion with respect to the system of eigenfunctions of the spectral problem. By means of energy integral methods, the uniqueness of the solution is proved. An estimate for the solution is obtained, from which its continuous dependence on the given functions follows.

Keywords: Bessel function, degenerate equation, initial-boundary value problem, separation of variables method, spectral problem, Green's function method, integral equation, Fourier series.

I. Введение

Известно, что теория краевых задач для вырождающихся уравнений и уравнений с сингулярными коэффициентами является одним из бурно развивающихся разделов современной теории уравнений в частных производных, с которым сталкиваются при решении многих важных вопросов прикладного характера, т.е. задач газовой динамики, гидродинамики [1], [2], теории бесконечно малых изгибов поверхностей и безмоментной теории оболочек с кривизной переменного знака [3], теории колебаний [4], [5], уравнения математической биологии [6] и др.

В настоящее время интенсивно изучаются начально-краевые задачи в четырехугольной области для вырождающихся дифференциальных уравнений в частных производных высокого четного порядка по пространственным переменным. Например, в работе [7] исследованы начально-граничные задачи для вырождающегося уравнения

$$\frac{\partial^l u}{\partial t^l} = (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial x^k} \left(x^\alpha \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right) + f(x, t), \quad l = \overline{1, 2}, \quad \alpha \in (0, 2k), \quad (1)$$

в прямоугольнике, а в работах [8], [9] - для обобщающих его уравнений.

При рассмотрении начально-краевых задач для вырождающегося уравнения типа (1) существенно влияют значения порядка вырождения α [7], [8], а иногда четность и нечетность числа k . Кроме того, с ростом порядка уравнения, количество вариантов граничных условий увеличивается. Например, в работах [7], [8] при рассмотрении начально-краевых задач для уравнения (1) в прямоугольнике $\Omega = \{0 < x < 1, 0 < t < T\}$ при $0 < \alpha < 1$ заданы граничные условия вида

$$(\partial^j / \partial x^j) u|_{x=0} = 0, \quad j = \overline{0, k-1}; \quad (\partial^q / \partial x^q) u|_{x=1} = 0, \quad q = \overline{0, k-1}, \quad (2)$$

при $\alpha \in (1, k)$, некоторые граничные условия на $x=0$ заменены условием ограниченности, а при $\alpha \in (k, 2k)$ на $x=0$ никаких граничных условий не задано. В работе [9], рассматривая уравнение (1) при $\alpha \in (0, 1)$, заданы граничные условия вида (2), но здесь $q = \overline{k, 2k - 1}$. В работах [10], [11], [12], рассматривается вырождающееся уравнение другого вида с краевыми условиями (2). В работе [13] для одного вырождающегося уравнения поставлена и изучена задача с краевыми условиями, связывающими значения искомой функции и производных по x на $x=0$ и $x=1$. В работе [14] для уравнения (1) при $\alpha=0$, $l=2$, а в работе [12] для вырождающегося уравнения четвертого порядка типа (1) как при $x=0$, так и при $x=1$, заданы условия типа третьего граничного условия. Аналог этой задачи исследована в работе [15].

В данной работе сформулирована и исследована начально-краевая задача с граничными условиями третьего рода для одного вырождающегося дифференциального уравнения в частных производных высокого четного порядка в прямоугольнике.

II. Постановка задачи

В прямоугольнике $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t < T\}$ рассмотрим следующее вырождающееся уравнение высокого четного порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{2\gamma}{t} \frac{\partial u}{\partial t} + bu + \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} \left(x^\alpha \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n}} \right) = f(x, t), \quad (3)$$

где $u = u(x, t)$ - неизвестная функция, $f(x, t)$ - заданная функция, а $\alpha \in (0, 1)$, $0 \leq \gamma < 1/2$, $b \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Исследуем следующую задачу:

Задача U_3 . Найти функцию $u(x, t)$, которая:

- 1) $(\partial^j / \partial x^j) u, (\partial^j / \partial x^j) \left[x^\alpha (\partial^{2n} / \partial x^{2n}) u \right] \in C(\overline{\Omega})$, $j = \overline{0, 2n-1}$,
 $t^{2\gamma} u_t \in C(\overline{\Omega})$, $(\partial^{2n} / \partial x^{2n}) \left[x^\alpha (\partial^{2n} / \partial x^{2n}) u \right], \left(u_{tt} + \frac{2\gamma}{t} u_t \right) \in C(\Omega)$;
- 2) в области Ω удовлетворяет уравнению (3);
- 3) выполняются следующие граничные условия

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad \lim_{t \rightarrow +0} \left[t^{2\gamma} u_t(x, t) \right] = \varphi_2(x), \quad x \in [0, 1] \quad (4)$$

и граничные условия

$$\begin{aligned}\frac{\partial^j}{\partial x^j} u(0, t) &= (-1)^j \frac{\partial^{n+j}}{\partial x^{n+j}} u(0, t), \\ \frac{\partial^j}{\partial x^j} \left(x^\alpha \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} u(x, t) \right) \Big|_{x=0} &= (-1)^j \frac{\partial^{n+j}}{\partial x^{n+j}} \left(x^\alpha \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} u(x, t) \right) \Big|_{x=0}, \\ \frac{\partial^{n+j}}{\partial x^{n+j}} u(1, t) &= 0, \frac{\partial^{n+j}}{\partial x^{n+j}} \left(x^\alpha \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} u(x, t) \right) \Big|_{x=1} = 0, \quad j = \overline{0, n-1}, \quad t \in [0, T],\end{aligned}\quad (5)$$

где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ – заданные непрерывные функции.

III. Единственность решения задачи U_3

Теорема 1. Задача U_3 не может иметь более одного решения.

Доказательство. Предположим, что существуют два решения $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ задачи U_3 . Их разность обозначим через $u(x, t)$. Тогда функция $u(x, t)$ удовлетворяет однородному уравнению (3) и однородным условиям (4) и (5).

Введем следующую вспомогательную функцию:

$$\omega(x, t) = - \int_t^{T_0} t^{-2\gamma} u(x, \xi) d\xi, \quad (x, t) \in \overline{\Omega}_0,$$

где $\forall T_0 \in (0, T]$, а $\Omega_0 = \{(x, t): 0 < x < 1, 0 < t < T_0\}$. Очевидно, что $\overline{\Omega}_0 \subset \overline{\Omega}$.

Функция $\omega(x, t)$ обладает следующими свойствами:

- 1) $\frac{\partial^j \omega}{\partial x^j}, \frac{\partial^j}{\partial x^j} \left(x^\alpha \frac{\partial^{2n} \omega}{\partial x^{2n}} \right), t^{2\gamma} \omega_t, t^{-2\gamma} \frac{\partial}{\partial t} (t^{2\gamma} \omega_t) \in C(\overline{\Omega}_0), \quad j = \overline{0, 2n-1};$
- 2) удовлетворяет условиям (5) при $t \in [0, T_0]$.

Умножая однородное уравнение (3) на функцию $t^{2\gamma} \omega(x, t)$, проинтегрируем полученное равенство по области Ω_0 получаем

$$\int_0^1 \int_0^{T_0} t^{2\gamma} \omega(x, t) \left(\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} \left[x^\alpha \frac{\partial^{2n} u(x, t)}{\partial x^{2n}} \right] + t^{-2\gamma} \frac{\partial}{\partial t} \left[t^{2\gamma} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right] + b u(x, t) \right) dt dx = 0.$$

Последнее равенство перепишем в виде

$$\begin{aligned}\int_0^{T_0} t^{2\gamma} dt \int_0^1 x^\alpha \frac{\partial^{2n} \omega(x, t)}{\partial x^{2n}} \frac{\partial^{2n} u(x, t)}{\partial x^{2n}} dx - \int_0^1 dx \int_0^{T_0} t^{2\gamma} \frac{\partial \omega(x, t)}{\partial t} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dt + \\ + b \int_0^1 dx \int_0^{T_0} t^{2\gamma} \omega(x, t) u(x, t) dt = 0.\end{aligned}$$

Отсюда, учитывая равенства $u = t^{2\gamma} \frac{\partial \omega}{\partial t}$ и $\frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n}} = t^{2\gamma} \frac{\partial^{2n+1} \omega}{\partial x^{2n} \partial t}$, имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^1 x^\alpha dx \int_0^{T_0} t^{4\gamma} \frac{\partial^{2n} \omega(x,t)}{\partial x^{2n}} \frac{\partial^{2n+1} \omega(x,t)}{\partial x^{2n} \partial t} dt - \int_0^1 dx \int_0^{T_0} u(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} dt + \\ & + b \int_0^1 dx \int_0^{T_0} t^{4\gamma} \omega(x,t) \frac{\partial \omega(x,t)}{\partial t} dt = 0. \end{aligned}$$

Далее, принимая во внимание равенства

$$u(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} [u(x,t)]^2, \quad \frac{\partial^{2n} \omega(x,t)}{\partial x^{2n}} \frac{\partial^{2n+1} \omega(x,t)}{\partial x^{2n} \partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial^{2n} \omega(x,t)}{\partial x^{2n}} \right]^2,$$

$$\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} \omega(x, T_0) = 0, \quad u(x, 0) = 0$$

и правило интегрирования по частям к интегралам по t при $0 < \gamma < 1/2$, получим

$$\int_0^1 u^2(x, T_0) dx + 4\gamma \int_0^1 dx \int_0^{T_0} t^{4\gamma-1} \left(x^\alpha \left[\frac{\partial^{2n} \omega(x,t)}{\partial x^{2n}} \right]^2 + b \omega^2(x,t) \right) dt = 0,$$

а при $\gamma = 0$ имеем

$$\int_0^1 u^2(x, T_0) dx + \int_0^1 x^\alpha \left[\frac{\partial^{2n} \omega(x, 0)}{\partial x^{2n}} \right]^2 dx + b \int_0^1 \omega^2(x, 0) dx = 0.$$

В силу свойств функций $u(x,t)$, $\omega(x,t)$ и условий $b \geq 0$, $0 < \gamma < 1/2$, $0 < \alpha < 1$ все интегралы в левой части последних равенств существуют и неотрицательны. Поэтому из последних равенств следует, что $u(x, T_0) \equiv 0$, $x \in [0, 1]$. Так как $\forall T_0 \in [0, T]$, то функция $u(x,t) \equiv 0$, $(x,t) \in \overline{\Omega}$. Тогда $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$, $(x,t) \in \overline{\Omega}$. Теорема 1 доказана.

IV. Исследование спектральной задачи

При формальном применении метода Фурье к задаче U_3 возникает следующая спектральная задача:

$$Mv(x) \equiv (x^\alpha v^{(2n)}(x))^{(2n)} = \lambda v(x), \quad 0 < x < 1; \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} & v^{(j)}(x), \quad (x^\alpha v^{(2n)}(x))^{(j)} \in C[0, 1], \quad j = \overline{0, 2n-1}, \\ & v^{(j)}(0) = (-1)^j v^{(n+j)}(0), \quad \left[x^\alpha v^{(2n)}(x) \right]^{(j)} \Big|_{x=0} = (-1)^j \left[x^\alpha v^{(2n)}(x) \right]^{(n+j)} \Big|_{x=0}, \\ & v^{(n+j)}(1) = 0, \quad \left[x^\alpha v^{(2n)}(x) \right]^{(n+j)} \Big|_{x=1} = 0, \quad j = \overline{0, n-1}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Нетрудно убедиться, что для любых функций $v(x)$ и $w(x)$, удовлетворяющих условиям (7), справедливо равенство $\int_0^1 w(x) Mv(x) dx = \int_0^1 v(x) Mw(x) dx$, откуда следует, что задача с условиями $Mv(x) = 0$ и (7) самосопряжена.

Пусть $v(x)$ – функция, является решением задачи $\{(6), (7)\}$. Тогда, умножая уравнение (6) на функцию $v(x)$ и интегрируя полученное равенство на отрезке $[0,1]$, а затем применяя правило интегрирования по частям $2n$ раз и учитывая равенство (7), получим

$$\lambda \int_0^1 v^2(x) dx = \int_0^1 x^\alpha \left[v^{(2n)}(x) \right]^2 dx. \quad (8)$$

Отсюда следует, что $\lambda \geq 0$. Пусть $\lambda = 0$. Тогда из равенства (8) следует, что $v^{(2n)}(x) = 0$, $0 < x < 1$. Отсюда, в силу условий $v^{(j)}(0) = (-1)^j v^{(n+j)}(0)$, $v^{(n+j)}(1) = 0$, $j = \overline{0, n-1}$, имеем $v(x) \equiv 0$, $0 \leq x \leq 1$. Следовательно, задача $\{(6), (7)\}$ может иметь нетривиальные решения только при $\lambda > 0$.

Предположим, что $\lambda > 0$. Существование собственных значений задачи $\{(6), (7)\}$ докажем методом функции Грина.

Функция Грина $G(x, s)$ этой задачи должна обладать следующими свойствами:

1) $(\partial^j / \partial x^j) G(x, s)$, $j = \overline{0, 2n-1}$ и $(\partial^j / \partial x^j) \left[x^\alpha (\partial^{2n} / \partial x^{2n}) G(x, s) \right]$, $j = \overline{0, 2n-2}$ непрерывны для всех $x, s \in [0, 1]$;

2) в каждом из интервалов $[0, s)$ и $(s, 1]$ существует непрерывная производная $(\partial^{2n-1} / \partial x^{2n-1}) \left[x^\alpha (\partial^{2n} / \partial x^{2n}) G(x, s) \right]$, а при $x = s$ имеет скачок:

$$(\partial^{2n-1} / \partial x^{2n-1}) \left[x^\alpha (\partial^{2n} / \partial x^{2n}) G(x, s) \right] \Big|_{x=s-0}^{x=s+0} = 1; \quad (9)$$

3) в интервалах $(0, s)$ и $(s, 1)$ по аргументу x существует непрерывная производная $MG(x, s)$ и выполняется равенство $MG(x, s) = 0$;

4) при $s \in (0, 1)$ по аргументу x удовлетворяет условиям

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^j G(0, s)}{\partial x^j} &= (-1)^j \frac{\partial^{n+j} G(0, s)}{\partial x^{n+j}}, \\ \frac{\partial^j}{\partial x^j} \left(x^\alpha \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} G(x, s) \right) \Big|_{x=0} &= (-1)^j \frac{\partial^{n+j}}{\partial x^{n+j}} \left(x^\alpha \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} G(x, s) \right) \Big|_{x=0}, \quad j = \overline{0, n-1}, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\frac{\partial^{n+j}G(1,s)}{\partial x^{n+j}}=0, \quad \frac{\partial^{n+j}}{\partial x^{n+j}}\left(x^\alpha \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}G(x,s)\right)\Bigg|_{x=1}=0, \quad j=\overline{0,n-1}. \quad (11)$$

Принимая во внимание вид общего решения уравнения $MG(x,s)=0$ в промежутках $(0,s)$ и $(s,1)$, функцию $G(x,s)$ ищем в виде

$$G(x,s)=\begin{cases} \sum_{j=1}^{2n} \frac{a_j x^{4n-\alpha-j}}{(2n-j)!(2n-\alpha-j+1)_{2n}} + \sum_{j=1}^{2n} \frac{a_{2n+j} x^{2n-j}}{(2n-j)!}, & 0 \leq x \leq s, \\ \sum_{j=1}^{2n} \frac{b_j x^{4n-\alpha-j}}{(2n-j)!(2n-\alpha-j+1)_{2n}} + \sum_{j=1}^{2n} \frac{b_{2n+j} x^{2n-j}}{(2n-j)!}, & s \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (12)$$

где a_j и b_j , $j=\overline{1,4n}$ – неизвестные функции переменной s , а $(z)_n = z(z+1)(z+2)\dots(z+n-1)$ – символ Похгаммера [16].

Удовлетворяя функцию (12) свойствам 1) и 2) функции Грина, получим следующую систему уравнений относительно $b_j - a_j$, $j=\overline{1,4n}$:

$$\begin{cases} b_1 - a_1 = 1, \quad \sum_{j=1}^{m_1} \frac{s^{m_1-j}}{(m_1-j)!} (b_j - a_j) = 0, \quad m_1 = \overline{2,2n}, \\ \sum_{j=1}^{2n} \frac{s^{2n-\alpha+m_2-j} (b_j - a_j)}{(2n-j)!(2n-\alpha-j+1)_{m_2}} + \sum_{j=1}^{m_2} \frac{s^{m_2-j} (b_{2n+j} - a_{2n+j})}{(m_2-j)!} = 0, \quad m_2 = \overline{1,2n}. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение [13]:

$$b_j - a_j = \frac{(-1)^{j-1} s^{j-1}}{(j-1)!}, \quad b_{2n+j} - a_{2n+j} = \frac{(-1)^{j-1} s^{2n+j-1-\alpha}}{(j-1)!(j-\alpha)_{2n}}, \quad j=\overline{1,2n}. \quad (13)$$

Теперь подставляя (12) в условия (10), имеем

$$a_{n+j} = (-1)^{n-j} a_j, \quad j=\overline{1,n}, \quad (14)$$

$$a_{3n+j} = (-1)^{n-j} a_{2n+j}, \quad j=\overline{1,n}. \quad (15)$$

Далее подставляя (12) в условия (11), получим

$$b_j = 0, \quad j=\overline{1,n} \quad (16)$$

и в результате, имеем систему уравнений относительно b_{2n+m} , $m=\overline{1,n}$:

$$\sum_{j=1}^n \frac{b_{n+j}}{(n-j)!(n+1-j-\alpha)_m} + \sum_{i=1}^m \frac{b_{2n+i}}{(m-i)!} = 0, \quad m=\overline{1,n}. \quad (17)$$

Принимая во внимание результаты (16), когда первая часть соотношения (13) есть $j=\overline{1,n}$, определяем неизвестные коэффициенты a_j , $j=\overline{1,n}$, следующим образом:

$$a_j = \frac{(-1)^j s^{j-1}}{(j-1)!}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (18)$$

Коэффициенты $a_{n+j}, j = \overline{1, n}$ определим как результат подчинения найденного (18) соотношению (14):

$$a_{n+j} = \frac{(-1)^n s^{j-1}}{(j-1)!}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (19)$$

Принимая во внимание (19), а также правую часть соотношения (13) при $j = \overline{n+1, 2n}$, определяем неизвестные $b_{n+j}, j = \overline{1, n}$ в виде

$$b_{n+j} = \frac{(-1)^n s^{j-1}}{(j-1)!} + \frac{(-1)^{n+j-1} s^{n+j-1}}{(n+j-1)!}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (20)$$

Используя приведённые алгебраические операции, определим неизвестные $a_j, b_j, j = \overline{1, 2n}$, зависящие от переменной s . Теперь найдём неизвестные $a_{2n+j}, b_{2n+j}, j = \overline{1, 2n}$.

Сначала, решая систему уравнений (17), определим неизвестные $b_{2n+m}, m = \overline{1, n}$ в виде

$$b_{2n+1} = - \sum_{j=1}^n \frac{b_{n+j}}{(n-j)!(n+1-j-\alpha)},$$

$$b_{2n+m} = - \sum_{j=1}^n \frac{b_{n+j}}{(n-j)!(n+1-j-\alpha)_m} - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{b_{2n+i}}{(m-1-i)!}, \quad m = \overline{2, n}. \quad (21)$$

Подставляя полученные выражения (21) во вторую часть соотношений (13), находим:

$$a_{2n+1} = - \frac{s^{2n-\alpha}}{(1-\alpha)_{2n}} - \sum_{j=1}^n \frac{b_{n+j}}{(n-j)!(n+1-j-\alpha)},$$

$$a_{2n+m} = \frac{(-1)^m s^{2n+m-1-\alpha}}{(m-1)!(m-\alpha)_{2n}} - \sum_{j=1}^n \frac{b_{n+j}}{(n-j)!(n+1-j-\alpha)_m} - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{b_{2n+i}}{(m-1-i)!}, \quad m = \overline{2, n}. \quad (22)$$

Неизвестные $a_{3n+j}, j = \overline{1, n}$ определяются из соотношений (15) с учётом (22):

$$a_{3n+1} = (-1)^n \frac{s^{2n-\alpha}}{(1-\alpha)_{2n}} + (-1)^n \sum_{j=1}^n \frac{b_{n+j}}{(n-j)!(n+1-j-\alpha)},$$

$$a_{3n+m} = \frac{(-1)^n s^{2n+m-1-\alpha}}{(m-1)!(m-\alpha)_{2n}} + (-1)^{n-m+1} \sum_{j=1}^n \frac{b_{n+j}}{(n-j)!(n+1-j-\alpha)_m} +$$

$$+ (-1)^{n-m+1} \sum_{i=1}^{m-1} \frac{b_{2n+i}}{(m-1-i)!}, \quad m = \overline{2, n}. \quad (23)$$

Наконец, для случая $j = \overline{n+1, 2n}$ во второй части соотношений (13), с учётом (23), неизвестные b_{3n+j} , $j = \overline{1, n}$ определяются как:

$$\begin{aligned} b_{3n+1} &= (-1)^n \frac{s^{2n-\alpha}}{(1-\alpha)_{2n}} + (-1)^n \frac{s^{3n-\alpha}}{n!(n+1-\alpha)_{2n}} + (-1)^n \sum_{j=1}^n \frac{b_{n+j}}{(n-j)!(n+1-j-\alpha)}, \\ b_{3n+m} &= (-1)^n \frac{s^{2n+m-1-\alpha}}{(m-1)!(m-\alpha)_{2n}} + (-1)^{n+m-1} \frac{s^{3n+m-1-\alpha}}{(n+m-1)!(n+m-\alpha)_{2n}} + \\ &+ (-1)^{n+m+1} \sum_{j=1}^n \frac{b_{n+j}}{(n-j)!(n+1-j-\alpha)_m} + (-1)^{n-m+1} \sum_{i=1}^{m-1} \frac{b_{2n+i}}{(m-1-i)!}, \quad m = \overline{2, n}. \end{aligned} \quad (24)$$

Следовательно, функция Грина, удовлетворяющая условиям 1)-4) существует, единственна и имеет вид (12), причем коэффициенты a_j и b_j , $j = \overline{1, 4n}$ определяются равенствами (16), (18)-(24).

В работах [15], [17], [18] доказано, что задача $\{Mv=0, (7)\}$ самосопряжена и функция Грина, определённая выше, симметрична относительно аргументов x и s .

В частном случае, при $n=1$ функция Грина $G(x, s)$ имеет вид

$$G(x, s) = \begin{cases} -\frac{x^{3-\alpha}}{(2-\alpha)_2} - \frac{x^{2-\alpha}}{(1-\alpha)_2} + \left(\frac{1}{1-\alpha} + \frac{s}{1-\alpha} - \frac{s^{2-\alpha}}{(1-\alpha)_2} \right) (x+1), & 0 \leq x \leq s, \\ -\frac{s^{3-\alpha}}{(2-\alpha)_2} - \frac{s^{2-\alpha}}{(1-\alpha)_2} + \left(\frac{1}{1-\alpha} + \frac{x}{1-\alpha} - \frac{x^{2-\alpha}}{(1-\alpha)_2} \right) (s+1), & s \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Теперь, методом, примененным в [19], нетрудно убедиться, что задача $\{(6), (7)\}$ эквивалентна следующему интегральному уравнению

$$v(x) = \lambda \int_0^1 G(x, s) v(s) ds. \quad (25)$$

Так как ядро $G(x, s)$ непрерывно, симметрично и положительно ($\lambda > 0$), то интегральное уравнение (25), следовательно, задача $\{(6), (7)\}$ имеет счетное число собственных значений $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_k < \dots$, $\lambda_k \rightarrow +\infty$, а соответствующие им собственные функции $v_1(x), v_2(x), v_3(x), \dots, v_k(x) \dots$ образуют ортонормированную систему в пространстве $L_2(0,1)$ [20].

Кроме того, непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что система функций $x^{\alpha/2} v_k^{(2n)}(x) / \sqrt{\lambda_k}$, $k = 1, 2, \dots$ также составляет ортонормальную систему на отрезке $[0,1]$.

Лемма 1. Пусть функция $g(x)$ удовлетворяет условиям (7) и $Mg(x) \in C(0,1) \cap L_2(0,1)$. Тогда, ее можно разложить на отрезке $[0,1]$ в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по системе собственных функций задачи $\{(6), (7)\}$.

Доказательство. Пользуясь правилом интегрирования по частям, свойствами функции Грина $G(x,s)$ и условиями, наложенными на функцию $g(x)$, нетрудно убедиться, что справедливо равенство

$$\int_0^1 G(x,s) Mg(s) ds = \int_0^1 G(x,s) \left[s^\alpha g^{(2n)}(s) \right]^{(2n)} ds = g(x).$$

Так как $Mg(x) \in L_2(0,1)$, то из последнего равенства следует, что $g(x)$ - есть функция, представимая через ядро $G(x,s)$. Кроме того, функция $G(x,s)$, т.е. ядро уравнения (25) непрерывно в $\overline{\Omega}$. Тогда, на основании теоремы 2 стр. 153, книги [20], справедливо утверждение леммы 1.

V. Вспомогательные леммы

Сформулируем и докажем ряд вспомогательных лемм, необходимых для обоснования существования задачи U_3 . В этом пункте под λ_k и v_k , $k \in N$, понимаются собственные значения и собственные функции задачи $\{(6),(7)\}$, а под g_k -коэффициенты Фурье функции $g(x)$:

$$g_k = \int_0^1 g(x) v_k(x) dx, \quad k \in N.$$

Лемма 2. Следующие ряды сходятся равномерно на сегменте $[0,1]$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left[v_k^{(j)}(x) \right]^2 / \lambda_k, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\left[x^\alpha v_k^{(2n)}(x) \right]^{(j)} \right)^2 / \lambda_k^2, \quad j = \overline{0, 2n-1}. \quad (26)$$

Доказательство. Учитывая равенство (6) и свойства функции $G(x,s)$, из (25) при $v(x) \equiv v_k(x)$ получим

$$v_k^{(j)}(x) = \lambda_k \int_0^1 \frac{\partial^j}{\partial x^j} G(x,s) v_k(s) ds = \int_0^1 \left[s^\alpha v_k^{(2n)}(s) \right]^{(2n)} \frac{\partial^j}{\partial x^j} G(x,s) ds, \quad j = \overline{0, 2n-1}.$$

Отсюда, применяя правило интегрирования по частям $2n$ раз, а затем принимая во внимание условия (7), имеем

$$v_k^{(j)}(x) = \int_0^1 s^\alpha v_k^{(2n)}(s) \frac{\partial^{2n+j}}{\partial x^j \partial s^{2n}} G(x,s) ds, \quad j = \overline{0, 2n-1},$$

откуда, в силу $\lambda_k > 0$, следует равенство

$$\frac{v_k^{(j)}(x)}{\sqrt{\lambda_k}} = \int_0^1 \left(s^{\alpha/2} \frac{\partial^{2n+j}}{\partial x^j \partial s^{2n}} G(x,s) \right) \left(\frac{s^{\alpha/2} v_k^{(2n)}(s)}{\sqrt{\lambda_k}} \right) ds, \quad j = \overline{0, 2n-1}. \quad (27)$$

Из (27) следует, что $v_k^{(j)}(x)/\sqrt{\lambda_k}$ - есть коэффициент Фурье функции по ортонормальной системе $\left\{s^{\alpha/2}v_k^{(2n)}(s)/\sqrt{\lambda_k}\right\}_{k=1}^{+\infty}$. Поэтому, согласно неравенству Бесселя [20], имеем

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left[v_k^{(j)}(x) \right]^2 / \lambda_k \leq \int_0^1 s^\alpha \left[\frac{\partial^{2n+j}}{\partial x^j \partial s^{2n}} G(x, s) \right]^2 ds, \quad j = \overline{0, 2n-1}. \quad (28)$$

Интеграл в правой части можно переписать в виде

$$\int_0^1 s^\alpha \left[\frac{\partial^{2n+j}}{\partial x^j \partial s^{2n}} G(x, s) \right]^2 ds = \int_0^1 s^{-\alpha} \left[\frac{\partial^j}{\partial x^j} \left\{ s^\alpha \frac{\partial^{2n}}{\partial s^{2n}} G(x, s) \right\} \right]^2 ds, \quad j = \overline{0, 2n-1}.$$

Так как $s^\alpha \frac{\partial^{2n} G(x, s)}{\partial s^{2n}}, \frac{\partial^j G(x, s)}{\partial x^j} \in C(\overline{\Omega}), j = \overline{0, 2n-1}$, то функция в квадратной скобке непрерывна на $\overline{\Omega}$. Тогда, в силу $0 < \alpha < 1$, интеграл в правой части, следовательно, интеграл в (28) равномерно ограничен при $j = \overline{0, 2n-1}$, откуда следует, что первые ряды в (26) сходятся равномерно.

Аналогично доказывается сходимость и остальных рядов.

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Если выполнены условия $g^{(j)}(x) \in C[0, 1], j = \overline{0, 2n-1}$, $x^{\alpha/2} g^{(2n)}(x) \in C(0, 1) \cap L_2(0, 1); g^{(j)}(0) = (-1)^j g^{(n+j)}(0), g^{(n+j)}(1) = 0, j = \overline{0, n-1}$, то справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k g_k^2 \leq \int_0^1 x^\alpha \left[g^{(2n)}(x) \right]^2 dx, \quad (29)$$

в частности, ряд в левой части сходится.

Доказательство. В силу уравнения (6), справедливо равенство

$$\lambda_k^{1/2} g_k = \lambda_k^{1/2} \int_0^1 g(x) v_k(x) dx = \lambda_k^{-1/2} \int_0^1 g(x) \left[x^{\alpha/2} v_k^{(2n)}(x) \right]^{(2n)} dx.$$

Из этого равенства, применяя правило интегрирования по частям $2n$ раз и учитывая свойства функций $g(x)$ и $v_k(x)$, получим

$$\lambda_k^{1/2} g_k = \int_0^1 x^{\alpha/2} g^{(2n)}(x) \left\{ \lambda_k^{-1/2} x^{\alpha/2} v_k^{(2n)}(x) \right\} dx.$$

Отсюда следует, что число $\lambda_k^{1/2} g_k$ - есть коэффициент Фурье функции $x^{\alpha/2} g^{(2n)}(x)$ по ортонормированной системе $\left\{ x^{\alpha/2} v_k^{(2n)}(x) / \sqrt{\lambda_k} \right\}_{k=1}^{+\infty}$. Тогда,

согласно неравенству Бесселя [20], справедливо неравенство (29). Лемма 3 доказана.

Аналогично лемме 3, доказываются следующие результаты

Лемма 4. Если функция $g(x)$ удовлетворяет условиям (7) и $Mg(x) \in C(0,1) \cap L_2(0,1)$, то справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2 g_k^2 \leq \int_0^1 [Mg(x)]^2 dx, \quad (30)$$

в частности, ряд в левой части сходится.

Лемма 5. Если функция $g(x)$ удовлетворяет условиям (7) и $[Mg(x)]^{(j)} \in C[0,1]$, $j = \overline{0, 2n-1}$; $x^{\alpha/2} [Mg(x)]^{(2n)} \in C(0,1) \cap L_2(0,1)$; $[Mg(x)]^{(j)} \Big|_{x=0} = (-1)^j [Mg(x)]^{(n+j)} \Big|_{x=0}$, $[Mg(x)]^{(n+j)} \Big|_{x=1} = 0$, $j = \overline{0, n-1}$, то справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^3 g_k^2 \leq \int_0^1 x^\alpha \left\{ [Mg(x)]^{(2n)} \right\}^2 dx, \quad (31)$$

в частности, ряд в левой части сходится.

VI. Существование и устойчивость решения задачи U_3

Решение задачи U_3 ищем в виде

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t) v_k(x), \quad (32)$$

где $v_k(x)$, $k \in N$ - собственные функции задачи $\{(6),(7)\}$, а $u_k(t)$, $k \in N$ - неизвестные функции, подлежащие определению.

Подставляя (32) в уравнение (3) и в условия (4), относительно $u_k(t)$, $k \in N$ получим следующую задачу:

$$u_k''(t) + \frac{2\gamma}{t} u_k'(t) + (\lambda_k + b) u_k(t) = f_k(t), \quad t \in (0, T), \quad (33)$$

$$u_k(0) = \varphi_{1k}, \quad \lim_{t \rightarrow +0} [t^{2\gamma} u_k'(t)] = \varphi_{2k}, \quad (34)$$

где

$$\varphi_{jk} = \int_0^1 \varphi_j(x) v_k(x) dx, \quad j = \overline{1, 2}; \quad f_k(t) = \int_0^1 f(x,t) v_k(x) dx, \quad k \in N. \quad (35)$$

Сначала находим общее решение однородного уравнения (33). Следуя работе [21] и произведя замену $u(t) = (z/\sqrt{\lambda_k + b})^{1/2-\gamma} p(z)$, где $z = t\sqrt{\lambda_k + b}$, получим уравнение Бесселя [22]:

$$z^2 p''(z) + zp'(z) + \left[z^2 - (\gamma - 1/2)^2 \right] p(z) = 0. \quad (36)$$

Принимая во внимание вид общего решения [22] уравнения (36) и введенные обозначения, получим общее решение однородного уравнения (33) в виде

$$u_k(t) = a_k t^{1/2-\gamma} J_{1/2-\gamma}(t\omega_k) + b_k t^{1/2-\gamma} J_{\gamma-1/2}(t\omega_k), \quad (37)$$

где a_k, b_k - произвольные постоянные, а $\omega_k = \sqrt{\lambda_k + b}$.

Теперь рассмотрим неоднородное дифференциальное уравнение (33). Используя формулу (37), решая уравнение (33) методом вариации произвольных постоянных, имеем

$$u_k(t) = a_k t^{1/2-\gamma} J_{1/2-\gamma}(t\omega_k) + b_k t^{1/2-\gamma} J_{\gamma-1/2}(t\omega_k) + Q_k(t), \quad (38)$$

где

$$Q_k(t) = \frac{\pi}{2 \cos \gamma \pi} \int_0^t \left[J_{1/2-\gamma}(t\omega_k) J_{\gamma-1/2}(\tau\omega_k) - J_{\gamma-1/2}(t\omega_k) J_{1/2-\gamma}(\tau\omega_k) \right] t^{1/2-\gamma} \tau^{1/2+\gamma} f_k(\tau) d\tau. \quad (39)$$

Подставляя (38) в граничные условия (34), найдем коэффициенты a_k и b_k :

$$a_k = \frac{1}{2} (\omega_k/2)^{\gamma-1/2} \Gamma(1/2-\gamma) \psi_k, \quad b_k = (\omega_k/2)^{1/2-\gamma} \Gamma(1/2+\gamma) \varphi_k. \quad (40)$$

Таким образом, решение задачи {(33), (34)} определяется формулой (38), при этом неизвестные коэффициенты a_k и b_k вычисляются с использованием формулы (39).

Лемма 6. Для функций $u_k(t)$, $k \in N$, определяемых равенствами (38), при всех $t \in [0, T]$ справедливы неравенства

$$|u_k(t)| \leq |\varphi_k| + C_1 |\psi_k| + C_2 \|f_k(t)\|_{L_2(0,T)}, \quad k \in N, \quad (41)$$

$$|t^{2\gamma} u'_k(t)| \leq C_3 |\psi_k| + C_4 (\lambda_k + b) |\varphi_k| + C_5 (\lambda_k + b) \|f_k(t)\|_{L_2(0,T)}, \quad k \in N,$$

$$\left| u''_k(t) + \frac{2\gamma}{t} u'_k(t) \right| \leq (\lambda_k + b) |u_k(t)| + |f_k(t)|, \quad k \in N,$$

где C_j , $j = \overline{1,5}$ - некоторые положительные действительные числа.

Доказательство. Переписывая функции (38) с помощью функции Бесселя — Клиффорда $\bar{J}_\omega(z) = \Gamma(\omega+1)(z/2)^{-\omega} J_\omega(z)$ и учитывая, что $|\bar{J}_\omega(z)| \leq 1$ при $\omega > -1/2$, а также $0 \leq \tau \leq t \leq T$, получим оценку

$$|u_k(t)| \leq |a_k| \frac{t^{1-2\gamma} (\sqrt{\lambda_k + b}/2)^{1/2-\gamma}}{\Gamma(3/2-\gamma)} + |b_k| \frac{(\sqrt{\lambda_k + b}/2)^{\gamma+1/2}}{\Gamma(1/2+\gamma)} + \frac{2T}{1-2\gamma} \int_0^t |f_k(\tau)| d\tau.$$

Отсюда, принимая во внимание равенства (40) и применяя неравенство Коши-Буняковского к интегралу, приходим к неравенству (41).

Остальные неравенства доказываются аналогично. Лемма 6 доказана.

Теорема 2. Пусть $\gamma \in (0, 1/2)$ и функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ удовлетворяют условиям леммы 5, а функция $f(x, t)$ удовлетворяет условиям леммы 5 по аргументу x равномерно по t . Тогда ряд (32), коэффициенты которого определены равенствами (38), определяет решение задачи U_3 .

Доказательство. Докажем равномерную сходимость в $\bar{\Omega}$ ряда (32) и следующих рядов, формально полученных из (32):

$$\frac{\partial^j u}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t) v_k^{(j)}(x), \quad j = \overline{1, 2n-1},$$

$$\frac{\partial^j}{\partial x^j} \left(x^\alpha \frac{\partial^{2n} u}{\partial^{2n}} \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t) (x^\alpha v_k^{(2n)}(x))^{(j)}, \quad j = \overline{0, 2n-1}, \quad t^{2\gamma} \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{+\infty} t^{2\gamma} u_k'(t) v_k(x)$$

и равномерную сходимость в любом компакте $\Omega_0 \subset \Omega$ следующих рядов:

$$\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} \left(x^\alpha \frac{\partial^{2n} u}{\partial^{2n}} \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t) (x^\alpha v_k^{(2n)}(x))^{(2n)}, \quad (42)$$

$$u_{tt} + \frac{2\gamma}{t} u_t = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[u_k''(t) + \frac{2\gamma}{t} u_k'(t) \right] v_k(x).$$

Рассмотрим ряд (42). В силу (6), в любом компакте $\Omega_0 \subset \Omega$ ряд из правой части (42) записывается в виде

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k u_k(t) v_k(x). \quad (43)$$

Для доказательства равномерной сходимости ряда (43), согласно (41), достаточно доказать абсолютную и равномерную сходимость рядов

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \varphi_k v_k(x), \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \psi_k v_k(x), \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \sqrt{\int_0^T f_k^2(\tau) d\tau} v_k(x). \quad (44)$$

К каждому из этих рядов применим неравенство Коши-Буняковского:

$$\left| \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \varphi_k v_k(x) \right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \left| \sqrt{\lambda_k^3} \varphi_k \frac{v_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}} \right| \leq \left[\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^3 \varphi_k^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{v_k^2(x)}{\lambda_k} \right]^{1/2},$$

$$\left| \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \psi_k v_k(x) \right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \left| \sqrt{\lambda_k^3} \psi_k \frac{v_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}} \right| \leq \left[\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^3 \psi_k^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{v_k^2(x)}{\lambda_k} \right]^{1/2},$$

$$\left| \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \sqrt{\int_0^T f_k^2(\tau) d\tau} v_k(x) \right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \left| \sqrt{\lambda_k^3 \int_0^T f_k^2(\tau) d\tau} \frac{v_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}} \right| \leq \left[\int_0^T \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^3 f_k^2(\tau) d\tau \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{v_k^2(x)}{\lambda_k} \right]^{1/2}.$$

Ряды, стоящие в правых частях этих неравенств, в силу условия теоремы 2, согласно леммам 2 и 5, равномерно сходятся. Тогда ряды, стоящие в левых частях, т.е. ряды (44), сходятся абсолютно и равномерно в $\overline{\Omega}$. Следовательно, ряд (43) сходится абсолютно и равномерно в $\overline{\Omega}$. Поэтому ряд в (42) сходится абсолютно и равномерно в любом компакте $\Omega_0 \subset \Omega$.

Равномерная сходимость ряда (32) следует из сходимости ряда (43).

Аналогично доказывается равномерная сходимость и остальных рядов. Теорема 2 доказана.

При $\gamma=0$ в силу $J_{1/2}(x) = \sqrt{2/(\pi x)} \sin x$, $J_{-1/2}(x) = \sqrt{2/(\pi x)} \cos x$, функции (38) записываются в виде

$$u_k(t) = \varphi_k \cos(t\sqrt{\lambda_k + b}) + \frac{\psi_k}{\sqrt{\lambda_k + b}} \sin(t\sqrt{\lambda_k + b}) + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k + b}} \int_0^t f_k(\tau) \sin[(t - \tau)\sqrt{\lambda_k + b}] d\tau, \quad k \in N, \quad (45)$$

откуда следует оценка

$$|u_k(t)| \leq |\varphi_k| + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} |\psi_k| + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \|f_k(t)\|_{L_2(0,T)}. \quad (46)$$

В этом случае, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Пусть $\gamma=0$ и функция $\varphi_1(x)$ удовлетворяет условиям леммы 5, функция $\varphi_2(x)$ удовлетворяет условиям леммы 4, а функция $f(x,t)$ удовлетворяет условиям леммы 4 по аргументу x равномерно по t . Тогда ряд (32), коэффициенты которого определены равенствами (45), определяет решение задачи U_3 .

Аналогично теореме 2, доказывается вышеизложенное.

Теорема 4. Пусть функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ и $f(x,t)$ удовлетворяют условиям теоремы 2 или 3. Тогда для решения задачи U_3 справедливы оценки

$$\|u(x,t)\|_{L_2(0,1)}^2 \leq C_6 \left[\|\varphi(x)\|_{L_2(0,1)}^2 + \|\psi(x)\|_{L_2(0,1)}^2 + \|f(x,t)\|_{L_2(\Omega)}^2 \right], \quad (47)$$

$$\|u(x,t)\|_{C(\bar{\Omega})} \leq C_7 \left[\|\varphi^{(2n)}(x)\|_{L_{2,r}(0,1)} + \|\psi^{(2n)}(x)\|_{L_{2,r}(0,1)} + \left\| \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} f(x,t) \right\|_{L_{2,r}(\Omega)} \right], \quad (48)$$

где $\|\varphi(x)\|_{L_{2,r}(0,1)} = \left[\int_0^1 x^\alpha [\varphi(x)]^2 dx \right]^{1/2}$, $\|g(x,t)\|_{L_{2,r}(\Omega)} = \left[\int_0^T \int_0^1 x^\alpha g^2(x,t) dx dt \right]^{1/2}$ и $r(x) = x^\alpha$, C_6 и C_7 — некоторые действительные положительные числа.

Доказательство. Учитывая ортонормальность системы $\{v_k(x)\}_{k=1}^{+\infty}$ и неравенства (41), (46), и (32) получим

$$\begin{aligned} \|u(x,t)\|_{L_2(0,1)}^2 &= \sum_{k=1}^{+\infty} u_k^2(t) \leq \\ &\leq C_8 \sum_{k=1}^{+\infty} \left[|\varphi_k| + |\psi_k| + \|f_k(t)\|_{L_2(0,T)} \right]^2 \leq 3C_8 \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\varphi_k^2 + \psi_k^2 + \|f_k(t)\|_{L_2(0,T)}^2 \right], \end{aligned}$$

где $C_8 = \text{const} > 0$.

Отсюда, учитывая неравенство Бесселя, получим

$$\|u(x,t)\|_{L_2(0,1)}^2 \leq 3C_8 \left(\|\varphi(x)\|_{L_2(0,1)}^2 + \|\psi(x)\|_{L_2(0,1)}^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \|f_k(t)\|_{L_2(0,T)}^2 \right). \quad (49)$$

Принимая во внимание представление $f(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(t)v_k(x)$ и ортонормированность системы функций $\{v_k(x)\}_{k=1}^{+\infty}$, имеем

$$\|f(x,t)\|_{L_2(\Omega)}^2 = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(t)v_k(x), \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)v_n(x) \right)_{L_2(\Omega)} = \int_0^T \sum_{k=1}^{+\infty} [f_k(t)]^2 dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \|f_k(t)\|_{L_2(0,T)}^2.$$

Если учесть это равенство, то неравенство (47) сразу следует из (49).

Из (32), на основании (41) и (46), при любых $\bar{\Omega}$ имеем

$$\begin{aligned} |u(x,t)| &= \left| \sum_{k=1}^{+\infty} v_k(x)u_k(t) \right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |v_k(x)| |u_k(t)| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|v_k(x)|}{\sqrt{\lambda_k}} \left(\sqrt{\lambda_k} |\varphi_k| + C_9 \sqrt{\lambda_k} |\psi_k| + C_{10} \sqrt{\lambda_k} \|f_k(t)\|_{L_2(0,T)} \right), \end{aligned}$$

где C_9 и C_{10} — некоторые действительные положительные числа.

Отсюда, применяя неравенство Коши-Буняковского, получим

$$\begin{aligned} |u(x,t)| &\leq \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{v_k^2(x)}{\lambda_k} \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \varphi_k^2 \right)^{1/2} + C_9 \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{v_k^2(x)}{\lambda_k} \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \psi_k^2 \right)^{1/2} + \\ &+ C_{10} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{v_k^2(x)}{\lambda_k} \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \|f_k(t)\|_{L_2(0,T)}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (50)$$

Принимая во внимание утверждение лемм 2 и 3, из (50) находим

$$\begin{aligned} \|u(x,t)\|_{C(\bar{\Omega})} = \sup_{\bar{\Omega}} |u(x,t)| \leq & C_{11} \left(\int_0^1 x^\alpha [\varphi^{(2n)}(x)]^2 dx \right)^{1/2} + \\ & + C_9 C_{11} \left(\int_0^1 x^\alpha [\psi^{(2n)}(x)]^2 dx \right)^{1/2} + C_{10} C_{11} \left(\int_0^T \int_0^1 x^\alpha \left[\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} f(x,t) \right]^2 dx dt \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

где $C_{11} = \left(\sup_{[0,1]} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{v_k^2(x)}{\lambda_k} \right)^{1/2}.$

Если учесть введенные обозначения, то из последнего сразу следует неравенство (48). Теорема 4 полностью доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Франкль Ф.И. Избранные труды по газовой динамике. М.: Наука. 1973. - 711 с.
2. Франкль Ф.И. О баковом водозаборе из быстрых мелких рек// Труды Киргизского государственного университета. 1953. Т. 2. С. 33-45.
3. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз. 1959. 628 с.
4. Маховер Е.В. Изгиб пластинки переменной толщины с острым краем// Ученые записки ЛГПИ им. Герцена. №17. Вып. 2. 1957. С. 28-39.
5. Маховер Е.В. О спектре собственных частот пластинки с острым краем// Ученые записки ЛГПИ им. Герцена. №197. 1958. С. 113-118.
6. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. 301 с.
7. Байкузиев К.Б., Каланов Б.С. О разрешимости смешанной задачи для уравнения высшего порядка, вырождающегося на границе области// В сборнике: Краевые задачи для дифференциальных уравнений. –Ташкент: Фан. 1972. №2. С. 40-54; 1973. №3. С. 65-73.
8. Байкузиев К.Б. Смешанная задача для одного уравнения высшего порядка, вырождающегося на границе области// Дифференциальные уравнения, 1984. Том 20, №1. С. 7-14.
9. Urinov A.K. and Azizov M.S. On the Solvability of an Initial–Boundary Value Problem for a High Even Order Partial Differential Equation Degenerating on the Domain Boundary// Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2023, Vol. 17, No. 2, pp. 414–426.
10. Irgashev B.Yu. Mixed problem for higher-order equations with fractional derivative and degeneration in both variables// Ukrainian Mathematical Journal, Vol.74, No.10, March, 2023.

11. Irgashev B.Yu. Boundary value problem for a degenerate equation with a Riemann–Liouville operator// Наносистемы: физика, химия, математика, 2023, том 14, выпуск 5, 511–517.
12. Уринов А.К., Усмонов Д.А. Об одной задаче для уравнения смешанного типа четвертого порядка, вырождающегося внутри и на границе области // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2023. Т. 33. Вып. 2. С. 312–328.
13. Уринов А.К., Орипов Д.Д. О разрешимости одной начально-граничной задачи для вырождающегося уравнения высокого четного порядка, Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2023, номер 4, 621-644.
14. Азизов М.С. Начально-граничная задача для уравнения в частных производных высокого четного порядка с оператором Бесселя в прямоугольнике, Научный вестник НамГУ, 2022, №10, С. 3-11.
15. Urinov A.K., Oripov D.D. On an initial boundary–value problem for a degenerate equation of high even order // Ural mathematical journal. 2025. Vol. 11, No. 1. pp. 132–144.
16. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. I. М.: Наука, 1965.
17. Орипов Д.Д. Исследование одной начально-граничной задачи для вырождающегося уравнения в частных производных высокого четного порядка// Bulletin of the Institute of Mathematics, 2024, Vol. 7, No 5, pp. 105-116.
18. Орипов Д.Д. О корректности одной начально-граничной задачи для вырождающегося уравнения в частных производных высокого четного порядка// NamDU Ilmiy axborotnomasi, 2024, №10, -с. 88-96.
19. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
20. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Физматлит, 1959.
21. Urinov A.K., Karimov K.T. Dirichlet problem for an elliptic equation with three singular coefficients. Journal of Mathematical Sciences, Vol. 254, No. 6, 2021. pp. 731-742.
22. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. –М. :Т.1. Изд. ИЛ. -1949. -798 с.