

Xodjibayev Vali Raximdjanoich

Namangan Davlat Texnika Universiteti, professor
O'zR FA Matematika Instituti, yetakchi ilmiy xodim

E-mail: vkhodjibayev@mail.ru

Jo'rayev Olim Kamoliddinovich

Namangan Davlat Texnika Universiteti, o'qituvchi

E-mail: ojuraev884@mail.com

UO'K 519.21

TEBRANUVCHI TASODIFIY JARAYON STATSIONAR TAQSIMOTI UCHUN ANIQ FORMULA

Annotatsiya: Ma'lum ikki chegaraga yetib borganda orttirmasini navbatma-navbat $\xi_1(t)$ va $\xi_2(t)$ bir jinsli bog'liqsiz orttirmali tasodifiy jarayonlar orttirmalariga o'zgartiradigan tebranuvchi $X(t)$ jarayon qaraladi. $\xi_1(t)$ jarayonning musbat sakrashlari, $\xi_2(t)$ jarayonning manfiy sakrashlari turli parametrlil ko'rsatkichli taqsimotga ega bo'lgan holda $X(t)$ jarayon statsionar taqsimotining Laplas-Stilt'es akslantirishi uchun aniq ifoda topilgan.

Kalit so'zlar: Tebranuvchi tasodifiy jarayon, bir jinsli bog'liqsiz orttirmali tasodifiy jarayon, statsionar taqsimot,.

Ходжибаев Вали Рахимджанович

Наманганский государственный технический университет,

профессор,

Институт Математики АН РУЗ, ведущий научный сотрудник

Жураев Олим Камолиддинович

Наманганский государственный технический университет,

преподаватель

ТОЧНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОСЦИЛЛИРУЮЩЕГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Аннотация: Рассматривается стохастический процесс $X(t)$ с переключениями между двумя независимыми стационарными процессами $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ с независимыми приращениями при достижении регулирующих барьеров. Мы находим точное выражение для преобразования Лапласа-Стилтьеса стационарного распределения $X(t)$ в случае, когда положительные скачки процесса $\xi_1(t)$ и отрицательные скачки процесса $\xi_2(t)$ распределены экспоненциально с разными параметрами.

Ключевые слова: Осциллирующий случайный процесс, однородный случайный процесс с независимыми приращениями, стационарное распределение.

Khodjibayev Vali Rakhimdjaniyovich

Namangan State Technical University, professor

Namangan department of the Institute of the Mathematics

Uzbekistan Academy of Sciences, leading researcher

Jurayev Olim Kamoliddinovich

Namangan State Technical University, teacher

THE EXACT FORMULA FOR THE STATIONARY DISTRIBUTION OF AN OSCILLATING STOCHASTIC PROCESS

Abstract: A stochastic process $X(t)$ with switchings between two independent stationary processes $\xi_1(t)$ and $\xi_2(t)$ with independent increments upon reaching regulatory barriers is considered. We find an exact expression for the Laplas-Stilt'es transforms of the stationary distributions $X(t)$ in the case when the positive jumps of the process $\xi_1(t)$ and the negative jumps of the process $\xi_2(t)$ are distributed exponentially with different parameters.

Key words: Oscillating stochastic process, homogeneous stochastic process with independent increments, stationary distribution.

1. Kirish.

$\xi_i(t)$, $t \geq 0$, $\xi_i(0) = 0$, $i = 1, 2$, -o'zaro bog'liqsiz bo'lgan bir jinsli bog'liqsiz orttirmali tasodifiy jarayonlar bo'lib, $m_1 = E\xi_1(1) > 0$, $m_2 = E\xi_2(1) < 0$ va bu jarayonlarning izlari o'ngdan uzluksiz bo'lsin. Ixtiyoriy $b > 0$ uchun $\xi_1(t)$ ning b ga, $\xi_2(t)$ ning $-b$ qiymatga birinchi marta yetib borish momentlariga teng bo'lgan

$$\tau_1 = \inf \{ t \geq 0 : \xi_1(t) \geq b \}, \quad \tau_2 = \inf \{ t \geq 0 : \xi_2(t) \leq -b \}$$

tasodifiy miqdorlarni kiritamiz.

$X(t)$ jarayonni quyidagicha aniqlaymiz: $X(0) = 0$, $X(t) = 0$ $0 < t \leq \tau_1$ vaqt oralig'ida, ya'ni $\xi_1(t)$ jarayon τ_1 momentda birinchi marta b qiymatga yetib borguncha $\xi_1(t)$ bilan ustma-ust tushadi va $X(\tau_1) = b$ deb qabul qilamiz. $t > \tau_1$ da τ_1 momentdan keyin birinchi marta $\theta_1 := \tau_1 + \tau_2$ momentda nol qiymatga yetib borguncha $X(t)$ jarayonning orttirmalari sifatida $\xi_2(t)$ jarayonning orttirmalaridan foydalaniladi va $X(\theta_1) = 0$ deb olamiz. So'ngra $X(t)$ qandaydir $\theta_1 + \tau_3$ momentda b qiymatga yetib borguncha uning orttirmalari $\xi_1(t)$ jarayonning bog'liqsiz orttirmalari kabi bo'lib, $X(\theta_1 + \tau_3) = b$ bo'ladi. Undan so'ng $\theta_2 := \theta_1 + \tau_3 + \tau_4$ momentda nol qiymatga yetib borguncha $X(t)$ jarayonning orttirmalari yana $\xi_2(t)$ jarayon orttirmalariga aylanadi va bu yerda ham $X(\theta_2) = 0$ o'rinli bo'ladi. $X(t)$ orttirmalarining bundan keyingi $\xi_2(t)$ va $\xi_1(t)$ jarayonlar orttirmalariga almashishi shu sxema bo'yicha davom etadi, ya'ni $k = 0, 1, 2, \dots$ qiymatlar uchun

$$X(t) = \begin{cases} \min \{ \xi_1(t - \theta_k), b \}, & \theta_k < t \leq \theta_k + \tau_{2k+1}, \\ \max \{ b + \xi_2(t - \theta_k - \tau_{2k+1}), 0 \}, & \theta_k + \tau_{2k+1} < t \leq \theta_{k+1}, \end{cases}$$

bu yerda $\theta_0 = 0, \theta_{k+1} := \theta_k + \tau_{2k+1} + \tau_{2k+2}, \tau_{2k+1}$ tasodifiy miqdorlar τ_1 kabi, τ_{2k+2} lar esa τ_2 kabi taqsimlangan va ularning hammasi bog'liqsizdir.

$X(t)$ uzluksiz vaqtli regeneratsiyalanuvchi tasodifiy jarayon ([1], 21-bob) bo'lib, uning $t = \theta_k, k = 1, 2, \dots$ momentlardagi qiymatlari nolga teng bo'lgani uchun $\theta_1, \theta_2, \dots$ lar regeneratsiya momentlari bo'ladi. Regeneratsiya momentlari orasidagi vaqtlar o'zaro bog'liqsiz va θ_1 bilan bir xil taqsimotga ega bo'lgan tasodifiy miqdorlardan iboratdir. $X(t)$ jarayon izlarining regeneratsiya momentlari orasidagi ehtimollik xarakteristikalarini bir xil bo'ladi. $m_1 > 0, m_2 < 0$ bo'lgani uchun $E\theta_1 = E\tau_1 + E\tau_2 < \infty$, bundan esa, qarayotgan jarayonning $t \rightarrow \infty$ dagi statsionar taqsimoti mavjud ekanligi kelib chiqadi ([1], 21-bob, teorema 5.1).

Eslatib o'tamizki, ma'lum chegaralarga yetib borganda orttirmalarining taqsimotini o'zgartiruvchi jarayonlar *tebranuvchi (oscillatory) tasodifiy jarayonlar* deyiladi. Tebranuvchi jarayonlar ommaviy xizmat ko'rsatish, zahiralarini saqlash, ketma-ket tahlil nazariyalarida va matematik statistikada ko'plab tadbiqlarga ega ([2] ga qarang). Har xil turdagi tebranuvchi tasodifiy jarayonlar taqsimotlarini o'rganishga bir qator maqolalar bag'ishlangan bo'lib, ular haqidagi bibliografik ma'lumotlarni [3], [4] ishlardan topish mumkin. Xususan, [3] da $\xi_i(t), i = 1, 2$ jarayonlar umumiy ko'rinishda bo'lgan holda $X(t)$ jarayon va uning statsionar taqsimotlarining Laplas-Stilt'es akslantirishlari uchun aniq ifodalar topilgan hamda hosil qilingan aniq ifodalarni hisoblash murakkabligi muhokama qilinib, $b \rightarrow \infty$ bo'lganda ularning asimptotik tahlili qilingan. Bunda $\xi_i(t), i = 1, 2$ jarayonlar Kramer tipidagi shartlarni qanoatlantirishi talab etilgan.

Ushbu ishning maqsadi, $\xi_1(t)$ tasodifiy jarayonning musbat sakrashlari va $\xi_2(t)$ jarayonning manfiy sakrashlari turli parametrlilik ko'rsatkichli taqsimot qonuniga ega bo'lgan holda $X(t)$ tebranuvchi tasodifiy jarayon statsionar taqsimotining Laplas-Stilt'es akslantirishi uchun aniq formula topishdan iboratdir.

Bunda [5], [6] ishlarda kiritilgan va tadqiq qilingan $u/(u - \psi_i(\lambda))$, $u > 0$, (bu yerda $\psi_i(\lambda) = \xi_i(1)$, $i=1,2$ tasodifiy miqdorlar taqsimotlari Laplasa-Stilt'es akslantirishlarining logarifmi) funksiyalarning cheksiz bo'linuvchi faktorizatsiyasi komponentlarining xossaligidan hamda [3] ish natijalaridan foydalaniladi.

2. Dastlabki ma'lumotlar

$\psi_i(\lambda) = \ln Ee^{\lambda \xi_i(1)}$, $i=1,2$, $\operatorname{Re} \lambda = 0$ bo'lsin. U holda $\operatorname{Re} \lambda = 0$, $u > 0$ da

$$r_i(u, \lambda) = \frac{u}{u - \psi_i(\lambda)}$$

funksiyalar cheksiz bo'linuvchi taqsimotlarning Laplas akslantirishlari bo'ladi, ya'ni

$$\frac{u}{u - \psi_i(\lambda)} = u \int_0^\infty e^{-ut} \left\{ \int_{-\infty}^\infty e^{\lambda x} d_x P(\xi_i(t) < x) \right\} dt.$$

Ma'lumki ([5]), $r_i(u, \lambda)$ funksiyalarni $\operatorname{Re} \lambda = 0$, $u > 0$ qiymatlarda *cheksiz bo'linuvchi faktorizatsiya* deb ataluvchi $r_i(u, \lambda) = r_{i+}(u, \lambda) r_{i-}(u, \lambda)$ ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lib, bunda $r_{i+}(u, \lambda)$ $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ da tashuvchisi manfiy bo'lmagan yarim o'qda joylashgan cheksiz bo'linuvchi taqsimotning Laplas akslantirishi, $r_{i-}(u, \lambda)$ esa, $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ da tashuvchisi musbat bo'lmagan yarim o'qda joylashgan cheksiz bo'linuvchi taqsimotning Laplas akslantirishi bo'ladi. $r_{i+}(u, \lambda) r_{i-}(u, \lambda)$ faktorizatsiyaning musbat (manfiy) komponentasi deb ataladi.

[5] ishdan ma'lumki, $r_{i+}(u, \lambda)$ va $r_{i-}(u, \lambda)$ lar uchun

$$r_{i+}(u, \lambda) = u \int_0^\infty e^{-ut} \left\{ \int_0^\infty e^{\lambda x} d_x P(\bar{\xi}_i(t) < x) \right\} dt = \exp \left\{ - \int_0^\infty (e^{\lambda x} - 1) d_x \int_0^\infty t^{-1} P(\xi_i(t) > x) e^{-ut} dt \right\},$$

$$r_{i-}(u, \lambda) = u \int_0^\infty e^{-ut} \left\{ \int_{-\infty}^0 e^{\lambda x} d_x P(\bar{\xi}_i(t) > x) \right\} dt = \exp \left\{ \int_{-\infty}^0 (e^{\lambda x} - 1) d_x \int_0^\infty t^{-1} P(\xi_i(t) < x) e^{-ut} dt \right\}$$

munosabatlar o'rinalidir, bu yerda $\bar{\xi}_i(t) = \sup_{0 \leq s \leq t} \xi_i(s)$, $\bar{\xi}_i(t) = \inf_{0 \leq s \leq t} \xi_i(s)$.

Tabiiyki, $r_{i+}(u, \lambda)$ funksiya $\operatorname{Re} \lambda < 0$ da analitik, $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ da uzluksiz va faqat cheksiz uzoqlikdagi nuqtada nolga teng bo'lishi mumkin, $r_{i-}(u, \lambda)$ funksiya esa, shunga o'xshash xossalarga o'ng yarim tekislikda ega bo'ladi. Agar ixtiyoriy

$A \subset \mathbb{R}$ Borel to'plami uchun
$$g(\lambda) = \int_A e^{\lambda x} dG(x), \quad \left| \int_A dG(x) \right| < \infty$$
 ko'rinishidagi funksiyalar to'plami $S(A)$ bo'lsa, ko'rish qiyin emaski, λ o'zgaruvchining funksiyasi sifatida $r_{i+}(u, \lambda) \in S([0, \infty))$, $r_{i-}(u, \lambda) \in S((-\infty, 0])$ bo'ladi.

Har qanday $g \in S(\mathbb{R})$ va ixtiyoriy $A \subset \mathbb{R}$ Borel to'plami uchun

$$[g(\lambda)]^A = \int_A e^{\lambda x} dG(x)$$

belgilash kiritamiz va $\varphi_i(u) = Ee^{-u\tau_i}$, $i=1,2$ bo'lsin.

[3] da quyidagi teorema isbot qilingan.

Teorema 1 [3]. $u > 0$, $\operatorname{Re} \lambda = 0$ bo'lganda $X(t)$ jarayonning Laplas-Stilt'es akslantirishi uchun quyidagi munosabat o'rinlidir:

$$\begin{aligned} \Psi(u, \lambda) &:= \int_0^\infty e^{-ut} Ee^{\lambda X(t)} dt = \\ &= \frac{1}{1 - \varphi_1(u)\varphi_2(u)} \left\{ r_{1-}(u, \lambda) u^{-1} [r_{1+}(u, \lambda)]^{(0, b)} + e^{\lambda b} Ee^{-u\tau_1} u^{-1} r_{2+}(u, \lambda) [r_{2-}(u, \lambda)]^{(-b, 0]} \right\}. \end{aligned}$$

3. Statsionar taqsimot uchun aniq formula

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} P(X(t) < x) &= F(x), \quad W(\lambda) = \int_{-\infty}^\infty e^{\lambda x} dF(x), \\ \chi_+(b) &= \xi_1(\tau_1) - b, \quad \chi_-(b) = \xi_2(\tau_2) + b, \end{aligned} \quad (1)$$

ya'ni $F(x)$ funksiya $X(t)$ jarayon statsionar holatining taqsimot funksiyasi, $W(\lambda)$ uning Fur'e-Stilt'es akslantirishi, $\chi_+(b) = (\chi_-(b))_-$, $\xi_1(t) = (\xi_2(t))_+$

jarayonning $b (-b)$ ga birinchi marta yetib borgandagi $b (-b)$ dan yuqoriga (quyiga) sakrash qiymatini ko'rsatuvchi tasodifiy miqdordir.

Teorema 2. $\xi_1(t)$ tasodifiy jarayonning musbat sakrashlari $\alpha > 0$ va $\xi_2(t)$ jarayonning manfiy sakrashlari $\beta > 0$ parametrli ko'rsatkichli taqsimot qonunlariga ega bo'lsin. U holda

$$W(\lambda) = -\frac{1}{a} \left[\frac{\alpha(1 - e^{\lambda b}) - \lambda}{(\alpha - \lambda)\psi_1(\lambda)} + \frac{\lambda e^{\lambda b} + \beta(e^{\lambda b} - 1)}{(\beta + \lambda)\psi_2(\lambda)} \right]$$

tenglik o'rinli bo'ladi, bu yerda

$$a = E\tau_1 + E\tau_2 = \frac{b + 1/\alpha}{m_1} + \frac{b + 1/\beta}{|m_2|}, \quad \psi_i(\lambda) = \ln Ee^{\lambda \xi_i(1)}, \quad i = 1, 2, \quad \operatorname{Re} \lambda = 0.$$

Isboti. Avvalo, biz qarayotgan holda

$$Ee^{\lambda \chi_+(b)} = \frac{\alpha}{\alpha - \lambda}, \quad E\chi_+(b) = \frac{1}{\alpha}, \quad Ee^{\lambda \chi_-(-b)} = \frac{\beta}{\beta + \lambda}, \quad E\chi_-(b) = \frac{1}{\beta} \quad (2)$$

ekanligini ta'kidlab o'tamiz. Ma'lumki (masalan, [7] ga qarang), ixtiyoriy $\xi_1(t)$ ($\xi_2(t)$) bir jinsli bog'liqsiz orttirmali tasodifiy jarayon uchun $\operatorname{Re} \lambda \leq 0, u \geq 0$ ($\operatorname{Re} \lambda \geq 0, u \geq 0$) bo'lganda quyidagi munosabatlar o'rinli bo'ladi:

$$r_{1+}^{-1}(u, \lambda) [r_{1+}(u, \lambda)]^{[b, \infty)} = E(e^{\lambda \xi_1(\tau_1) - u\tau_1}; \tau_1 < \infty), \quad (3)$$

$$r_{2-}^{-1}(u, \lambda) [r_{2-}(u, \lambda)]^{(-\infty, b]} = E(e^{\lambda \xi_2(\tau_2) - u\tau_2}; \tau_2 < \infty). \quad (4)$$

$P(\tau_i < \infty) = 1, i = 1, 2$ bo'lgani uchun (1), (3), (4) munosabatlardan

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow 0} r_{1+}^{-1}(u, \lambda) [r_{1+}(u, \lambda)]^{[b, \infty)} &= e^{\lambda b} Ee^{\lambda \chi_+(b)}, \\ \lim_{u \rightarrow 0} r_{2-}^{-1}(u, \lambda) [r_{2-}(u, \lambda)]^{(-\infty, b]} &= e^{-\lambda b} Ee^{\lambda \chi_-(-b)} \end{aligned} \quad (5)$$

tengliklarni hosil qilamiz.

$$r_{1+}(u, \lambda) \in S([0, \infty)), r_{2-}(u, \lambda) \in S((-\infty, 0])$$

bo'lgani uchun esa,

$$\left[r_{1+}(u, \lambda) \right]^{[0, b)} = r_{1+}(u, \lambda) - \left[r_{1+}(u, \lambda) \right]^{[b, \infty)}, \quad (6)$$

$$\left[r_{2-}(u, \lambda) \right]^{(-b, 0]} = r_{2-}(u, \lambda) - \left[r_{2-}(u, \lambda) \right]^{(-\infty, -b]}$$

tengliklar kelib chiqadi. $\frac{u}{u - \psi_i(\lambda)} = r_{i+}(u, \lambda) r_{i-}(u, \lambda), i = 1, 2,$

$$W(\lambda) = \lim_{u \rightarrow 0} u^{-1} \Psi(u, \lambda), \quad \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{1 - E e^{-u(\tau_+ + \tau_-)}} = \frac{1}{E(\tau_+ + \tau_-)}, \quad \lim_{u \rightarrow 0} E e^{-u\tau_+} = 1$$

munosabatlardan (5), (6) va teorema 1 ga asosan

$$W(\lambda) = -\frac{1}{a} \left[\frac{1 - e^{\lambda b} E e^{\lambda \chi_+(b)}}{\psi_1(\lambda)} + \frac{e^{\lambda b} - E e^{\lambda \chi_-(b)}}{\psi_2(\lambda)} \right], \quad (7)$$

Vald ayniyatiga asosan esa,

$$E \xi_1(\tau_1) = b + E \chi_+(b) = E \xi_1(1) E \tau_1, \quad E \xi_2(\tau_2) = -b + E \chi_-(b) = E \xi_2(1) E \tau_2,$$

ya'ni

$$a = E \tau_1 + E \tau_2 = \frac{b + E \chi_+(b)}{m_1} + \frac{b + E |\chi_-(b)|}{|m_2|} \quad (8)$$

tengliklar hosil bo'ladi. (2), (7) va (8) tengliklardan teorema 2 ning isboti kelib chiqadi.

Adabiyotlar

1. A.A. Borovkov. *Probability Theory*, London: Springer-Verlag, 2013.
MR 3086572
2. А.А.Боровков. *Вероятностные процессы в теории массового обслуживания*. “Наука”, Москва, 1972, 367 стр.
3. В. И. Лотов, В. Р. Ходжибаев, “О случайном процессе с переключениями”, *Сиб. электрон. матем. изв.*, **16** (2019), 1531–1546.
4. В. И. Лотов, “О случайном блуждании с переключениями”, *Сиб. электрон. матем. изв.*, **15** (2018), 1320–1331.
5. Б.А. Рогозин, О распределении некоторых функционалов, связанных с граничными задачами для процессов с независимыми приращениями.

Теория вер. и ее прим., Том XI, вып. 4 (1966), стр. 656-670.

6. Б.А. Рогозин, Распределение максимума процесса с независимыми приращениями. Сиб. мат. журн., Том X, №6 (1969), стр. 1334-1363.

7. V. R. Khodzhibaev, "Asymptotic representations for characteristics of exit from an interval for stochastic processes with independent increments", Siberian Adv. Math., 7:3 (1997), 75–86.