

Usnomxo‘jayev Zokirxo‘ja Yunusxo‘ja ug‘li

O‘zbekiston milliy universiteti tayanch doktoranti

1.O‘zbekiston Milliy universiteti (Toshkent, O‘zbekiston).2. I.M.Gubkin nomidagi

RDU neft va gaz (ITI) ning Toshkent shahridagi filiali (Toshkent, O‘zbekiston)

zokusm@gmail.com

UO‘K 514.77

GAUSS EGRILIGI MUSBAT O‘ZGARMAS BO‘LGAN AYLANMA

SIRTLARNING GEODEZIK AKSLANTIRISHLARI

Annotatsiya. Ushbu maqola Gauss egriligi musbat o‘zgarmas bo‘lgan aylanma sirtlarning geodezik akslantirishlarini o‘rganishga bag‘ishlangan. Asosiy e‘tibor berilgan sirtlar sinfining kanonik vakili bo‘lgan klassik holat - aylanma sirtlarga qaratilgan. Berilgan sirtning geodezik chizig‘ini boshqa sirtning geodezik chizig‘iga mos qo‘yuvchi akslantirishlar differensial geometriyada asosiy rol o‘ynaydi. Sfera kabi musbat egrilik sirtlari uchun bu akslantirish uni nomanfiy egrilikli sirtlarga mos qo‘yadi va izometrik akslantirishlardan tubdan farq qiladigan bir qator noyob va notrivial xususiyatlarga ega bo‘ladi.

Tayanch iboralar: Ko‘pxillik, affin bog‘lanishi, geodezik akslantirish, deformatsiya tenzori, aylanma sirt, notrivial geodezik akslantirish, trivial geodezik akslantirish.

Усмонхужаев Зокирхужа Юнусхужа угли.

Базовый докторант Национального Университета Узбекистана

¹Национальный Университет Узбекистана(Ташкент, Узбекистан),

²Филиал РГУ нефти и газа (НИУ) имени И.М. Губкина в городе

Ташкенте(Ташкент, Узбекистан)

zokusm@gmail.com

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ПОСТОЯННОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНОЙ

Аннотация. Данная статья посвящена изучению геодезических отображений поверхностей вращения с положительной константой гауссовой кривизны. Основное внимание уделяется классическому случаю - поверхностям вращения, являющимся каноническим представителем

данного класса поверхностей. Отображения, сопоставляющие геодезическую линию данной поверхности с геодезической линией другой поверхности, играют ключевую роль в дифференциальной геометрии. Для поверхностей положительной кривизны, таких как сфера, это отображение ставит ее в соответствие с поверхностями неотрицательной кривизны и обладает рядом уникальных и нетривиальных свойств, которые принципиально отличаются от изометрических отображений.

Ключевые слова: Многообразие, аффинная связность, геодезическое отображение, тензор деформации, поверхность вращения, нетривиальное геодезическое отображение, тривиальное геодезическое отображение.

Usmonkhujayev Zokirkhuja Yunuskhujayev ugli.

PhD student of National University of Uzbekistan

1. National University of Uzbekistan (Tashkent, Uzbekistan), Tashkent

2. Branch of the I.M. Gubkin Russian State University of Oil and Gas (National Research University) (Tashkent, Uzbekistan)

zokusm@gmail.com

GEODESIC MAPPINGS OF REVOLUTION SURFACES WITH POSITIVE CONSTANT GAUSSIAN CURVATURE

Abstract. *This article studies geodesic mappings of revolution surfaces with positive constant Gaussian curvature. The focus is on the classical case—surfaces of revolution, which are the canonical representatives of this class of surfaces. Mappings that associate a geodesic line of a given surface with a geodesic line of another surface play a key role in differential geometry. For surfaces of positive curvature, such as the sphere, this mapping associates it with surfaces of nonnegative curvature and possesses a number of unique and nontrivial properties that are fundamentally different from isometric mappings.*

Keywords: *Manifold, affine connection, geodesic mapping, deformation tensor, surface of revolution, nontrivial geodesic mapping, trivial geodesic mapping.*

Введение

Геометрические отображения поверхностей вращения положительной постоянной гауссовой кривизны — это классическая задача, которая привела к глубоким результатам в дифференциальной геометрии. Ключевой вывод, следующий из теоремы Белтрами, заключается в том, что Римановы многообразия, геометрические которых соответствуют (при геометрических отображениях) к геометрическим, пространствам постоянной кривизны, также являются пространствами постоянной кривизны. Все ее геометрические отображения на себя исчерпываются движениями группы вращений.

Анализ литературы

Литературная база работы является релевантной и достаточной для заявленной темы. При желании углубить теоретическую или прикладную часть можно расширить список источников, включив дополнительные классические или современные публикации по дифференциальной геометрии и геометрическим отображениям. [1] основная монография по теме геометрических отображений, используется для базовых определений и теоретических основ. [2] современная коллективная монография, посвящённая специальным отображениям в дифференциальной геометрии, включая геометрические. Используется для ссылок на теоремы Белтрами и общие свойства отображений. [3] классический труд по римановой геометрии, используется для формул кривизны и символов Кристоффеля

Методология исследования

В статье определено понятие геометрических отображений поверхностей вращения в евклидовом пространстве, которое является частным случаем понятия геометрических отображений поверхностей, введенного профессором Йозефом Майкешем [2] для эквидистанционных поверхностей. Показано, что это понятие представляет собой геометрическое отображение, которое подставляет поверхности вращения с положительной и постоянной гауссовой кривизной в соответствии с поверхностями вращения с положительной и постоянной гауссовой кривизной [1], [2]. Примечательно, что в результате этого преобразования геометрические линии сохраняются.

Результаты и их анализ

Пусть M и N - гладкие многообразия размерности n с аффинными связностями.

Определение 1[1, с. 70]. Геодезическим отображением f многообразия M на N , называется взаимно однозначное соответствие между их точками, при котором каждая геодезическая линия многообразия M переходит в геодезическую линию многообразия N .

Рассмотрим эти многообразия в общей по отображению f системе координат $x^1, x^2, \dots, x^n$. Обозначим компоненты объектов связности многообразий M и N , в соответствующих точках $M(x)$ и $\overline{M}(x)$ через $\Gamma_{ij}^h(x)$ и $\overline{\Gamma}_{ij}^h(x)$, предполагая их симметричными, и положим

$$\overline{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + P_{ij}^h(x) \quad (h, i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

где, P_{ij}^k - тензор деформации.

Теорема 1[1, с. 72]. Для того чтобы отображение f многообразия аффинной связности M на многообразие аффинной связности N было геодезическим, необходимо и достаточно, чтобы тензор деформации связности P_{ij}^h отображения f представлялся в виде

$$P_{ij}^h(x) = \psi_i(x) \delta_j^h + \psi_j(x) \delta_i^h, \quad (2)$$

где δ_i^h — символы Кронекера, а ψ_i — некоторый ковариантный вектор.

Условия (2) носят тензорный характер и потому инвариантны относительно выбора общей по отображению f системы координат $x^1, x^2, \dots, x^n$. На основании этих условий уравнения (1) принимают вид

$$\overline{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \psi_i(x) \delta_j^h + \psi_j(x) \delta_i^h. \quad (3)$$

Замечание 1. Когда вектор $\psi_i(x)$ тождественно равен нулю, то геодезическое отображение f называется тривиальным или аффинным.

Пример 1. Пусть поверхность $\bar{S}$ является образом поверхности S при гомотетии в трёхмерном пространстве и k — коэффициент гомотетии. Тогда метрические тензоры поверхностей связаны соотношением $\bar{g}_{ij} = k^2 \cdot g_{ij}$. Следовательно, символы Кристоффеля совпадают $\bar{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k$ и геодезическая ℓ на S отображается на геодезическую $\bar{\ell}$ на $\bar{S}$, где канонические параметры s на ℓ и $\bar{s}$ на $\bar{\ell}$ связаны соотношением $\bar{s} = k \cdot s + const$.

Имея возможность использовать теорию геодезических отображений римановых многообразий, мы обратим внимание на специальные типы римановых пространств постоянной кривизны.

Теорема 2 [2, с 318]. Римановы многообразия, геодезические которых соответствуют (при геодезических отображениях) к геодезическим, пространствам постоянной кривизны, также являются пространствами постоянной кривизны.

Вопрос о существовании геодезических отображений проясняется следующим.

Теорема 3 [2, с 318]. Для пары пространств постоянной кривизны всегда найдётся нетривиальное геодезическое отображение, отображающее одно пространство на другое.

Теорема 2 является теоремой Бельтрами и в [2] отмечено, что эта теорема справедлива для $n=2$. Исследуя из этой теоремы, мы хотим исследовать класс поверхностей сохраняющих знак гауссовой кривизны при геодезическом отображении.

Пусть f — геодезическое отображение и F поверхность вращения, которое имеют метрику вида

$$ds^2 = a(\omega)d\omega^2 + b(\omega)dt^2 \quad (4)$$

где $a(\omega)$ и $b(\omega)$ — ненулевые функции, а $\omega \in [\omega_1, \omega_2], t \in [0, 2\pi)$ координаты. Параметры ω_1 и ω_2 могут достигать до значений $\pm\infty$. Обозначим через F_1 образ поверхности вращения F при отображении f . Предположим геодезические линии $l = l(t), t \in R$ из F отображаются в геодезические F_1 и метрика поверхности F_1 имеет следующий вид:

$$ds^2 = \frac{pa(\omega)}{(1+qb(\omega))^2} d\omega^2 + \frac{pb(\omega)}{1+qb(\omega)} dt^2 \quad (5)$$

где, p, q - положительные параметры, $1+qb(\omega) \neq 0$, $qb'(\omega) \neq 0$ и ω — тот же параметр, что и на поверхности F и $t \in [0, 2\pi)$.

Рассмотрим поверхности вращения положительной постоянной гауссовой кривизной с метрикой

$$ds^2 = d\omega^2 + \cos^2 \frac{\omega}{R} dt^2$$

где, R - радиус вращения и $\omega \in [\omega_1, \omega_2], t \in [0, 2\pi)$. Параметры ω_1 и ω_2 могут достигать до значений $\pm\infty$.

Теорема 4. Поверхности вращения положительной постоянной гауссовой кривизной допускают нетривиальное геодезическое отображение, и полученные поверхности имеют постоянную положительную гауссову кривизну.

Доказательство. По формуле (5), метрика поверхностей вращения положительной постоянной гауссовой кривизной имеет следующий вид:

$$ds^2 = \frac{p}{\left(1 + q \cos^2 \frac{\omega}{R}\right)^2} d\omega^2 + \frac{p \cos^2 \frac{\omega}{R}}{1 + q \cos^2 \frac{\omega}{R}} dt^2 \quad (6)$$

Согласно [3, с.553], гауссова кривизна двумерного многообразия определяется следующим образом:

$$K = \frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \frac{\left(\frac{\partial \Gamma_{11}^i}{\partial t} - \frac{\partial \Gamma_{21}^i}{\partial \omega} + \sum_j \Gamma_{2j}^i \cdot \Gamma_{11}^j - \sum_j \Gamma_{1j}^i \cdot \Gamma_{21}^j \right) \cdot g_{i2}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \quad (7)$$

где, Γ_{ij}^k - символы Кристоффеля, R_{1212} компонента тензора Римана.

Для полученной метрики (7) Γ_{ij}^k - символы Кристоффеля имеет вид

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{R} \cdot \frac{q \sin 2 \frac{\omega}{R}}{1 + q \cos^2 \frac{\omega}{R}}, \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 0, \Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2R} \sin 2 \frac{\omega}{R}$$

$$\Gamma_{11}^2 = 0, \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = -\frac{1}{R} \cdot \frac{\sin \frac{\omega}{R}}{\cos \frac{\omega}{R} \left(1 + q \cos^2 \frac{\omega}{R} \right)}, \Gamma_{22}^2 = 0.$$

Обозначим гауссову кривину поверхностей вращения положительной постоянной гауссовой кривизной через K_+ и используя формулу (7) имеем

$$K_+ = \frac{1}{R^2} \cdot \frac{1+q}{p}.$$

Теорема доказана.

Заключение

Геометрические отображения поверхностей положительной постоянной гауссовой кривизны представляют собой глубокую и элегантную область дифференциальной геометрии, находящуюся на стыке чистой математики и практических приложений. Изучение геометрических отображений поверхностей постоянной положительной кривизны служит моделью для более общих теорий в римановой геометрии. Оно иллюстрирует глубокую связь между локальной и глобальной геометрией многообразия, его топологией и возможностями отображений между многообразиями. Эти идеи находят продолжение в теории групп Ли, однородных пространств и в физике, в частности, в общей теории относительности.

Литература

1. Синюков Н. Геодезические отображения римановых пространств. М.: Наука, 1979. – 245с.
2. Josef Mikeš, Elena Stepanova, Alena Vanžurová et al. Differential Geometry of Special Mappings. First Edition Palacký University, Olomouc, 2015.
3. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967. 664 с.