

Сафаров Журабек Шакарович

Ташкентский университет информационных технологий имени

Мухаммада аль-Хоразмий профессор

E-mail: j.safarov65@mail.ru

УДК 517.958

**ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
УРАВНЕНИЯ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ
УСЛОВИЕМ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЯ**

***Аннотация:** В работе изучается обратная задача определения одномерного ядра интегрального члена многомерного интегро-дифференциального уравнения гиперболического типа. Обратная задача посвящена определению ядра памяти волнового процесса с интегральным условием переопределенности. Обратная задача сводится к нелинейному интегральному уравнению Вольтерра второго рода типа свертки. Методом сжимающих отображений доказывается однозначная разрешимость обратной задачи в пространстве непрерывных функций с весовыми нормами.*

***Ключевые слова:** интегро-дифференциальное уравнение, обратная задача, метод Фурье, ядро интеграла, спектральная задача, теорема Банаха, неравенство Гроноулла.*

Safarov Jurabek Shakarovich

Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad

al-Khwarizmi Professor

**INVERSE PROBLEM FOR AN INTEGRAL-DIFFERENTIAL
EQUATION IN A BOUNDED DOMAIN WITH AN INTEGRAL
OVERDETERMINATION CONDITION**

Abstract: *This paper studies the inverse problem of determining the one-dimensional kernel of the integral term of a multidimensional hyperbolic integro-differential equation. The inverse problem is devoted to determining the memory kernel of a wave process with an integral overdetermination condition. The inverse problem is reduced to a nonlinear Volterra integral equation of the second kind of convolution type. Using the contraction mapping method, the unique solvability of the inverse problem in the space of continuous functions with weighted norms is proved.*

Keywords: *integro-differential equation, inverse problem, Fourier method, integral kernel, spectral problem, Banach theorem, Gronoull inequality.*

Safarov Jo'rabek Shakarovich

Muhammad al-Xorazmiy nomidagi Toshkent axborot texnologiyalari
universiteti professori

INTEGRAL QO'SHIMCHA SHARTLI INTEGRO-DIFFERENSIAL TENGLAMA UCHUN CHEKLI SOHADA TESKARI MASALA

Annotatsiya: *Ushbu maqola ko'p o'lchovli giperbolik integro-differensial tenglamaning integral hadining bir o'lchovli yadrosini aniqlashning teskari masalasini o'rganadi. Teskari masala integral haddan tashqari aniqlanish sharti bilan to'lqin jarayonining xotira yadrosini aniqlashga bag'ishlangan. Teskari masala ikkinchi turdagi konvolyutsiya tipidagi chiziqli bo'lmagan Volterra integral tenglamasiga keltiriladi. Qisqartirish xaritalash usulidan foydalanib, teskari masalaning vaznli normalar bilan uzluksiz funktsiyalar fazosida yagona echilishi isbotlangan.*

Kalit so'zlar: *integro-differensial tenglama, teskari masala, Furye usuli, integral yadro, spektral masala, Banax teoremasi, Gronoull tengsizligi.*

1. Введение и постановка задачи

Обратные задачи для интегро-дифференциальных уравнений возникают во многих областях прикладной науки, таких как электродинамика, акустика, квантовая теория рассеяния, геофизика, астрономия и др. Состояние исследуемой среды, где распространяются упругие, электромагнитные волны, в момент времени когда проводится эксперимент очень зависит от ее состояния во все предыдущие моменты времени. Математически, в правые части соответствующих классических уравнений распространения волн добавляются интегралы типа свертки, которые описывают явление запаздывания. В результате мы приходим к решению интегро-дифференциальных уравнений.

К настоящему времени исследование обратных задач посвященных определению одномерного или многомерного ядра интегрального члена интегро - дифференциального уравнения стало объектом научных интересов многих ученых.

Следует отметить заслугу итальянского математика А. Лоренци и его соотечественников [1]–[4], которыми были получены самые первые результаты в теории обратных задач для интегро-дифференциальных уравнений. В работах [5]–[10] были исследованы одномерные обратные задачи определения ядра, входящего в интегро - дифференциальное уравнение с дельта-функцией в правой части, либо на граничном условии. Для поставленных в упомянутых работах задач доказаны теоремы существования, единственности на основе принципа сжимающих отображений и получены оценки условной устойчивости.

В данной работе исследуется обратная задача, заключающейся в нахождении одномерного ядра свертки интегрального члена многомерного интегро – дифференциального уравнения с гиперболическим оператором общего типа в главной части. При исследовании обратной задачи используется интегральное условие. Основным результатом данной работы является теорема о глобальной однозначной разрешимости обратной задачи.

Пусть $\Omega \subset R^n$ – ограниченная область с достаточно гладкой границей

$\partial \Omega$, а $D := \Omega \times \bar{I}$. В области D рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение:

$$u_t - Lu - k * u = g(x, t), (x, t) \in D, \quad (1)$$

с начальными

$$u|_{t=0} = \varphi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x), x \in \bar{\Omega}, \quad (2)$$

и граничным условиями:

$$u(x, t) = 0, (x, t) \in \partial D. \quad (3)$$

где $\partial D := \partial \Omega \times [0, T]$, $L = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) - c(x) - \dot{c}$ равномерный эллиптический оператор ($n \geq 1$), коэффициенты которого удовлетворяют условиям

$a_{ij} = a_{ji}, c(x) \geq 0, x \in \bar{\Omega}, \varphi(x), \psi(x)$ и $g(x, t) - \dot{c}$ заданные функции и

$$k * u = \int_0^t k(t - \tau) u(x, \tau) d\tau.$$

Нахождение функции $u(x, t)$ из (1)-(3), при известной $k(t)$ назовем прямой задачей.

Решением прямой задачи (1)-(3) называется функция $u(x, t)$, из класса $C^2(\bar{D})$, удовлетворяющего всем условиям задачи (1)-(3).

Обратная задача. Обратная задача заключается, в определении неизвестного ядра $k(t), t > 0$, если относительно решения прямой задачи (1)-(3) известна дополнительная информация

$$\int_{\Omega} u(x, t) h(x) dx = f(t), t \in [0, T], \quad (4)$$

где $h(x), f(t) - \dot{c}$ заданные функции.

Рассмотрим следующую спектральную задачу

$$Lv + \lambda^2 v = 0, x \in \Omega, \quad (5)$$

$$v|_{\partial \Omega} = 0. \quad (6)$$

Задача (5)-(6) имеет полное в $L_2(\Omega)$ множество ортонормированных собственных функций $v_m(x), m \geq 1$, и счетное множество положительных собственных значений λ_m .

Предположим, что решение задачи (1)-(3) представляется в виде ряда

Фурье

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} W_m(t) v_m(x), \quad (7)$$

где $v_m(x)$ – собственные функции задачи (5)-(6); $W_m(t)$ – коэффициенты Фурье определяемые формулой

$$W_m(t) = (u, v_m) = \int_{\Omega} u(x, t) v_m(x) dx. \quad (8)$$

Продифференцировав (формально) ряд (7) по x и t получим ряды:

$$u_{tt}(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} W''_m(t) v_m(x), \quad (9)$$

$$Lu(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} W_m(t) L v_m(x) = - \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 W_m(t) v_m(x). \quad (10)$$

В работе [11] доказано что, решения задачи (1)-(3) имеет вид:

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^n \left[\varphi_m \cos \lambda_m t + \frac{1}{\lambda_m} \psi_m \sin \lambda_m t + \frac{1}{\lambda_m} \int_0^t \sin \lambda_m(t-s) G_m(s) ds \right] v_m(x).$$

2. Теорема о разрешимости обратной задачи

Умножив обе части уравнения (1) на $h(x)$ и проинтегрировав по x в области ∂Q , воспользовавшись дополнительным условием (4), с учетом (8) имеем

$$f''(t) + \int_{\Omega} \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 W_m(t) v_m(x) h(x) dx = \int_0^t k(\tau) f(t-\tau) d\tau + \int_{\Omega} g(x, t) h(x) dx.$$

Продифференцировав это уравнение по t получим

$$k(t) = \frac{1}{f(0)} \left[f'''(t) - \int_{\Omega} g_t(x, t) h(x) dx + \int_{\Omega} \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 W'_m(t) v_m(x) h(x) dx \right], \quad (11)$$

где

$$W'_m(t) = \int_0^t \cos \lambda_m(t-s) \int_0^s k(s-\tau) W_m(\tau) d\tau ds.$$

Теорема. Пусть $f(t) \in C^3[0, T]$, $f(0) \neq 0$ и выполнены условия

$$1) \varphi(x) \in H^{\left[\frac{N}{2}\right]+4}(\Omega), \psi(x) \in H^{\left[\frac{N}{2}\right]+3}(\Omega);$$

$$2) g(\cdot, t) \in H^{\left[\frac{N}{2}\right]+3}(\Omega), g(x, \cdot) \in C^1[0, T];$$

$$3 \dot{\varphi}, L\varphi, \dots, L^{\left[\frac{N+4}{4}\right]} \varphi \in H_0^1(\Omega), \psi, L\psi, \dots, L^{\left[\frac{N+2}{4}\right]} \psi \in H_0^1(\Omega);$$

$$4 \dot{g}(\cdot, t), Lg(\cdot, t), \dots, L^{\left[\frac{N+2}{4}\right]} g(\cdot, t) \in H_0^1(\Omega),$$

тогда существует единственное решение обратной задачи (1)-(3) и (4) $k(t) \in C[0, T]$, удовлетворяющее уравнению (11).

Доказательство. Уравнение (25) представим в виде операторного уравнения

$$k = Ak. \quad (12)$$

Оператор A имеет вид:

$$Ak = k_0 - \frac{1}{f(0)} \int_{\Omega} \left[h(x) \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 v_m(x) \int_0^t \cos \lambda_m(t-s) \int_0^s k(s-\tau) W_m(\tau) d\tau ds \right] dx$$

где

$$k_0(t) = \frac{1}{f(0)} \dot{\varphi} + \int_{(8)} \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 [-\lambda_m \varphi_m \sin \lambda_m t + \psi_m \cos \lambda_m t + \int_0^t \cos \lambda_m(t-s) g_m(s) ds] v_m(x) h(x) dx \dot{\varphi}.$$

Обозначим через C_{σ} банахово пространство непрерывных функций, порожденных семейством весовых норм

$$\dot{\varphi} \vee k \vee \dot{\varphi}_{\sigma} = \{ \max_{t \in [0, T]} \vee k(t) e^{-\sigma t} \vee \}, \sigma \geq 0.$$

Очевидно, что при $\sigma=0$ данное пространство совпадает с пространством непрерывных функций с обычной нормой. Эту норму будем обозначать далее $\|k\|$. В силу неравенства

$$e^{-\sigma t} \|k\| \leq \|k\|_{\sigma} \leq \|k\|,$$

нормы $\|k\|_{\sigma}$ и $\|k\|$ эквивалентны для любого фиксированного $T \in (0, \infty)$. Число σ выберем позже. Пусть $P_{\sigma}(k_0, \|k_0\|) := \{k \in C_{\sigma} : \|k - k_0\|_{\sigma} \leq \|k_0\|\}$ - шар радиуса $\|k_0\|$ с центром в точке k_0 некоторого весового пространства $C_{\sigma}(\sigma \geq 0)$. Нетрудно заметить, что для $k \in P_{\sigma}(k_0, \|k_0\|)$ имеет место оценка

$$\|k\|_{\sigma} \leq \|k_0\|_{\sigma} + \|k_0\| \leq 2\|k_0\|.$$

Пусть $k(t) \in P_{\sigma}(k_0, \|k_0\|)$. Покажем, что при подходящем выборе $\sigma > 0$ оператор A переводит шар в шар, т.е. $A \in P_{\sigma}(k_0, \|k_0\|)$. Проверим выполнения условий теоремы Банаха о неподвижной точке [12].

$$\dot{\vee} Ak - k_0 \vee \dot{\vee} \max_{t \in [0, T]} \vee (Ak - k_0) e^{-\sigma t} \vee \dot{\vee}$$

$$\dot{\vee} \max_{t \in [0, T]} \left| \frac{1}{f(0)} \int_{\Omega} \left[h(x) \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 v_m(x) \int_0^t \cos \lambda_m(t-s) \int_0^s k(\tau) W_m(s-\tau) e^{-\sigma \tau} e^{-\sigma(t-\tau)} d\tau ds \right] dx \right| \leq \frac{2T}{|h(0)|} \left[\|h'\| + T \sum_{m=1}^{\infty} \right]$$

Выбирая $\sigma \geq \theta_0$ получим, что A переводит $P_{\sigma}(k_0, \|k_0\|)$ в $P_{\sigma}(k_0, \|k_0\|)$.

Теперь проверим выполнение второго условия:

$$\begin{aligned} & \dot{\vee} \vee (Ak^1 - Ak^2) \vee \dot{\vee} \sigma = \max_{t \in [0, T]} \vee (Ak^1 - Ak^2) e^{-\sigma t} \vee \dot{\vee} \\ & \dot{\vee} \max_{t \in [0, T]} \left| \frac{1}{h(0)} \int_0^t [M''''[k^1](t-\tau)k^1(\tau) - M''''[k^2](t-\tau)k^2(\tau)] e^{-\sigma \tau} e^{-\sigma(t-\tau)} d\tau \right| \\ & \leq \max_{t \in [0, T]} \frac{1}{|h(0)|} \int_0^t \vee [h'(t-\tau) - \int_0^t \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 v_m(x_0) W_m'(\theta-\tau) \cos \lambda_m(t-\theta) d\theta] k^1(\tau) - \left[h'(t-\tau) - \int_0^t \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 v_m(x_0) \right. \\ & \quad \left. \leq \max_{t \in [0, T]} \frac{1}{\dot{\vee} h(0) \vee \dot{\vee} \int_0^t \dot{\vee} \dot{\vee}} \right. \\ & \quad \left. + \int_0^t \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 v_m(x_0) \vee \cos \lambda_m(t-\theta) [W_m^{(1)}(\theta-\tau)k^1(\tau) - W_m^{(2)}(\theta-\tau)k^2(\tau)] \vee e^{-\sigma \tau} e^{-\sigma(t-\tau)} d\theta \dot{\vee} d\tau \right. \\ & \quad \left. (13) \right. \end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части (13), оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned} & \max_{t \in [0, T]} \frac{1}{\dot{\vee} h(0) \vee \dot{\vee} \int_0^t [\dot{\vee} h'(t-\tau) \vee \dot{\vee} k^1(\tau) - k^2(\tau) \vee e^{-\sigma \tau} e^{-\sigma(t-\tau)}] d\tau} \leq \frac{\|h'\| T}{\dot{\vee} h(0) \vee \dot{\vee} \cdot \frac{\|k^1 - k^2\|}{\sigma} \cdot \dot{\vee}} \dot{\vee} \\ & \quad (14) \end{aligned}$$

Для оценки второго слагаемого еще раз обратимся к неравенству (14). Тогда, мы имеем

$$\begin{aligned} & \max_{t \in [0, T]} \frac{1}{\dot{\vee} h(0) \vee \dot{\vee} \int_0^t \int_0^t \dot{\vee} \dot{\vee}} \\ & \quad - W_m^{(2)}(\theta-\tau)k^2(\tau) \dot{\vee} \vee e^{-\sigma \tau} e^{-\sigma(t-\tau)} d\theta \dot{\vee} d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \leq \max_{t \in [0, T]} \frac{1}{\int_0^t \int_0^t \left[\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 v_m(x_0) \vee \cos \lambda_m(t-\theta) \vee \left[\left| W_m^{(1)}(\theta-\tau) - W_m^{(2)}(\theta-\tau) \right| \left| k^1(\tau) \right| + \left| W_m^{(2)}(\theta-\tau) \right| \left| k^1(\tau) \right| \right] \right]} \\
& \leq \frac{T^2}{\int_0^t \int_0^t \left[\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 v_m(x_0) \left[T^2 \|k_0\| e^{\int_0^t |k_1(\theta)| d\theta} + 1 \right] \left(\|\varphi_m\| + \frac{1}{\lambda_m} \|f_m\| T \right) e^{\frac{\|k\| T^2}{2\lambda_1}} \frac{\|k^1 - k^2\|}{\sigma} \right]} \cdot \int_0^t \int_0^t \left[\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 v_m(x_0) \left[T^2 \|k_0\| e^{\int_0^t |k_1(\theta)| d\theta} + 1 \right] \left(\|\varphi_m\| + \frac{1}{\lambda_m} \|f_m\| T \right) e^{\frac{\|k\| T^2}{2\lambda_1}} \frac{\|k^1 - k^2\|}{\sigma} \right] d\theta d\tau.
\end{aligned} \tag{15}$$

Здесь мы воспользовались оценками (15) и (17) полученными в работе [28].

Подставляя (16) и (17) в (18) получим

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_0^t \left[\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 v_m(x_0) \left[T^2 \|k_0\| e^{\int_0^t |k_1(\theta)| d\theta} + 1 \right] \left(\|\varphi_m\| + \frac{1}{\lambda_m} \|f_m\| T \right) e^{\frac{\|k\| T^2}{2\lambda_1}} \frac{\|k^1 - k^2\|}{\sigma} \right] d\theta d\tau = \max_{t \in [0, T]} \int_0^t \int_0^t \left[\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 v_m(x_0) \left[T^2 \|k_0\| e^{\int_0^t |k_1(\theta)| d\theta} + 1 \right] \left(\|\varphi_m\| + \frac{1}{\lambda_m} \|f_m\| T \right) e^{\frac{\|k\| T^2}{2\lambda_1}} \frac{\|k^1 - k^2\|}{\sigma} \right] d\theta d\tau \\
& \leq \frac{T}{\int_0^t \int_0^t \left[\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 v_m(x_0) \left[T^2 \|k_0\| e^{\int_0^t |k_1(\theta)| d\theta} + 1 \right] \left(\|\varphi_m\| + \frac{1}{\lambda_m} \|f_m\| T \right) e^{\frac{\|k\| T^2}{2\lambda_1}} \frac{\|k^1 - k^2\|}{\sigma} \right] d\theta d\tau} \int_0^t \int_0^t \left[\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 v_m(x_0) \left[T^2 \|k_0\| e^{\int_0^t |k_1(\theta)| d\theta} + 1 \right] \left(\|\varphi_m\| + \frac{1}{\lambda_m} \|f_m\| T \right) e^{\frac{\|k\| T^2}{2\lambda_1}} \frac{\|k^1 - k^2\|}{\sigma} \right] d\theta d\tau =: \frac{\theta_1}{\sigma} \|k^1\|
\end{aligned}$$

Как следует из полученных оценок если число σ выбрать из условия $\sigma > \max\{\theta_0, \theta_1\}$, то оператор A является сжимающим на $P_\sigma(k_0, \|k_0\|)$. Тогда, согласно принципу Банаха, уравнение (12) имеет и притом единственное решение в $P_\sigma(k_0, \|k_0\|)$ при любом фиксированном $T > 0$ [12, с.84].

Теорема доказана.

Литература

1. Lorenzi A. and Paparoni E. Direct and inverse problems in the theory of materials with memory // Ren. Sem. Math. Univ 1992. – №87. - p. 105 – 138.
2. Lorenzi A and Sinestrari E. Stability results for a partial integrodifferential inverse problem. // Pitman Research Notes Math., 190 (1989), pp. 271–294.
3. Lorenzi A. An identification problem related to a nonlinear hyperbolic integro-differential equation // Nonlinear Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 1994. V. 22. N 1. P. 21–44. Zbl 0818.93014.

4. De Ferri L, P Lottici P, Lorenzi A, Montenero A, Salvioli-Mariani E. Study of silica nanoparticles–polysiloxane hydrophobic treatments for stone-based monument protection//Journal of Cultural Heritage 12 (4), 356-363.
5. Рахмонов А. А, Дурдиев У.Д, Бозоров З. Р. Задача определения скорости звука и функции памяти анизотропной среды // ТМФ, 207:1 (2021), 112–132. DOI:<https://doi.org/10.4213/tmf10035>
6. Romanov V.G. On the determination of the coefficients in the viscoelasticity equations // Siberian Math. J. 2014. V. 55.N 3. P. 503–510.
7. Сафаров Ж.Ш. Одномерная обратная задача для уравнения вязкоупругости в ограниченной области //Журнал Средневолжского математического общества, 17:3 (2015), 44–55.
8. Д.К. Дурдиев, Ж.Д. Тотиева. Задача об определении одномерного ядра уравнения вязкоупругости // Сиб. журн. индустр. матем., 16:2 (2013), 72–82.
9. Бухгейм А.Л, Калинина Н.И. Глобальная сходимость метода Ньютона в обратных задачах восстановления памяти // Сиб. матем. журн., 38:5 (1997), 1018–1033.
10. Сафаров Ж.Ш. Обратная задача для интегро-дифференциального уравнения гиперболического типа с дополнительной информацией специального вида в ограниченной области //Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 28:1 (2024).–С.29–44 <https://doi.org/10.14498/vsgtu>
11. Колмогоров А.Н, Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва: Наука, 1976. 542 с.
12. Safarov J.Sh, Durdiev D.K, Rakhmonov A.A. An Inverse Problem for a Hyperbolic Integro-Differential Equation in a Bounded Domain//Siberian Advances in Mathematics, 2024, Vol.34, No.2, pp. 91–103. <https://doi.org/10.1134/S1055134424020068>