

Kukiyeva Sayora Sayidakbarovna

Fizika-matematika fakulteti matematika kafedrası dotsenti

Farg'ona davlat universiteti

kukievasaera97@gmail.com

**Lobachevskiy tekisligida shakllarning
yuzlarini hisoblashga doir masalalarni tahlil qilish.**

Annotatsiya. Maqolada geometriyaning Lobachevskiyning tekislikdagi geometriyasi kabi bo'limi va uning oliy o'quv yurtlarida o'qitilishi haqida so'z boradi. Nazariy bilimlarni o'zlashtirishning murakkabligi tufayli maqolada nazariy materialni bayon qilish va isbotlash hamda yuzalarni topishga doir masalalarni amaliy yechish jarayonini integratsiyalash taklif etilgan. Ishda qo'yilgan maqsadlarga erishishga yordam berishi mumkin bo'lgan vazifalarga misollar keltirilgan.

Tayanch iboralar: Lobachevskiy geometriyasi, absolyut geometriya, Evklid geometriyasi aksiomalari, muntazam m-burchaklar yuzi, ichki va tashqi chizilgan aylana, doira yuzi.

Кукиева Саёра Сайидакбаровна

Доцент кафедры математики, физико-математического факультета

Ферганского государственного университета

kukievasaera97@gmail.com

**Разбор задач на вычисление площадей фигур
на плоскости Лобачевского.**

Аннотация. В статье говорится о таком разделе геометрии, как геометрия Лобачевского на плоскости, и его преподавании высших учебных заведениях. В связи со сложностями усвоения теоретических знаний в статье предлагается интегрировать процесс изложения теоретического материала и практического решения задач на доказательства и на нахождение площадей. В работе приведены примеры задач, которые могут способствовать достижению поставленных целей.

Ключевые слова: геометрия Лобачевского, абсолютная геометрия, аксиомы евклидовой геометрии, площадь правильных m -угольников, вписанная и описанная окружность, площадь круга.

Kukieva Sayora Sayidakbarovna

Associate Professor of the Department of Mathematics,

Faculty of Physics and Mathematics

Fergana State University

kukievasaera97@gmail.com

Solving problems on calculating the areas of figures on the Lobachevsky plane.

Abstract. The article discusses a section of geometry such as Lobachevsky's geometry on a plane and its teaching in secondary and higher educational institutions. Due to the complexity of mastering theoretical knowledge, the article proposes integrating the process of presenting theoretical material and practically solving problems for proof and finding areas. The work provides examples of tasks that can contribute to achieving the set goals.

Keywords: Lobachevsky's geometry, absolute geometry, axioms of Euclidean geometry, area of regular m -gons, inscribed and circumscribed circles, and area of a circle.

Введение. Изучение геометрии Лобачевского становится сложным для студентов из-за их привычки к стандартам евклидовой геометрии, которую они изучали в школе. Это затрудняет понимание структуры и основных элементов геометрии Лобачевского. Поэтому исследовательская работа направлена на поиск новых методических подходов для более эффективного преподавания геометрии Лобачевского студентам высших образовательных учреждений. Цель - разработки такого методического подхода, который позволит студентам лучше освоить материал по геометрии Лобачевского и получить глубокое понимание этой науки.

Для достижения целей исследования необходимо решить следующие задачи:

1) Тщательно отобрать и четко сформулировать необходимый теоретический материал, который будет использоваться в работе.

2) Обдумать и определить оптимальный порядок презентации теоретического материала, который позволит логично и последовательно изложить все необходимые аспекты исследования.

3) Подготовить и решить задачи, которые помогут закрепить изученный материал, и определить порядок их представления в процессе преподавания раздела «Геометрия Лобачевского на плоскости».

4) Внедрить разработанную методику в учебный процесс и проверить ее эффективность.

Основная часть. Исследовательская работа предлагает подход к преподаванию геометрии Лобачевского, который интегрирует теорию и практику. Вместо того, чтобы представлять обучающимся всю теорию сразу, показывается применение изученных концепций через решение задач на самостоятельный вывод некоторых формул и задач на доказательство. Затем продолжается объяснение нового материала. Этот методический подход имеет теоретическую значимость и может быть использован в преподавании геометрии Лобачевского. Обучающимся можно рассказать, что Лобачевский развивал свои идеи, опираясь на аксиомы евклидовой геометрии, заменив только одну из них – аксиому параллельности – её отрицанием. Отличительной особенностью абсолютной геометрии являются теоремы, не зависящие от аксиомы параллельности. Именно на основе абсолютной геометрии и аксиомы Лобачевского была разработана гиперболическая геометрия. В связи с этим все положения, определения, утверждения и теоремы абсолютной геометрии уместны и в неевклидовой геометрии Лобачевского. Необходимые теоретические сведения имеются в [1;2;3]. При подборе задач использовалось пособие [4].

Рассмотрим две связанные общей целью задачи на вывод одной из формул геометрии Лобачевского двумя способами. Решение этих задач должно сопровождаться наводящими вопросами преподавателя.

1. Вывести формулу для площади круга радиуса r на плоскости Лобачевского, рассматривая её как предел площадей правильных m -угольников, вписанных в окружность.

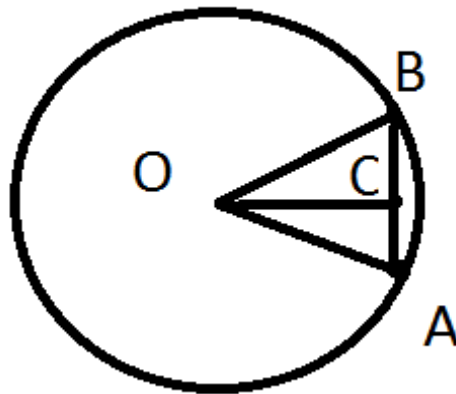


рис. 1

Решение.

В треугольнике AOC с прямым углом, как показано на рис.1

$$\operatorname{ch} \frac{OA}{R} = \operatorname{ctg}(\angle AOC) \cdot \operatorname{ctg}(\angle ACB). \quad \text{Отсюда} \quad \operatorname{ch} \frac{r}{R} = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{m} \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \angle ACB \right), \text{ или}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{m} \cdot \operatorname{ch} \frac{r}{R} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \angle ACB \right) \quad (1)$$

При стремлении $m \rightarrow \infty$ имеем: $\operatorname{tg} \frac{\pi}{m} \sim \frac{\pi}{m}, \quad \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \angle ACB \right) \sim \left(\frac{\pi}{2} - \angle ACB \right).$

Поэтому равенство (1) асимптотически будет равно следующему равенству:

$$\frac{\pi}{m} \cdot \operatorname{ch} \frac{r}{R} = \frac{\pi}{2} - \angle ACB.$$

Площадь треугольника AOC найдем через его углы:

$$S_{AOC} = R^2 (\pi - (\angle AOC + \angle ACB + \angle OAC)) = R^2 \left(\pi - \left(\frac{\pi}{m} + \angle ACB + \frac{\pi}{2} \right) \right).$$

Или $S_{AOC} = R^2 \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta_{AC} - \frac{\pi}{m} \right) \operatorname{tg} \frac{\pi}{m} \sim \frac{\pi}{m}, \quad \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta_{AC} \right) \sim \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta_{AC} \right)$. Площадь m -угольника будет равно

$$2m \cdot S_{AOC} = 2m \cdot R^2 \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta_{AC} - \frac{\pi}{2} \right) \frac{\pi}{m} \cdot \operatorname{ch} \frac{r}{R} = \frac{\pi}{2} - \vartheta_{AC} \cdot \operatorname{ch} \frac{r}{R}.$$

Если $m \rightarrow \infty$, то получаем

$$S_{\text{круга}} = 2n \cdot R^2 \left(\frac{\pi}{m} \cdot \operatorname{ch} \frac{r}{R} - \frac{\pi}{m} \right) = 2\pi R^2 \left(\operatorname{ch} \frac{r}{R} - 1 \right) = 4\pi R^2 \operatorname{sh}^2 \frac{r}{2R}.$$

Ответ: $S_{\text{круга}} = 4\pi R^2 \operatorname{sh}^2 \frac{r}{2R}.$

2. Вывести формулу для площади круга радиуса r на плоскости Лобачевского, рассматривая её как предел площадей правильных m -угольников, описанных около окружности.

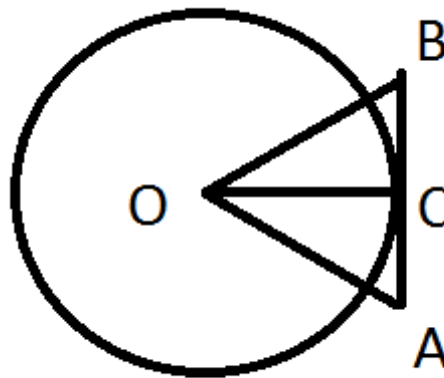


рис. 2

Решение.

В треугольнике AOC, с прямым углом C (рис.2)

$$\cos(\vartheta_{AC}) = \operatorname{ch} \frac{OA}{R} \cdot \sin(\vartheta_{OC}).$$

Отсюда можно получить

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta_{AC} \right) = \operatorname{ch} \frac{OA}{R} \cdot \sin \frac{\pi}{m}$$

.

Если $m \rightarrow \infty$, то получим $\frac{\pi}{2} - \vartheta_{AC} = \frac{\pi}{m} \cdot \operatorname{ch} \frac{OA}{R}.$

$$S_{AOC} = R^2 \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta_{AC} - \frac{\pi}{m} \right).$$

Площадь m -угольника получим, домножив площадь треугольника на $2m$:

$2m \cdot R^2 \left(\frac{\pi}{2} - \angle AOC - \frac{\pi}{m} \right)$. Асимптотически при $m \rightarrow \infty$ это выражение будет равно

$$S_{\text{круга}} = 2m \cdot R^2 \left(\frac{\pi}{m} \cdot \operatorname{ch} \frac{r}{R} - \frac{\pi}{m} \right) = 2\pi R^2 \cdot \left(\operatorname{ch} \frac{r}{R} - 1 \right) = 4\pi R^2 \operatorname{sh}^2 \frac{r}{2R}$$

Ответ: $S_{\text{круга}} = 4\pi R^2 \operatorname{sh}^2 \frac{r}{2R}$

Заключение. В заключение можно сказать, что разборы подобных задач могут помочь студентам научиться разбираться в сложных вопросах теории неевклидовой геометрии. Разбор статей [1, 2, 3, 5, 6] поможет студентам высших учебных заведений, специализирующихся на изучении математики, лучше освоить планиметрию Лобачевского.

Литературы

1. Narmanov A.Ya. Differensial geometriya va topologiya. Toshkent, "Mumtoz so'z", 2018-yil, – 256 b.
2. Мищенко А.С, Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. М., Факториал Пресс, 2000 г, – 448 с.
3. Феденко А.С. Сборник задач по дифференциальной геометрии. М, 1979 г, – 273 с.
4. Атанасян Л.С. Геометрия Лобачевского: учебное пособие – М.: Лаборатория знаний, 2021. – 467 с.
5. Прасолов В.В. Геометрия Лобачевского: учебное пособие. – М.: МЦНМО, 2014. – 88 с.
6. Kostin A.V., Sabitov I.Kh., Smarandache Theorem in hyperbolic Geometry // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. – 2014. – Т. 19. – № 2. – pp.221–232.