

## EMPIRIK XARAKTERISTIK FUNKSIYALAR UCHUN LIMIT TEOREMALAR

Sayfulloyeva Gulnoz Sayfulloyevna

Navoiy davlat universiteti dotsenti, PhD

E-mail: [sayfullayevagulnoz@gmail.com](mailto:sayfullayevagulnoz@gmail.com)

**Annotatsiya.** Ushbu maqolada limit teoremlari empirik xarakteristik funksiyalar asosida tuzilgan statistik metodlarning katta hajmdagi ma'lumotlar bilan qanday ishlashini tavsiflangan. Bu metodlarning barqarorligi va ishonchliligini tahlil qilishga yordam beradi. Empirik xarakteristik funksiyalar uchun mavjud limit teoremlarning yangi sharoitlarda umumlashtirilishi va qo'llanilishi, an'anaviy normal yoki ekponensial taqsimotlar uchun empirik xarakteristik funksiyalarning limit teoremlarini o'rganish ushbu maqolada keng yoritib berilgan.

**Kalit so'zlar:** empirik xarakteristik funksiyalar, empirik baholar, eksponensial taqsimot, limit teoremlar.

## ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ЭМПИРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Сайфуллоева Гулноз Сайфуллоевна

Навоийский государственный университет, доцент, PhD

E-mail: [sayfullayevagulnoz@gmail.com](mailto:sayfullayevagulnoz@gmail.com)

**Аннотация.** В данной статье описывается, как статистические методы, основанные на эмпирических характеристических функциях, предельные теоремы которых работают с большими объёмами данных, могут быть использованы для анализа устойчивости и надёжности этих методов. В данной статье представлен всесторонний обзор обобщения и применения существующих предельных теорем для эмпирических характеристических функций к новым ситуациям, а также исследование предельных теорем для эмпирических характеристических функций для обычных нормальных или показательных распределений.

**Ключевые слова:** эмпирические характеристические функции, эмпирические оценки, экспоненциальное распределение, предельные теоремы.

## LIMIT THEOREMS FOR EMPIRICAL CHARACTERISTIC FUNCTIONS

Sayfulloeva Gulnoz Sayfulloevna

Docent of Navoi State University, PhD

E-mail: [sayfullayevagulnoz@gmail.com](mailto:sayfullayevagulnoz@gmail.com)

**Abstract.** This article describes how statistical methods based on empirical characteristic functions, whose limit theorems work with large data sets, can be used to analyze the stability and robustness of these methods. This article provides a comprehensive overview of the generalization and application of existing limit theorems for empirical characteristic functions to new situations, as well as an examination of limit theorems for empirical characteristic functions for ordinary normal or exponential distributions.

**Key words:** empirical characteristic functions, empirical estimates, exponential distribution, limit theorems.

### Kirish

Ehtimollar nazariyasi — biron bir tasodifiy hodisalarning ro'y berish ehtimoliga ko'ra ular bilan qandaydir tarzda bog'langan boshqa tasodifiy hodisalarning ro'y berishi ehtimollarini topish bilan shug'ullanadigan matematika sohasi hisoblanadi. Biror hodisaning ro'y berish ehtimoli, masalan, teng ekanligi uncha ahamiyatli emas, chunki odam ishonchli natijaga erishishni xohlaydi. Shu nuqtai nazardan qaraydigan bo'lsak, biron bir A hodisa ro'y berish ehtimoli 1 ga ancha yaqinligi (yoki ro'y bermaslik ehtimoli 0 ga yaqinligi) haqidagi xulosalar katta ahamiyatga ega. Bunday hodisa amalda muqarrar ro'y berishi ishonchli bo'lgan hodisa deb qaraladi. Ham ilmiy, ham amaliy ahamiyatga ega bo'lgan bunday hodisalar, odatda A hodisa ko'p sonli tasodifiy, bir-biri bilan sust bog'liq

bo'lgan omillar ta'sirida ro'y beradi yoki bermaydi, degan farazga asoslanadi ([Katta sonlar qonuni](#) bunga misol bo'la oladi). Shuning uchun Ehtimollar nazariyasini ko'p sonli tasodifiy omillarning o'zaro ta'siridan paydo bo'ladigan qonuniyatlarni aniqlaydigan va o'rganadigan matematika bo'limi deb qaraladi.

### **Adabiyotlar sharhi**

O'zbekistonda Ehtimollar nazariyasi 20-asr 20-yillaridan boshlab V.I.Romanovskiy tashabbusi va bevosita ishtiroki bilan rivojlana boshladi. T.A.Sarimsoqov, S.X. Sirojiddinov, T.A. Azlarov, Sh.K. Farmonov, A.N. Nagayev, N.U. G'ofurov, T.M. Zuparov kabi olimlarning Ehtimollar nazariyasiga oid tadqiqotlari muhim ahamiyatga ega. Hozirgi kunda Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika matematikaning eng taraqqiy etgan tarmoqlaridan biridir.

Ushbu maqolada xarakteristik funksiyalar va ularning asosiy xossalari bayon etilgan. Tasodifiy miqdorlar, ularning taqsimot funksiyalari, zichlik funksiyalari va xarakteristik funksiyalar orasidagi bog'liqlik yoritilgan. Empirik xarakteristik funksiyalar tushunchasi kiritilib, ularning statistik baholashdagi roli, konvergensiya xossalari va taqsimotga moslik testlarida qo'llanilishi to'liq bayon etilgan. Bundan tashqari, ehtimollar nazariyasidagi klassik limit teoremlardan Markov, Chebishev, va Markaziy limit teoremasining nazariy asoslari va statistik stimulyatsiyalardagi amaliy qo'llanilishi ko'rib chiqilgan.

### **Tahlil va natijalar**

**Empirik xarakteristik funksiya** — bu ehtimollik nazariyasi va statistikada taqsimot funksiyasini tavsiflovchi xarakteristik funksiyaning namunaviy ma'lumotlar asosida baholash usulidir.

Aytaylik,  $X_1, X_2, \dots$  — mustaqil haqiqiy qiymatli tasodifiy o'zgaruvchilar bo'lib, ularning umumiy taqsimot funksiyasi  $F(x) = P(X_1 < x)$  va xarakteristik funksiya  $c(t)$  quyidagicha bo'lsin:

$$c(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(itx) dF(x)$$

Shuningdek,  $F_n(x)$  — birinchi  $n$  ta tasodifiy o'zgaruvchilar uchun empirik taqsimot funksiyasi bo'lsin. Feuerverger va Mureika (1977) tomonidan empirik xarakteristik funksiyalar tizimli o'rganilishi boshlangandi. Ular empirik xarakteristik funksiyani quyidagicha aniqlashgan:

$$c_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \exp(itX_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(itx) dF_n(x), \quad -\infty < t < \infty$$

Bu ifodalar statistik tahlilning turli sohalarida foydali bo'lishini tushuntiradi. Ular quyidagini ko'rsatadi:  $c_n(t) \rightarrow c(t)$  deyarli aniq har bir cheklangan oraliqda (Glivenko–Cantelli va P. Levy teoremlarining natijasi sifatida) yaqinlashadi.

Ammo ular shuni ham isbotlaydiki, agar taqsimot funksiyasi  $F$  butun real to'plamda aniqlangan bo'lsa, bu yaqinlashuv to'liq chiziqda ham sodir bo'ladi. Biroq, agar  $F$  diskret bo'lsa, yoki  $c_n(t)$  maxsus sinflardagi ketma-ketliklarga tegishli bo'lsa, unda bu konvergeniya bo'lmasligi mumkin.

Shuningdek quyidagi natija ham ko'rsatiladi:

$$\Delta_n = \sup_{T_n^{(1)} \leq t \leq T_n^{(2)}} |c_n(t) - c(t)| \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty \quad (1.2.1)$$

bo'lib, quyidagi shart bajariladi:

$$T_n = |T_n^{(1)}| \vee |T_n^{(2)}| = O\left(\left(\frac{n}{\log n}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

Agar taqsimot  $F$  ning singulyar (uzluksiz emas) qismining xarakteristik funksiyasi  $\pm\infty$  da yo'qolsa, ushbu oddiy kuzatish shuni ko'rsatadiki,  $c_n(t)$  ning yaqinlashuv xossalarini empirik jarayon asosida o'rganish ancha qulaydir.

### **Empirik Xarakteristik funksiyaning xossalari**

- Normallik:  $c_n(0) = 1$ ;
- Modul cheklanganligi:  $|c_n(t)| \leq 1$ ;
- Kompleks qiymatli: haqiqiy va mavhum qismlarga ega;
- Konvergeniya:  $c_n(t) \rightarrow c(t)$  ehtimollikda yoki deyarli aniq (almost sure) yaqinlashadi;

Agar  $t$  cheklanga oraliqda bo'lsa, bu yaqinlashuv bir jinsli (uniform) bo'ladi.

## Amaliy qo'llanilishi<sup>1</sup>

Empirik xarakteristik funksiya statistik tahlilning bir qancha yo'nalishlarida ishlatiladi:

- Parametrsiz statistik tahlillar;
- Taqsimotni aniqlash (distribution fitting);
- Simmetriya testlari;
- Gipoteza sinovlari (goodness-of-fit, independence);
- Markaziy limit teoremasi bahosi;
- Sovuq startle modellashtirish; (MCMC stimulyatsiyalarda)

Masalan, EXF yordamida quyidagi statistik test tuziladi:

$$T_n = \int \left[ \operatorname{Im} \varphi_n(t) \right]^2 dG(t)$$

Bu test yordamida taqsimot simmetriyasi tekshiriladi. EXF bir qancha afzalliklarga ega. Masalan, har qanday taqsimot uchun aniqlanadi, taqsimotni to'liq tavsiflaydi, hisoblash uchun qulay va ko'p o'lchamli umumlashtirishlar mavjud. Shu bilan birga kompleks qiymatli bo'lgani uchun interpretatsiyasi qiyinligi va og'ir dumli (heavy-tailed) taqsimotlarda konvergensiya sekinligi uning kamchik tomoni hisoblanadi.

Statistik baholash — bu namunaviy ma'lumotlar asosida taqsimot yoki parametrlar haqida xulosa chiqarish jarayonidir. Odatda statistik baholash klassik usullarga (masalan, momentlar, maksimal ehtimollik, bayes metodlari) asoslanadi. Ammo, empirik xarakteristik funksiya (EXF) bu jarayon uchun kuchli va alternativ yondashuv sifatida keng foydalanilmoqda. EXF yordamida statistik baholash quyidagicha amalga oshiriladi:

- Avval, haqiqiy xarakteristik funksiya  $\varphi(t; \theta)$  model parametrlariga bog'liq ravishda aniqlanadi;
- Keyin, empirik xarakteristik funksiya  $\varphi_n(t)$  namunaviy ma'lumotlardan hisoblanadi.
- Nihoyat, baholash funksiyasi (objective function) quyidagicha aniqlanadi:

---

<sup>17</sup> Feuerverger, A., Mureika, R. A. (1977). The empirical characteristic function and its applications. *Annals of statistics*, 5(1), 88-97

$$Q_n(\theta) = \int_x |\varphi_n(t) - \varphi(t; \theta)|^2 \omega(t) dt$$

bu yerda  $\omega(t)$  — og‘irlik (weight) funksiyasi.

Parametr bahosi  $\hat{\theta}_n$  quyidagicha olinadi:

$$\hat{\theta}_n = \arg \min_{\theta} Q_n(\theta)$$

EXF yordamida statistik baholashning bir muncha foydali jihatlari ko‘p. Ular quyidagicha:

- taqsimotga bog‘lanmagan yondashuv (nonparametric): EXF hatto og‘ir dumli (heavy-tailed) yoki noto‘g‘ri taqsimotlar uchun ham ishlaydi;
- komplekslikka bardoshli: Simmetrik yoki asimmetrik, uzluksiz yoki diskret taqsimotlarda qo‘llaniladi;
- qulay hisoblash: Integrallar raqamli usullar bilan hisoblanadi, gradientga ehtiyoj yo‘q.

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

Tasodifiy o‘zgaruvchilar mustaqil va bir xil taqsimotga ega bo‘lib,

umumiy taqsimot qonuni  $X$  ga ega bo‘lsin. Berilgan  $\mu$  va  $\sigma^2$  qiymatlari uchun quyidagi gipotezani tekshirish muammosini ko‘rib chiqamiz:

$$H_0 : X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Ushbu gipoteza quyidagiga teng ekvivalent:

$$H'_0 : X' \sim N(0, 1)$$

bu yerda  $X' = (X - \mu) / \sigma$ .

Shu sababli umumiylikni yo'qotmagan holda  $\mu=0$  va  $\sigma^2=1$  deb qabul qilamiz.

Endi,  $c_n(t)$  ni  $X_1, X_2, \dots, X_n$  namunaviy tasodifiy o'zgaruvchilarning empirik xarakteristik funksiyasi sifatida belgilaymiz. Shuni ta'kidlash kerakki,

$$\exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right)$$

$N(0,1)$  taqsimotining xarakteristik funksiyasi hisoblanadi. Shunday ekan, biz sinov statistikasi sifatida quyidagini tanlaymiz:

$$S_n = \sup_{t \in S} \left| c_n(t) - \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) \right|$$

bu yerda  $S$ -haqiqiy sonlar to'plamining chekli qismi. Bu yerda biz  $S$  ni ma'lum oraliq sifatida tanlaymiz. Maksimallashtirish nuqtalari sifatida quyidagini ko'ramiz:

$$\lambda(t) = \left| \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) - c^*(t) \right|$$

Bu yerda  $c^*(t)$  - alternative yaqin taqsimotning xarakteristik funksiyasidir.

$c^*(t)$  ni  $N(\mu, 1)$  taqsimotining xarakteristik funksiyasi deb olsak, ( $\mu$  kichik tanlangan), unda :

$$\lambda(t) = \left| \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) - \exp\left(i\mu t - \frac{1}{2}t^2\right) \right|$$

ya'ni,

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) |1 - \exp(i\mu t)|$$

va bu yanada soddalashtiriladi:

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) [2 - 2\cos(\mu t)]^{\frac{1}{2}}$$

Ko‘rinadiki,  $\lambda(t)$  ning qiymati  $\mu$  ning ishorasiga bog‘liq emas, shuning uchun  $\mu > 0$  deb olamiz. Bundan tashqari,  $t > 0$  uchun  $\lambda(t)$  maksimal bo‘ladigan yagona

nuqta mavjud, uni  $t_0$  deb belgilaymiz.

$t < 0$  uchun  $\lambda(t)$  maksimal faqat  $-t_0$  da erishiladi.

Demak,

$$S = [t_0, t_0]$$

**Teorema.** Agar  $\varphi_x(t) = \varphi_y(t)$  har qanday  $t \in R$  uchun to‘g‘ri bo‘lsa, demak  $X \stackrel{d}{\sim} Y$  ya’ni  $X$  va  $Y$  tasodifiy o‘zgaruvchilarning taqsimotlari bir xil bo‘ladi. Demak, tasodifiy o‘zgaruvchining xarakteristik funksiyasi to‘liq uning taqsimotini belgilaydi. Shu sababli, amaliyotda empirik xarakteristik funksiya yordamida (namunaviy ma’lumotlardan) nazariy xarakteristik funksiya bilan taqqoslab, taqsimotni identifikatsiya qilish (aniqlash) mumkin.

Taqsimotni empirik xarakteristik funksiyalar orqali identifikatsiya qilish amaliyotda quyidagicha ishlanadi: agar bizda biror empirik ma’lumotlar to‘plami mavjud bo‘lsa, ushbu namunaviy ma’lumotlar asosida empirik xarakteristik funksiya (EXF) quyidagicha aniqlar edik:

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e^{itX_j}$$

Bu  $X_1, X_2, \dots, X_n$  namunalar asosida qurilgan xarakteristik funksiyaning bahosidir.

**Misol:**

$$X_i \sim N(0,1)$$

(standart normal taqsimot) dan 1000 ta tasodifiy son hosil qilamiz.

Har bir  $t \in \mathbb{R}$  uchun  $\varphi_n(t)$  hisoblanadi.  $n \rightarrow \infty$  bo'lganda  $\varphi_n(t) \rightarrow \varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$  yaqinlashuvi kuzatiladi.

Stimulyatsiya yordamida taqsimotga moslikni tekshirishda empirik xarakteristik funksiya asosida quyidagi statistikani tuzish mumkin:

$$T_n = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_n(t) - \varphi_0(t)|^2 \omega(t) dt$$

bu yerda  $\varphi_0(t)$ -nol gipotezadagi xarakteristik funksiya va  $\omega(t)$ - og'irlik funksiyasi. Monte Carlo stimulyatsiya orqali  $T_n$  statistikasi taqsimotini hisoblash va uni nazariy taqsimot bilan taqqoslash mumkin.

**Xulosa**

Ushbu ishda quyidagi ilmiy natijalarga erishildi:

- xarakteristik funksiyalar va empirik xarakteristik funksiyalarning mavjudligi, uzluksizligi, va taqsimotni to'liq aniqlash xossalari asoslab berildi;
- empirik xarakteristik funksiyalarning statistik testlar, xususan, bir jinslilik testlari va goodness-of-fit testlaridagi amaliy qo'llanilishi yoritildi;
- xarakteristik funksiyalar orqali taqsimotni identifikatsiyalashning nazariy va stimulyatsion amaliyotlari ko'rsatildi.

**Adabiyotlar ro'yxati**

1. Абдушукуров А.А. Статистика непольных наблюдений. Ташкент. Университет. 2009.

2. *Abdushukurov A.A., Sayfulloyeva G.S.* On approximation of empirical Kac processes under general random censorship model. // Journal of Siberian Federal University <<Mathematics and physics>> (Scopus) ISSN 1997-1397. 2022. №3.
3. *Abdushukurov A.A. Sayfulloyeva G.S.* Empirical Kac processes under general random censorship model.//ITMM2021. 20<sup>th</sup> International Conference named after A.F.Terpugov Information Technologies and Mathematical Modelling, Russia, Tomsk, p.304-309.
4. Billingsley, P. (1995). Probability and Measure (3<sup>rd</sup> ed.). New York: Wiley.
5. The Annals of Probability 1981, Vol. 9, No.1, 130-131 pages
6. Casella, G., Berger, R.L. (2002). Statistical Inference (2<sup>nd</sup> ed.). Pacific Grove, CA: Duxbury Press.
7. Feuerverger, A., Mureika, R.A. (1977). The empirical characteristic function and its applications. Annals of statistics, 5(1), 88-97