

УДК 517.98

**Трансляционно-инвариантных и периодических мер Гиббса для модели
НС-Блюма-Капеля в случае "цикл" на дереве Кэли**

Хатамов Носиржон Муйдинович
Заведующий кафедры Математика НамГУ (DSc, доцент)
Захидова Хабиба Авазбек кизи, Докторант НамГУ
Маликджанова Хилола Маликжон кизи, Магистрант НамГУ

Аннотация. В данной работе рассмотрены трансляционно-инвариантные и периодические меры Гиббса для модели НС-Блюма-Капеля в случае "цикл" на дереве Кэли. Доказано, что при $0 < \theta < 1$ существуют три периодическая (одна являющаяся трансляционно-инвариантным и две не являющаяся трансляционно-инвариантным) меры Гиббса, а при $\theta > 1$ также существуют три периодическая (одна являющаяся трансляционно-инвариантным и две не являющаяся трансляционно-инвариантным) меры Гиббса в случае "цикл" для рассматриваемой модели.

Ключевые слова: дерево Кэли, конфигурация, модель НС-Блюма-Капеля, мера Гиббса, трансляционно-инвариантные и периодические меры.

**Translation-invariant and periodic Gibbs measures for the HC-Blume-Capel
model in the "cycle" case on the Cayley tree**

Khatamov Nosirjon Muydinovich,
Head of the Mathematics Department at NamSU (DSc, Associate Professor)
Zokhidova Khabiba Avazbek kizi, Doctoral Student at NamSU
Malikjonova Khilola Malikjon kizi, Master's Student at NamSU

Abstract. In this paper, we consider the translation-invariant and periodic Gibbs measures for the HC-Blume-Capel model in the case of a "cycle" on the Cayley tree. It is proved that for $0 < \theta < 1$ there are three periodic (one is translation-invariant and two are not translation-invariant) Gibbs measures, and for $\theta > 1$ there are also three periodic (one is translation-invariant and two non-translation-invariant) Gibbs measures in the "cycle" case for the model.

Keywords: Cayley tree, configuration, HC-Blume-Capel model, Gibbs measure, translation-invariant and periodic measures.

**Keli daraxtida "sikl" holatida HC-Blum-Kapel modeli uchun
transilyatsion-invariant va davriy Gibbs o'lchovlari**

Xatamov Nosirjon Muydinovich

NamDU matematika kafedrası mudiri (DSc, dotsent)
Zoxidova Xabiba Avazbek qizi, NamDU doktoranti
Malikjonova Xilola Malikjon qizi, NamDU magistranti

Abstrakt. Ushbu maqolada Keli daraxtidagi "sikl" holatida HC-Blum-Kapel modeli uchun transilyatsion-invariant va davriy Gibbs o'lchovlari ko'rib chiqilgan. $0 < \theta < 1$ uchun uchta davriy (bitta transilyatsion-invariant va ikkita transilyatsion-invariant bo'lmagan) Gibbs o'lchovi mavjudligi va $\theta > 1$ uchun ham uchta davriy (bitta transilyatsion-invariant va ikkita transilyatsion-invariant bo'lmagan) Gibbs o'lchovi mavjudligi ko'rib chiqilayotgan "sikl" holatidagi model uchun isbotlangan.

Kalit so'zlar: Keli daraxti, konfiguratsiya, HC-Blum-Kapel modeli, Gibbs o'lchovi, transilyatsion-invariant va davriy o'lchovlar.

В теории гиббсовских мер основной задачей является полное описание всех предельных мер Гиббса для данного гамильтониана. Мера Гиббса-это фундаментальный закон, определяющий вероятность микроскопического состояния данной физической системы и она играет важную роль в определении существования фазового перехода той или иной физической системы, т.к. каждой предельной мере Гиббса соответствует одной фазе физической системы, а фазовый переход происходит, когда мера Гиббса неединственна [1-4].

Дерево Кэли $\Gamma^k = (V, L)$ порядка $k \geq 1$ это бесконечное дерево, т.е. граф без циклов, из каждой вершины которого выходит ровно $k + 1$ ребер, где V есть множество вершин Γ^k , L - его множество ребер. Пусть i - функция инцидентности, сопоставляющая каждому ребру $l \in L$ его концевые точки $x, y \in V$. Если $i(l) = \{x, y\}$, то вершины x и y называются ближайшими соседями и обозначаются через $\langle x, y \rangle$. Пусть $d(x, y), x, y \in V$ есть расстояние между вершинами x, y , т.е. количество ребер кратчайший пути, соединяющей x и y .

Рассмотрим модель, где спин принимает значения из множества $\Phi = \{-1, 0, 1\}$. Тогда конфигурация σ на V определяется как функция $x \in V \rightarrow \sigma(x) \in \Phi$; множество всех конфигураций совпадает с $\Omega = \Phi^V$. Пусть $A \subset V$. Обозначим через Ω_A пространство конфигураций, определенных на множестве A .

Рассмотрим граф с тремя вершинами $-1, 0, 1$ (на множестве значений $\sigma(x)$), который имеет следующий вид (см.[4]-[6]):

цикл: $\{0, -1\}, \{0, 1\}, \{-1, 1\}$

Гамильтониан модели Блюма-Капеля определяется следующим образом:

$$H(\sigma) = J \sum_{\langle x, y \rangle, x, y \in V} (\sigma(x) - \sigma(y))^2, \quad (1)$$

где $J \in R$.

Пусть $x^0 \in V$ - фиксированная точка. Будем писать $x < y$, если путь от x^0 до y проходит через x .

Обозначим:

$$W_n = \{x \in V : d(x^0, x) = n\}, V_n = \{x \in V : d(x^0, x) \leq n\}.$$

Точка y называется "прямым потомком" точки x , если $x < y$ и $d(x, y) = 1$.

Обозначим через $S(x)$ - множество "прямых потомков" точки $x \in V$.

Пусть $O = \{\text{жезл}\}$, $G \in O$. Конфигурация σ называется G -допустимой конфигурацией на дереве Кэли (в V_n или W_n), если $\{\sigma(x), \sigma(y)\}$ - ребро G для любой ближайшей пары соседей x, y из V (из V_n). Обозначим множество G -допустимых конфигураций через $\Omega^G(\Omega_{V_n}^G)$.

Пусть $h: x \mapsto h_x = (h_{-1,x}, h_{0,x}, h_{1,x}) \in R^3$ - вещественная векторнозначная функция относительно переменной $x \in V$, $\{x^0\}$. Рассмотрим вероятностное распределение $\mu^{(n)}$ на $\Omega_{V_n}^G$:

$$\mu^{(n)}(\sigma_n) = Z_n^{-1} \exp\{-\beta H(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} \hat{h}_{\sigma(x), x}\}, \quad (2)$$

где $\sigma_n \in \Omega_{V_n}^G, Z_n = \sum_{\bar{\sigma}_n \in \Omega_{V_n}^G} \exp\{-\beta H(\bar{\sigma}_n) + \sum_{x \in W_n} h_{\bar{\sigma}(x), x}\}$ и $h_{\bar{\sigma}, x} \in R$.

Говорят, что вероятностное распределение $\mu^{(n)}$, $(\forall n \geq 1)$ согласованно, если

$$\sum_{\sigma^{(n)}} \mu^{(n)}(\sigma_{n-1}, \sigma^{(n)}) = \mu^{(n-1)}(\sigma_{n-1}) \quad (3)$$

для всех $n \geq 1$ и $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}^G$.

В этом случае существует единственная мера μ на Ω_V^G , такая, что

$$\mu(\{\sigma|_{V_n} = \sigma_n\}) = \mu^{(n)}(\sigma_n),$$

для всех $n \geq 1$ и $\sigma_n \in \Omega_{V_n}^G$.

Следующее утверждение описывает условие на $\hat{h}_x$, обеспечивающее согласованность $\mu^{(n)}(\sigma_n)$ для модели Блюма-Капеля.

Теорема 1. [7] Пусть $k \geq 2$. Последовательность вероятностных распределений $\mu^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots$ в (2) является согласованной тогда и только тогда, когда для любого $x \in V$ имеет место следующее функциональное

уравнение:

$$h_x = \sum_{y \in S(x)} F(h_y, \theta), \quad (4)$$

где $\theta = \exp\{-J\beta\}$, $\beta = 1/T$, вектор $h_x = (\hat{h}_{1,x} - \hat{h}_{0,x}, \hat{h}_{-1,x} - \hat{h}_{0,x})$ и функция $F(;\theta): R^2 \rightarrow R^2$, где $F(h, \theta) = (F_1(h, \theta), F_{-1}(h, \theta))$ определяется как:

$$F_i(h, \theta) = \ln \frac{\theta^{(-1-i)^2} e^{h_{-1}} + \theta + \theta^{(-1+i)^2} e^{h_1}}{\theta e^{h_{-1}} + 1 + \theta e^{h_1}},$$

$$h = (h_1, h_{-1}).$$

Трансляционно-инвариантные меры Гиббса

В случае "цикл" из функционального уравнения (4) получаем (см. [7]):

$$\begin{cases} z_{1,x} = \prod_{y \in S(x)} \frac{1 + \theta^3 z_{-1,y}}{z_{-1,y} + z_{1,y}}, \\ z_{-1,x} = \prod_{y \in S(x)} \frac{1 + \theta^3 z_{1,y}}{z_{-1,y} + z_{1,y}}, \end{cases} \quad (5)$$

где $z_{i,x} = \exp(\hat{h}_{i,x} - \hat{h}_{0,x})$, $i = 1, -1$.

Трансляционно-инвариантные меры Гиббса соответствуют решениям (4) с $z_{i,x} = z_i$ при всех $x \in V$ и $i = 1, -1$. Для удобства, обозначим $z_1 = z_1, z_{-1} = z_2$. Тогда система уравнений (5) в случае "цикл" будет иметь вид:

$$\begin{cases} z_1 = \left(\frac{1 + \theta^3 z_2}{z_1 + z_2} \right)^k, \\ z_2 = \left(\frac{1 + \theta^3 z_1}{z_1 + z_2} \right)^k. \end{cases} \quad (6)$$

Пусть $z_1 = z_2 = z$. Тогда из (6) получим

$$z = \left(\frac{1 + \theta^3 z}{2z} \right)^k. \quad (7)$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. Пусть $k \geq 2$. Тогда для любого $\theta > 0$ уравнение (7) имеет единственное решение.

Доказательство. Запишем уравнение (7) в виде

$$z = f(z), \quad (8)$$

где

$$f(z) = \left(\frac{1 + \theta^3 z}{2z} \right)^k.$$

Заметим, что производная функции $f(z)$

$$f'(z) = -\frac{k}{2z^2} \left(\frac{1 + \theta^3 z}{2z} \right)^{k-1} < 0,$$

т.е. функция $f(z)$ является убывающей при $z > 0$. Значит, уравнение (7) имеет единственное решение $z^* = z^*(k, \theta)$ для любых $\theta > 0$. Лемма доказана.

Далее, вычитая из первого уравнения системы (6) второе, получаем

$$(z_1 - z_2) \left[1 + \theta^3 \frac{(1 + \theta^3 z_2)^{k-1} + \dots + (1 + \theta^3 z_1)^{k-1}}{(z_1 + z_2)^k} \right] = 0. \quad (9)$$

Следовательно, $z_1 = z_2$ и

$$1 + \theta^3 \frac{(1 + \theta^3 z_2)^{k-1} + \dots + (1 + \theta^3 z_1)^{k-1}}{(z_1 + z_2)^k} \neq 0.$$

Тогда верна следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $k \geq 2$. Тогда для модели НС-Блума-Капеля в случае "цикл" при $\theta > 0$ существует только одна трансляционно-инвариантная мера Гиббса μ_0 .

Периодические меры Гиббса

Известно, что дерево Кэли представляется как группа G_k , являющаяся свободным произведением $k+1$ циклических групп второго порядка с образующими $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ [4].

Пусть $\hat{G}_k$ - подгруппа группы G_k .

Определение 1. Совокупность векторов $h = \{h_x, x \in G_k\}$ называется $\hat{G}_k$ - периодической, если $h_{yx} = h_x$, для $\forall x \in G_k, y \in \hat{G}_k$.

G_k - периодические совокупности называются трансляционно-инвариантными.

Определение 2. Мера μ называется $\hat{G}_k$ - периодической, если она соответствует $\hat{G}_k$ - периодической совокупности векторов h .

Для функции $F(h, \theta)$ справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. Пусть $\theta \neq 1$. Равенство $F(h, \theta) = F(u, \theta)$ выполняется тогда и только тогда, когда $h = u$.

Доказательство. То, что из $h = u$ следует $F(h, \theta) = F(u, \theta)$ очевидно. Докажем обратное, т.е. покажем, что равенство $F(h, \theta) = F(u, \theta)$ влечет за собой $h = u$. Значения F_i при h и u имеют вид

$$F_i(h) = \ln \frac{\theta^{(-1-i)^2} e^{h_{-1}} + \theta + \theta^{(-1+i)^2} e^{h_1}}{\theta e^{h_{-1}} + 1 + \theta e^{h_1}},$$

$$F_i(u) = \ln \frac{\theta^{(-1-i)^2} e^{u_{-1}} + \theta + \theta^{(-1+i)^2} e^{u_1}}{\theta e^{u_{-1}} + 1 + \theta e^{u_1}}.$$

Введем обозначения $e^{h_i} = z_i, e^{u_i} = t_i, e^{F_i(h)} = K_i(h), i = 1, -1$.

Тогда

$$K_i(h) = \frac{\theta^{(-1-i)^2} z_{-1} + \theta + \theta^{(-1+i)^2} z_1}{\theta z_{-1} + 1 + \theta z_1},$$

$$K_i(u) = \frac{\theta^{(-1-i)^2} t_{-1} + \theta + \theta^{(-1+i)^2} t_1}{\theta t_{-1} + 1 + \theta t_1}.$$

Надо показать, что из $K_i(h) - K_i(u) = 0$ следует, что $h - u = 0$. Действительно, рассмотрим разность

$$K_i(h) - K_i(u) = \frac{\theta^{(-1-i)^2} z_{-1} + \theta + \theta^{(-1+i)^2} z_1}{\theta z_{-1} + 1 + \theta z_1} - \frac{\theta^{(-1-i)^2} t_{-1} + \theta + \theta^{(-1+i)^2} t_1}{\theta t_{-1} + 1 + \theta t_1} =$$

$$= \frac{1}{(\theta z_{-1} + 1 + \theta z_1)(\theta t_{-1} + 1 + \theta t_1)} \cdot ((\theta^{(-1-i)^2} z_{-1} + \theta + \theta^{(-1+i)^2} z_1) \cdot$$

$$(\theta t_{-1} + 1 + \theta t_1) - (\theta^{(-1-i)^2} t_{-1} + \theta + \theta^{(-1+i)^2} t_1) \cdot (\theta z_{-1} + 1 + \theta z_1)) = 0$$

Раскроем скобки в числителе последней дроби

$$B = (\theta^{(-1-i)^2} z_{-1} + \theta + \theta^{(-1+i)^2} z_1) \cdot (\theta t_{-1} + 1 + \theta t_1) -$$

$$- (\theta^{(-1-i)^2} t_{-1} + \theta + \theta^{(-1+i)^2} t_1) \cdot (\theta z_{-1} + 1 + \theta z_1) =$$

$$= (\theta^{(-1-i)^2} - \theta^2)(z_{-1} - t_{-1}) - \theta(\theta^{(-1-i)^2} - \theta^{(-1+i)^2})(z_1 t_{-1} - z_{-1} t_1) + (\theta^{(-1+i)^2} - \theta^2)(z_1 - t_1).$$

Перепишем разность

$$z_1 t_{-1} - z_{-1} t_1 = z_1 t_{-1} - t_1 t_{-1} + t_1 t_{-1} - z_{-1} t_1 = t_{-1}(z_1 - t_1) - t_1(z_{-1} - t_{-1}).$$

Откуда

$$B = (\theta^{(-1-i)^2} - \theta^2 + \theta(\theta^{(-1-i)^2} - \theta^{(-1+i)^2})t_1)(z_{-1} - t_{-1}) +$$

$$+ (\theta^{(-1+i)^2} - \theta^2 - \theta(\theta^{(-1-i)^2} - \theta^{(-1+i)^2})t_{-1})(z_1 - t_1).$$

Итак, разность $K_i(h) - K_i(u)$ имеет вид

$$K_i(h) - K_i(u) = M \cdot ((\theta^{(-1-i)^2} - \theta^2 + \theta(\theta^{(-1-i)^2} - \theta^{(-1+i)^2})t_1)(z_{-1} - t_{-1}) +$$

$$+(\theta^{(-1+i)^2} - \theta^2 - \theta(\theta^{(-1-i)^2} - \theta^{(-1+i)^2})t_{-1})(z_1 - t_1)) = 0,$$

где

$$M = \frac{1}{(\theta z_{-1} + 1 + \theta z_1)(\theta t_{-1} + 1 + \theta t_1)}.$$

Отсюда, введя обозначения $b_i = z_i - t_i, (i = 1, -1)$, получим систему уравнений относительно переменных $b_i, (i = 1, -1)$:

$$\begin{cases} K_1(h) - K_1(u) = (\theta^2 - 1)[(\theta^2 + \theta(\theta^2 + 1)t_1)b_{-1} - (1 + \theta(\theta^2 + 1)t_{-1})b_1] = 0, \\ K_{-1}(h) - K_{-1}(u) = (\theta^2 - 1)[-(1 + \theta(\theta^2 + 1)t_1)b_{-1} + (\theta^2 + \theta(\theta^2 + 1)t_{-1})b_1] = 0, \end{cases}$$

т.е.(при $\theta \neq 1$)

$$\begin{cases} (\theta^2 + \theta(\theta^2 + 1)t_1)b_{-1} - (1 + \theta(\theta^2 + 1)t_{-1})b_1 = 0, \\ -(1 + \theta(\theta^2 + 1)t_1)b_{-1} + (\theta^2 + \theta(\theta^2 + 1)t_{-1})b_1 = 0, \end{cases}$$

которая, как известно, имеет нулевое решение, если определитель

$$\det A = \begin{vmatrix} \theta^2 + \theta(\theta^2 + 1)t_1 & -(1 + \theta(\theta^2 + 1)t_{-1}) \\ -(1 + \theta(\theta^2 + 1)t_1) & \theta^2 + \theta(\theta^2 + 1)t_{-1} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля, где A - матрица данной системы. Данный определитель равен:

$$\det A = (\theta^4 - 1)(1 + \theta(t_1 + t_{-1})).$$

Ясно, что $\det A \neq 0$, так как $\theta > 0, \theta \neq 1, t_i > 0, (i = 1, -1)$. Это значит, что $b_i = z_i - t_i = 0$, т.е. $h = u$. Утверждение доказано.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Пусть H - нормальный делитель конечного индекса в G_k . Тогда для модели Блюма-Капеля все H - периодические меры Гиббса являются либо $G_k^{(2)}$ - периодическими, либо трансляционно-инвариантными, где $G_k^{(2)} = \{x \in G_k : |x| - \text{четное число}\}$.

Доказательство. Используя утверждение 1, доказывается аналогично доказательству теоремы 2 из [8].

В силу теоремы 3 для рассматриваемой модели имеются только $G_k^{(2)}$ - периодические меры Гиббса, которые соответствуют совокупности векторов $h = \{h_x \in R^2 : x \in G_k\}$ вида

$$h_x = \begin{cases} h^1, & \text{если } x \in G_k^{(2)}, \\ h^2, & \text{если } x \in G_k \setminus G_k^{(2)}. \end{cases}$$

Здесь $h^1 = (h_1^1, h_2^1), h^2 = (h_1^2, h_2^2)$. Тогда в силу (4) имеем:

$$\begin{cases} h^1 = kF(h^2, \theta), \\ h^2 = kF(h^1, \theta), \end{cases}$$

т.е.

$$\begin{cases} h_1^1 = k \ln \frac{\theta^4 \exp(h_2^2) + \theta + \exp(h_1^2)}{\theta \exp(h_2^2) + 1 + \theta \exp(h_1^2)}, h_1^2 = k \ln \frac{\theta^4 \exp(h_2^1) + \theta + \exp(h_1^1)}{\theta \exp(h_2^1) + 1 + \theta \exp(h_1^1)}, \\ h_2^1 = k \ln \frac{\exp(h_2^2) + \theta + \theta^4 \exp(h_1^2)}{\theta \exp(h_2^2) + 1 + \theta \exp(h_1^2)}, h_2^2 = k \ln \frac{\exp(h_2^1) + \theta + \theta^4 \exp(h_1^1)}{\theta \exp(h_2^1) + 1 + \theta \exp(h_1^1)}, \end{cases}$$

Введем обозначения $\exp(h_1^1) = z_1$, $\exp(h_2^1) = z_2$, $\exp(h_1^2) = z_3$, $\exp(h_2^2) = z_4$. тогда последнюю систему уравнений можно переписать в виде

$$\begin{cases} z_1 = \left(\frac{\theta^4 z_4 + \theta + z_3}{\theta z_4 + 1 + \theta z_3} \right)^k, z_2 = \left(\frac{z_4 + \theta + \theta^4 z_3}{\theta z_4 + 1 + \theta z_3} \right)^k, \\ z_3 = \left(\frac{\theta^4 z_2 + \theta + z_1}{\theta z_2 + 1 + \theta z_1} \right)^k, z_4 = \left(\frac{z_2 + \theta + \theta^4 z_1}{\theta z_2 + 1 + \theta z_1} \right)^k. \end{cases} \quad (10)$$

В случае "цикл" система уравнений (10) примет вид (см.[7]):

$$\begin{cases} z_1 = \left(\frac{1 + \theta^3 z_4}{z_3 + z_4} \right)^k, z_2 = \left(\frac{1 + \theta^3 z_3}{z_3 + z_4} \right)^k, \\ z_3 = \left(\frac{1 + \theta^3 z_2}{z_1 + z_2} \right)^k, z_4 = \left(\frac{1 + \theta^3 z_1}{z_1 + z_2} \right)^k. \end{cases} \quad (11)$$

Лемма 2. При любом k верны следующие утверждения:

1. $z_1 = z_2$ тогда и только тогда, когда $z_3 = z_4$,
2. $z_1 = z_4$ тогда и только тогда, когда $z_2 = z_3$.

Доказательство. 1. Пусть $z_1 = z_2$. Тогда из третьего и четвертого уравнений системы (11) получим, что $z_3 = z_4$, а при $z_3 = z_4$ из первого и второго уравнений указанной системы, аналогично, получим, что $z_1 = z_2$.

2. При $z_1 = z_4$ первое и третье уравнения (11) можно переписать

$$\begin{cases} z_1 = \left(\frac{1 + \theta^3 z_1}{z_1 + z_3} \right)^k, \\ z_1 = \left(\frac{1 + \theta^3 z_1}{z_1 + z_2} \right)^k. \end{cases}$$

Откуда получим $z_2 = z_3$. А при $z_2 = z_3$ из второго и третьего уравнений системы

(11) имеем

$$\begin{cases} z_2 = \left(\frac{1 + \theta^3 z_2}{z_2 + z_4} \right)^k, \\ z_2 = \left(\frac{1 + \theta^3 z_2}{z_1 + z_2} \right)^k. \end{cases}$$

Тогда $z_1 = z_4$. Лемма доказана.

Рассмотрим отображение $W: R^4 \rightarrow R^4$, определенное следующим образом:

$$\begin{cases} z_1' = \left(\frac{1 + \theta^3 z_4}{z_3 + z_4} \right)^k, z_2' = \left(\frac{1 + \theta^3 z_3}{z_3 + z_4} \right)^k, \\ z_3' = \left(\frac{1 + \theta^3 z_2}{z_1 + z_2} \right)^k, z_4' = \left(\frac{1 + \theta^3 z_1}{z_1 + z_2} \right)^k. \end{cases} \quad (12)$$

Заметим, что (11) есть уравнение $z = W(z)$. Чтобы решить систему уравнений (11), надо найти неподвижные точки отображения $z' = W(z)$.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 3. *Отображение W имеет инвариантные множества следующих видов:*

$$\begin{aligned} I_1 &= \{z \in R^4 : z_1 = z_2 = z_3 = z_4\}, I_2 = \{z \in R^4 : z_1 = z_2, z_3 = z_4\}, \\ I_3 &= \{z \in R^4 : z_1 = z_4, z_2 = z_3\}, I_4 = \{z \in R^4 : z_1 = z_3, z_2 = z_4\}. \end{aligned}$$

Доказательство. Покажем инвариантность I_1 . Для любого $z^* = (z_1^*, z_2^*, z_3^*, z_4^*) \in I_1$ из (12) имеем

$$\begin{cases} z_1' = \left(\frac{1 + \theta^3 z_4^*}{z_3^* + z_4^*} \right)^k = \left(\frac{1 + \theta^3 z_1^*}{2z_1^*} \right)^k, z_2' = \left(\frac{1 + \theta^3 z_3^*}{z_3^* + z_4^*} \right)^k = \left(\frac{1 + \theta^3 z_1^*}{2z_1^*} \right)^k, \\ z_3' = \left(\frac{1 + \theta^3 z_2^*}{z_1^* + z_2^*} \right)^k = \left(\frac{1 + \theta^3 z_1^*}{2z_1^*} \right)^k, z_4' = \left(\frac{1 + \theta^3 z_1^*}{z_1^* + z_2^*} \right)^k = \left(\frac{1 + \theta^3 z_1^*}{2z_1^*} \right)^k, \end{cases}$$

т.е. $z_1' = z_2' = z_3' = z_4'$, а значит $z' = W(z^*) \in I_1$.

Инвариантность I_2 . Ясно, для любого $z^* = (z_1^*, z_2^*, z_3^*, z_4^*) \in I_2$ имеет место $z_1^* = z_2^*, z_3^* = z_4^*$. Отсюда, из (12) имеем

$$\begin{cases} z_1' = \left(\frac{1 + \theta^3 z_4^*}{z_3^* + z_4^*} \right)^k = \left(\frac{1 + \theta^3 z_3^*}{2z_3^*} \right)^k, & z_2' = \left(\frac{1 + \theta^3 z_3^*}{z_3^* + z_4^*} \right)^k = \left(\frac{1 + \theta^3 z_3^*}{2z_3^*} \right)^k, \\ z_3' = \left(\frac{1 + \theta^3 z_2^*}{z_1^* + z_2^*} \right)^k = \left(\frac{1 + \theta^3 z_1^*}{2z_1^*} \right)^k, & z_4' = \left(\frac{1 + \theta^3 z_1^*}{z_1^* + z_2^*} \right)^k = \left(\frac{1 + \theta^3 z_1^*}{2z_1^*} \right)^k, \end{cases}$$

т.е. $z_1' = z_2', z_3' = z_4'$, а значит $z' = W(z^*) \in I_2$.

Инвариантность I_3 . Для любого $z^* = (z_1^*, z_2^*, z_3^*, z_4^*) \in I_3$ из (12) имеем

$$\begin{cases} z_1' = \left(\frac{1 + \theta^3 z_4^*}{z_3^* + z_4^*} \right)^k = \left(\frac{1 + \theta^3 z_1^*}{z_1^* + z_2^*} \right)^k, & z_2' = \left(\frac{1 + \theta^3 z_3^*}{z_3^* + z_4^*} \right)^k = \left(\frac{1 + \theta^3 z_2^*}{z_1^* + z_2^*} \right)^k, \\ z_3' = \left(\frac{1 + \theta^3 z_2^*}{z_1^* + z_2^*} \right)^k = \left(\frac{1 + \theta^3 z_2^*}{z_1^* + z_2^*} \right)^k, & z_4' = \left(\frac{1 + \theta^3 z_1^*}{z_1^* + z_2^*} \right)^k = \left(\frac{1 + \theta^3 z_1^*}{z_1^* + z_2^*} \right)^k, \end{cases}$$

т.е. $z_1' = z_4', z_2' = z_3'$, а значит $z' = W(z^*) \in I_3$.

Инвариантность I_4 . Ясно, для любого $z^* = (z_1^*, z_2^*, z_3^*, z_4^*) \in I_4$ имеет место $z_1^* = z_3^*, z_2^* = z_4^*$. Отсюда, из (12) имеем

$$\begin{cases} z_1' = \left(\frac{1 + \theta^3 z_4^*}{z_3^* + z_4^*} \right)^k = \left(\frac{1 + \theta^3 z_2^*}{z_1^* + z_2^*} \right)^k, & z_2' = \left(\frac{1 + \theta^3 z_3^*}{z_3^* + z_4^*} \right)^k = \left(\frac{1 + \theta^3 z_1^*}{z_1^* + z_2^*} \right)^k, \\ z_3' = \left(\frac{1 + \theta^3 z_2^*}{z_1^* + z_2^*} \right)^k = \left(\frac{1 + \theta^3 z_2^*}{z_1^* + z_2^*} \right)^k, & z_4' = \left(\frac{1 + \theta^3 z_1^*}{z_1^* + z_2^*} \right)^k = \left(\frac{1 + \theta^3 z_1^*}{z_1^* + z_2^*} \right)^k, \end{cases}$$

т.е. $z_1' = z_3', z_2' = z_4'$, а значит $z' = W(z^*) \in I_4$. Лемма доказана.

Теорема 4. Для модели НС-Блюма-Капеля в случае "цикл": (а) при $k = 2$ и $\theta > 0$ существует единственное $G_k^{(2)}$ -периодическая мера Гиббса μ_0 , соответствующие совокупности величин из I_1, I_4 , μ_0 - трансляционно-инвариантным; (б) при $k = 2$ и $\theta < 1$ существуют три $G_k^{(2)}$ -периодические меры Гиббса μ_0, μ_1, μ_2 , соответствующие совокупности величин из I_2 , μ_0 - трансляционно-инвариантным и μ_1, μ_2 - не трансляционно-инвариантными; (с) при $k = 2$ и $\theta > 1$ существуют три $G_k^{(2)}$ -периодическими меры Гиббса $\mu_0, \hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2$, соответствующие совокупности величин из I_3 , μ_0 - трансляционно-инвариантным и $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2$ - не трансляционно-инвариантными;

Доказательство. Случай I_1 . Рассмотрим инвариантное множество I_1 при $J \in R(\theta > 0)$ и $k = 2$. Тогда система уравнений (11) имеет вид

$$z_1 = \left(\frac{1 + \theta^3 z_1}{2z_1} \right)^2. \quad (13)$$

Ясно что, уравнение (13) при любых $\theta > 0$ имеет единственное $z_1 = z^* > 0$ решение.

Таким образом, решения систему уравнений (11) на инвариантном множестве I_1 имеет вид (z^*, z^*, z^*, z^*) , т.е. соответствующий $G_k^{(2)}$ - периодическое мера Гиббса μ_0 является трансляционно-инвариантной.

Случай I_2 . Рассмотрим инвариантное множество I_2 при $J \in R$ и $k = 2$. Тогда система уравнений (11) имеет вид

$$\begin{cases} z_1 = \left(\frac{1 + \theta^3 z_3}{2z_3} \right)^2, \\ z_3 = \left(\frac{1 + \theta^3 z_1}{2z_1} \right)^2, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} z_1 = f(z_3), \\ z_3 = f(z_1), \end{cases} \quad (14)$$

где

$$f(z) = \left(\frac{1 + \theta^3 z}{2z} \right)^2.$$

Из (14) получим

$$z_1 = f(f(z_1)). \quad (15)$$

Ясно, что корни уравнения $z_1 = f(z_1)$ также являются корнями уравнения (15).

Поэтому, чтобы найти корни (15), отличных от корней уравнений $z_1 = f(z_1)$, рассмотрим уравнение:

$$\frac{f(f(z_1)) - z_1}{f(z_1) - z_1} = 0.$$

Разделив числитель на знаменатель левой части этого уравнения, получим квадратное уравнение

$$\theta^{12} z_1^2 + (2\theta^9 - 4)z_1 + \theta^6 = 0. \quad (16)$$

Дискриминант этого уравнение является

$$D = 16(1 - \theta^9).$$

Тогда при $\theta < 1$ уравнение (16) имеет две положительные решения:

$$z_1^{(1)} = \frac{2 - \theta^3 - 2\sqrt{1 - \theta^3}}{\theta^{12}}, \quad (16)$$

$$z_1^{(2)} = \frac{2 - \theta^3 + 2\sqrt{1 - \theta^3}}{\theta^{12}}. \quad (17)$$

У нас $z_1 \neq z_3$. Тогда решение системы уравнений (14) являются $(z_1^{(1)}, z_3^{(1)}) = (z_1^{(1)}, z_1^{(2)})$, $(z_1^{(2)}, z_3^{(2)}) = (z_1^{(2)}, z_1^{(1)})$.

Таким образом, решения систему уравнений (11) при $\theta < 1$ и $k = 2$ на инвариантном множестве I_2 имеет вид:

$$(z^*, z^*, z^*, z^*), (z_1^{(1)}, z_1^{(1)}, z_1^{(2)}, z_1^{(2)}), (z_1^{(2)}, z_1^{(2)}, z_1^{(1)}, z_1^{(1)}),$$

т.е. для решение (z^*, z^*, z^*, z^*) , соответствующий $G_k^{(2)}$ - периодическое меры Гиббса μ_0 , является трансляционно-инвариантным и для решения

$$(z_1^{(1)}, z_1^{(1)}, z_1^{(2)}, z_1^{(2)}), (z_1^{(2)}, z_1^{(2)}, z_1^{(1)}, z_1^{(1)}),$$

соответствующий $G_k^{(2)}$ - периодические меры Гиббса μ_1, μ_2 , являются не трансляционно-инвариантными.

Случай I_3 . Рассмотрим инвариантное множество I_3 при $J \in R$ и $k = 2$. Тогда система уравнений (11) имеет вид

$$\begin{cases} z_1 = \left(\frac{1 + \theta^3 z_1}{z_1 + z_2} \right)^2, \\ z_2 = \left(\frac{1 + \theta^3 z_2}{z_1 + z_2} \right)^2. \end{cases} \quad (19)$$

Вычитая из первого уравнения системы (14) второе, получаем

$$(z_1 - z_2) \left(1 - \frac{\theta^3 (2 + \theta^3 (z_1 + z_2))}{(z_1 + z_2)^2} \right) = 0.$$

В случае $z_1 = z_2$, ясно, что при любых $\theta > 0$ что система уравнений (14) имеет единственное решение (z^*, z^*) .

Пусть $z_1 \neq z_2$. Тогда

$$(z_1 + z_2)^2 = 2\theta^3 + \theta^6 (z_1 + z_2).$$

Отсюда

$$(z_1 + z_2)^2 - \theta^6 (z_1 + z_2) - 2\theta^3 = 0.$$

Решая это уравнение относительно $z_1 + z_2$, находим

$$(z_1 + z_2)_{1,2} = \frac{\theta^6 \mp \sqrt{\theta^{12} + 8\theta^3}}{2} = \varphi_{1,2}(\theta), \quad (20)$$

для всех $\theta > 0$.

Ясно, что

$$\varphi_1(\theta) = \frac{\theta^6 - \sqrt{\theta^{12} + 8\theta^3}}{2} < 0, \quad \varphi_2(\theta) = \frac{\theta^6 + \sqrt{\theta^{12} + 8\theta^3}}{2} > 0.$$

Таким образом, $z_1 + z_2 = \varphi_2(\theta)$. Отсюда с учетом первого из уравнений (19) получаем квадратное уравнение относительно z_1 , т.е.

$$\theta^6 z_1^2 + (2\theta^3 - \varphi_2^2(\theta))z_1 + 1 = 0. \quad (21)$$

Здесь

$$D = \varphi_2^4(\theta) - 4\theta^3\varphi_2^2(\theta) > 0,$$

что равносильно неравенству $\varphi_2^2(\theta) - 4\theta^3 > 0$. Тогда, заменив $\varphi_2(\theta)$ из (20) его выражением, получим $\theta > 1$. Значит, уравнения (21) имеет две положительных решения при $\theta > 1$:

$$z_1^{(1)} = \hat{z}_1^{(1)} = \frac{\varphi_2^2(\theta) - 2\theta^3 - \sqrt{D}}{2\theta^6}, \quad (22)$$

$$z_1^{(2)} = \hat{z}_1^{(2)} = \frac{\varphi_2^2(\theta) - 2\theta^3 + \sqrt{D}}{2\theta^6}. \quad (23)$$

Поскольку $z_1 + z_2 = \varphi_2(\theta)$, то

$$z_2^{(1)} = \hat{z}_1^{(2)}, z_2^{(2)} = \hat{z}_1^{(1)}.$$

Таким образом, решения систему уравнений (11) при $\theta > 1$ и $k = 2$ на инвариантном множестве I_3 имеет вид:

$$(z^*, z^*, z^*, z^*), (\hat{z}_1^{(1)}, \hat{z}_1^{(1)}, \hat{z}_1^{(2)}, \hat{z}_1^{(2)}), (\hat{z}_1^{(2)}, \hat{z}_1^{(2)}, \hat{z}_1^{(1)}, \hat{z}_1^{(1)}),$$

т.е. для решение (z^*, z^*, z^*, z^*) , соответствующий $G_k^{(2)}$ - периодическое меры Гиббса μ_0 , является трансляционно-инвариантным и для решения

$$(\hat{z}_1^{(1)}, \hat{z}_1^{(1)}, \hat{z}_1^{(2)}, \hat{z}_1^{(2)}), (\hat{z}_1^{(2)}, \hat{z}_1^{(2)}, \hat{z}_1^{(1)}, \hat{z}_1^{(1)}),$$

соответствующий $G_k^{(2)}$ - периодические меры Гиббса $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2$, являются не трансляционно-инвариантными.

Случай I_4 . Рассмотрим инвариантное множество I_4 при $\theta > 0$ и $k = 2$. Тогда система уравнений (11) имеет вид

$$\begin{cases} z_1 = \left(\frac{1 + \theta^3 z_2}{z_1 + z_2} \right)^2, \\ z_2 = \left(\frac{1 + \theta^3 z_1}{z_1 + z_2} \right)^2. \end{cases} \quad (24)$$

Вычитая из первого уравнения системы (24) второе, получаем

$$(z_1 - z_2) \left(1 + \frac{\theta^3 (2 + \theta^3 (z_1 + z_2))}{(z_1 + z_2)^2} \right) = 0.$$

Следовательно, $z_1 = z_2$. Тогда система уравнений (24) имеет единственное решение (z^*, z^*) при любых $\theta > 0$.

Таким образом, решения систему уравнений (11) при $\theta > 0$ и $k = 2$ на инвариантном множестве I_4 имеет вид:

$$(z^*, z^*, z^*, z^*),$$

т.е. соответствующие $G_k^{(2)}$ - периодическое мера Гиббса μ_0 , является трансляционно-инвариантной. Теорема доказана.

Литература

- [1] Х.-О. Георги. *Гиббсовские меры и фазовые переходы*. - М.: Мир, 1992.
- [2] С. J. Preston. *Gibbs States on Countable Sets*. - Cambridge Tracts Math., 68, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1974.
- [3] Я. Г. Синай. *Теория фазовых переходов. Строгие результаты*. - М.: Наука, 1980.
- [4] U.A. Rozikov. *Gibbs measures on Cayley trees*. World Scientific.-2013.
- [5] А.Е. Mazel, Yu.M. Suhov. *Random surfaces with two-sided constraints: an application of the theory of dominant ground states*. Jour. Stat. Phys. 64:(1-2) (1991), 111-134.
- [6] Yu.M. Suhov, U.A. Rozikov. *A hard-core model on a Cayley tree: an example of a loss network*. Queueing Syst., 46:1-2 (2004), 197-212.
- [7] Н.М.Хатамов. *Крайность трансляционно-инвариантных мер Гиббса для модели Блюма-Капеля в случае "железа" на дереве Кэли*. Укр. матем. журн., 72:4 (2020), 540-556.
- [8] J.B. Martin, U.A. Rozikov, Yu.M. Suhov. *A three state hard-core model on a Cayley tree*. J. Nonlinear Math. Phys., 12:3 (2005), 432-448.