

Xakimov Rustamjon Maxmudovich

Matematika instituti, f.-m.f.d., NamDU professori

E-mail: rustam-7102@rambler.ru

Laylo Ergashboeva Xabibullo qizi

NamDU 2-bosqich magistranti

E-mail: layloergasheva@gmail.com

UDK 517.98

HC MODELI UCHUN UNUMDOR GRAF SIRTMOQ BO`LGANDA ALTERNATIV GIBBS O`LCHOVLARI

Annotatsiya: Mazkur ishda uch holatli unumdor Hard-Core (HC) modellaridan biri o`rganilgan. Ixtiyoriy tartibli Keli daraxtida "Sirtmoq" turidagi unumdor graf uchun alternativ Gibbs o`lchovlarining mavjud bo`lishining zaruriy va yetarli shartlari aniqlangan. Shuningdek, alternativ Gibbs o`lchovlari tranlytsion-invariant bo`ladigan shartlar topilgan.

**Kalit so`zlar:** Keli daraxti, konfiguratsiya, HC modeli, unumdor graf, Gibbs o`lchovi, tranlytsion-invariant Gibbs o`lchovlari, alternativ Gibbs o`lchovi.

Хакимов Рустамжон Махмудович

Институт Математики, д.ф.-м.н., профессор НамГУ

Эргашбаева Лайло Хабибулла кизи

магистрант 2-курса НамГУ

АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ МЕРЫ ГИББСА ДЛЯ HC МОДЕЛИ В СЛУЧАЕ ПЛОДОРОДНОГО ГРАФА ТИПА ПЕТЛЯ

Аннотация. Изучается одна из плодородных Hard-Core (HC) моделей с тремя состояниями. На дереве Кэли произвольного порядка в случае плодородного графа типа "Петля" определены необходимые и достаточные

условия существования альтернативных мер Гиббса. Также найдены условия трансляционно-инвариантности альтернативных мер Гиббса

Ключевые слова: дерево Кэли, конфигурация, HC-модель, плодородный граф, мера Гиббса, трансляционно-инвариантные меры Гиббса, альтернативные меры Гиббса.

Xakimov Rustamjon Maxmudovich

Institute of Mathematics, NamSU assistant professor (DSc),

Laylo Ergashboeva Xabibullo qizi

Second year master student at NamSU

ALTERNATIVE GIBBS MEASURES FOR THE HC MODEL IN THE CASE OF A FERTILE HINGE TYPE GRAPH

Abstract. *One of the fertile Hard-Core (HC) models with three states is studied. On a Cayley tree of arbitrary order, in the case of a fertile "Hinge"-type graph, necessary and sufficient conditions for the existence of alternative Gibbs measures are determined. Conditions for the translational invariance of alternative Gibbs measures are also found.*

Keywords: *Cayley tree, configuration, hard-core model, fertile graph, Gibbs measure, translation-invariant Gibbs measure, alternative Gibbs measures.*

KIRISH

Gibbs o'lvchlari nazariyasi fizikaviy va biologik tizimlarning termodinamik xususiyatlarini o'rganishda muhim rol o'ynaydi. Gibbs o'lvchi statistik mexanikada ko'p sonli zarralardan tashkil topgan tizimlarni tavsiflashning asosiy vositalaridan biridir. Ma'lumki, har bir limit Gibbs o'lvchi fizikaviy tizimning bir fazasiga mos keladi. Shu sababli, Gibbs o'lvchlari nazariyasidagi muhim vazifalardan biri faza o'tishining mavjudligini aniqlash, ya'ni fizikaviy tizim harorat o'zgarishi bilan o'z holatini o'zgartiradigan vaziyatni aniqlashdir. Bu holat Gibbs o'lvchi yagona bo'lmaganda sodir bo'ladi. Bunday holda, tizim

holatining o'zgarishi sodir bo'ladigan harorat kritik harorat deb ataladi ([1-2] larga qarang).

Gibbs o'lchovi tushunchasi va u bilan bog'liq tushunchalar standart yo'l bilan kiritiladi. Uch holatli unumdor HC modellari uchun translyatsion-invariant va davriy Gibbs o'lchovlari bo'yicha olingan natijalar bilan [2]-[3] ishlarda va ularning adabiyotida tanishish mumkin.

BOSHLANG'ICH TUSHUNCHALAR

$\tau^k = (V, L, i)$ $k \geq 1$ tartibli cheksiz Keli daraxti bo'lsin, bu yerda V - τ^k ning uchlari to'plami, L - uning qirralari to'plami va i - insidentlik funksiyasi bo'lib, har bir $l \in L$ qirraga uning chetki uchlari bo'lmish $x, y \in V$ larni mos qo'yadi. Agar $i(l) = \{x, y\}$ bo'lsa, u holda x va y lar x uchning eng yaqin qo'shnilari deb aytiladi va $l = \langle x, y \rangle$ kabi yoziladi. Fiksirlangan $x^0 \in V$ uchun ushbu belgilashlar kiritiladi: $W_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\}$, $V_n = \bigcup_{m=0}^n W_m$, bu yerda $d(x, y)$ - Keli daraxtida x va y orasidagi masofa. $x \in W_n$ uchun ushbu

$$S(x) = \{y_i \in W_{n+1} \mid d(x, y_i) = 1, i = 1, 2, \dots, k\}$$

to'plamni x uchning to'g'ri avlodlari to'plami deyiladi.

HC-model. $\Phi = \{0, 1, 2\}$ - spin qiymatlar va $\sigma \in \Omega = \Phi^V$ konfiguratsiya, ya'ni $\sigma = \{\sigma(x) \in \Phi : x \in V\}$ bo'lsin. Boshqacha aytganda, bu modelda, har bir x uchga $\sigma(x) \in \Phi = \{0, 1, 2\}$ dan bir qiymat mos tushadi. $\sigma(x) \neq 0$ ekanligi x uchning bandligini, $\sigma(x) = 0$ esa uning vakantligini ifodalaydi. $V(V_n)$ da aniqlangan barcha konfiguratsiyalar to'plami $\Omega(\Omega_{V_n})$ orqali belgilanadi.

Φ to'plamni biror G grafning uchlari to'plami sifatida qaraymiz.

1-ta'rif. Agar V (mos ravishda V_n) to'plamdagi ixtiyoriy $\langle x, y \rangle$ yaqin qo'shnilar uchun $\{\sigma(x), \sigma(y)\}$ - G grafning qirrasi bo'lsa, u holda σ konfiguratsiya

Keli daraxtida (V_n) G -joiz konfiguratsiya deyiladi. G -joiz konfiguratsiyalar to'plamini Ω^G ($\Omega_{V_n}^G$) orqali belgilaymiz.

Berilgan G va λ lar uchun G -HC modelning gamiltoniani ushbu

$$H_G^\lambda(\sigma) = \begin{cases} - \sum_{x \in V} \log \lambda_{\sigma(x)}, & \text{agar } \sigma \in \Omega^G, \\ +\infty, & \text{agar } \sigma \notin \Omega^G \end{cases}$$

orqali aniqlanadi.

G graf uchun aktivlik to'plami $\lambda: G \rightarrow R_+$ funksiyadir. λ funksiyaning $i \in \{0,1,2\}$ uchlardagi λ_i qiymatlari uchning "aktivligi" deyiladi (qarang [4]).

Bu maqolada $\lambda_0 = 1, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ bo'lgan holni qaraymiz. Ixtiyoriy joiz

$\sigma_n \in \Omega_{V_n}^G$ konfiguratsiya uchun $\# \sigma_n = \sum_{x \in V_n} \mathbf{1}(\sigma_n(x) \geq 1)$ belgilash kiritamiz, ya'ni $\# \sigma_n$ - V_n dagi band uchlar soni.

$z: x \mapsto z_x = (z_{0,x}, z_{1,x}, z_{2,x}) \in R_+^3$ V to'plamda berilgan vektor-funksiya bo'lsin. $n = 1, 2, \dots$ va $\lambda > 0$ uchun $\Omega_{V_n}^G$ to'plamda ushbu

$$\mu^{(n)}(\sigma_n) = \frac{1}{Z_n} \lambda^{\# \sigma_n} \prod_{x \in V_n} z_{\sigma_n(x), x} \quad (1)$$

ko'rinishda aniqlangan $\mu^{(n)}$ ehtimollik o'lchovini ko'raylik. Bunda Z_n - normallovchi bo'luvchi:

$$Z_n = \sum_{\sigma_n \in \Omega_{V_n}^G} \lambda^{\# \sigma_n} \prod_{x \in V_n} z_{\sigma_n(x), x}.$$

Agar ixtiyoriy $n \geq 1$ va $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}^G$ uchun ushbu

$$\sum_{\omega_n \in \Omega_{W_n}^G} \mu^{(n)}(\sigma_{n-1} \vee \omega_n) \mathbf{1}(\sigma_{n-1} \vee \omega_n \in \Omega_{V_n}^G) = \mu^{(n-1)}(\sigma_{n-1}) \quad (2)$$

tenglik bajarilsa, u holda $\mu^{(n)}$ ehtimollik o'lchovlari ketma-ketligi muvofiqlashgan deyiladi.

Bu holda Kolmogorov teoremasiga ko'ra $(\Omega_V^G, \mathbf{B})$ fazoda barcha n va $\sigma_n \in \Omega_{V_n}^G$ lar uchun yagona μ o'lchov mavjud:

$$\mu(\{\sigma \in \Omega_V^G : \sigma|_{V_n} = \sigma_n\}) = \mu^{(n)}(\sigma_n).$$

$\mathbf{B}$ - bu Ω_V^G to'plamning silindrik qism to'plamlaridan tashkil topgan σ -algebra.

2-ta'rif. (2) muvofiqlik shartini qanoatlantiruvchi (1) formula bilan aniqlangan μ o'lchov $z : x \in V \setminus \{x^0\} \mapsto z_x$ funksiyaga mos $\lambda > 0$ aktivlikka ega HC-Gibbs o'lchovi deyiladi. Bunda $z_x \equiv z$ funksiyaga mos keluvchi HC-Gibbs o'lchovi translyatsion-invariant (TI) deb ataladi.

3-ta'rif. [4] Agar shunday λ aktivlik mavjud bo'lsaki, unga mos keluvchi Gambiltonian kamida ikkita TIGO' (translation-invariant Gibbs o'lchovlari)ga ega bo'lsa, u holda graf unumdor graf deyiladi.

4-ta'rif. [5] Agar $G(H)$ kamida ikkita turli Gibbs o'lchovni o'z ichiga olsa, ya'ni $|G(H)| > 1$ bo'lsa, u holda biz H potensial uchun birinchi tartibli fazaviy o'tish mavjud deymiz.

$L(G)$ - G grafning qirralari to'plami bo'lsin, $A \equiv A^G = (a_{ij})_{i,j=0,1,2}$ orqali G grafning qo'shnilik matritsasini belgilaymiz, ya'ni

$$a_{ij} \equiv a_{ij}^G = \begin{cases} 1, & \text{agar } \{i, j\} \in L(G), \\ 0, & \text{agar } \{i, j\} \notin L(G). \end{cases}$$

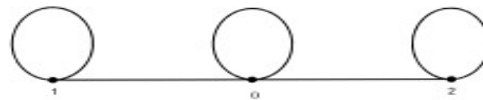
Quyidagi teoremda $\mu^{(n)}$ o'lchovlar ketma-ketligining muvofiqlik shartini ta'minlovchi z_x larga shartlar keltirilgan.

1-teorema. [2] (1) formula bilan berilgan $\mu^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots$, ehtimollik o'lchovlari ketma-ketligi (2) shartni qanoatlantirishi uchun, ya'ni muvofiqlashgan bo'lishi uchun ixtiyoriy $x \in V$ uchun quyidagi tengliklar o'rinli bo'lishi zarur va yetarli:

$$\begin{aligned} z'_{1,x} &= \lambda \prod_{y \in S(x)} \frac{a_{10} + a_{11}z'_{1,y} + a_{12}z'_{2,y}}{a_{00} + a_{01}z'_{1,y} + a_{02}z'_{2,y}}, \\ z'_{2,x} &= \lambda \prod_{y \in S(x)} \frac{a_{20} + a_{21}z'_{1,y} + a_{22}z'_{2,y}}{a_{00} + a_{01}z'_{1,y} + a_{02}z'_{2,y}}, \end{aligned} \quad (3)$$

bunda $z'_{i,x} = \frac{\lambda z_{i,x}}{z_{0,x}}, i = 1, 2$.

$G = \text{sirtmoq}$ bo'lgan unumdor grafni qaraylik (1-chizmaga qarang).



$G = \text{sirtmoq}$
1-chizma. unumdor graf.

G_k - barpo etuvchilari mos ravishda $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}, a_i^2 = e$ bo'lgan $k+1$ ta ikkinchi tartibli $\{e, a_i\}$ siklik gruppalarining erkin ko'paytmasi bo'lsin. k tartibli Keli daraxtining V uchlari to'plami bilan G_k gruppasi orasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjud ([2]).

Faraz qilaylik G_k^* - bu G_k gruppaning $r \geq 1$ chekli indeksli normal bo'luvchisi va $G_k / G_k^* = \{H_1, H_2, \dots, H_r\}$ - faktor gruppasi bo'lsin.

5-ta'rif. Agar ixtiyoriy $x \in G_k, y \in G_k^*$ uchun $z_{yx} = z_x$ tenglik bajarilsa, u holda $z = \{z_x, x \in G_k\}$ miqdorlar G_k^* -davriy deyiladi. G_k -davriy miqdorlar translyatsion-invariant deyiladi.

6-ta'rif. Agar μ o'lchov G_k^* -davriy z miqdorlarga mos kelsa, u G_k^* -davriy deyiladi.

$G = \text{Sirtmoq}$

graf uchun alternativ Gibbs o'lchovlari

Biz yarim daraxtni qaraymiz. x^0 uch k ta eng yaqin qo'shniga ega. (3) funksional tenglamaning yangi yechimlarini quyidagicha quramiz. Quyidagi matritsani qaraylik

$$M = \begin{pmatrix} m & k - m \\ r & k - r \end{pmatrix}$$

bu yerda $0 \leq m \leq k$ va $0 \leq r \leq k$ - nomanfiy butun sonlar.

Bu matritsa har bir $z_x \in \{z, t\}$ uchun z va t qiymatlarning $S(x)$ to'plamda necha marta kelishini bildiradi. Aniqroq aytganda, $z = (z_1, z_2) \in R_+^2$ va $t = (t_1, t_2) \in R_+^2$ quyimatlar bilan $z = \{z_x, x \in G_k\}$ chegaraviy shart quyidagicha aniqlanadi:

- Agar x uchda $z_x = z$ bo'lsa, unda:

$$z_y = \begin{cases} z, & S(x) \text{ ning } m \text{ ta uchida,} \\ t, & \text{qolgan } k - m \text{ uchida;} \end{cases}$$

-Agar x uchda $z_x = t$ bo'lsa, unda z_y funksiyasi har bir $y \in S(x)$ uchlarga quyidagi qoidaga muvofiq haqiqiy qiymatlar beradi :

$$z_y = \begin{cases} t, & S(x) \text{ ning } r \text{ ta uchida,} \\ z, & \text{qolgan } k - r \text{ ta uchida.} \end{cases}$$

U holda, agar $G = \text{Sirtmoq}$ bo'lsa, (3) tenglama sistemasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\begin{cases} z_1 = \lambda \cdot \left(\frac{1 + z_1}{1 + z_1 + z_2} \right)^m \cdot \left(\frac{1 + t_1}{1 + t_1 + t_2} \right)^{k-m}, \\ z_2 = \lambda \cdot \left(\frac{1 + z_2}{1 + z_1 + z_2} \right)^m \cdot \left(\frac{1 + t_2}{1 + t_1 + t_2} \right)^{k-m}, \\ t_1 = \lambda \cdot \left(\frac{1 + t_1}{1 + t_1 + t_2} \right)^r \cdot \left(\frac{1 + z_1}{1 + z_1 + z_2} \right)^{k-r}, \\ t_2 = \lambda \cdot \left(\frac{1 + t_2}{1 + t_1 + t_2} \right)^r \cdot \left(\frac{1 + z_2}{1 + z_1 + z_2} \right)^{k-r}, \end{cases} \quad (4)$$

Bu yerda $z(z_1, z_2) > 0$, $t(t_1, t_2) > 0$, $\lambda > 0$.

(3) funksional tenglamani qanoatlantiruvchi istalgan chegaraviy shart uchun yagona Gibbs o'lchovi mavjud. Shu usulda qurilgan va TI bo'lmagan o'lchov alternativ Gibbs o'lchovi (AGO') deyiladi va $\mu_{m,r}$ kabi belgilanadi.

1-eslatma. Ta'kidlash joizki, (4) sistemada $z = t$ (ya'ni, $(z_1, z_2) = (t_1, t_2)$) yechim yagona TIGO' μ_0 ga mos keladi ([6]). Shuning uchun biz $z \neq t$ ko'rinishdagi yechimlarni o'rganamiz.

2-eslatma. (4) dan $m = r = 0$ bo'lganda HC-modeli uchun $G_k^{(2)}$ -davriy Gibbs o'lchovlariga mos keluvchi tenglamalar sistemasini olamiz. Bu yerda $G_k^{(2)} - G_k$ dagi uzunligi juft bo'lgan so'zlardan iborat qismgruppaga ([7]).

Ravshanki, (4) tenglamalar sistemasining o'ng tomoni orqali aniqlangan $W: R^4 \rightarrow R^4$ operator quyidagi invariant to'plamlarga ega:

$$I_1 = \{(z_1, z_2, t_1, t_2) \in R^4 : z_1 = z_2 = t_1 = t_2\}, \quad I_2 = \{(z_1, z_2, t_1, t_2) \in R^4 : z_1 = t_1, z_2 = t_2\}, \\ I_3 = \{(z_1, z_2, t_1, t_2) \in R^4 : m = r; z_1 = t_2, z_2 = t_1\}, \quad I_4 = \{(z_1, z_2, t_1, t_2) \in R^4 : z_1 = z_2, t_1 = t_2\}.$$

3-eslatma. Umuman olganda, (4)-tenglamalar sistemasini tahlil qilish juda murakkab. Shu sababli biz uni $I_i, i=1,2,3,4$ invariant to'plamlarda ko'rib chiqamiz. Shuni ta'kidlash kerakki, W akslantirish yuqoridagi $I_i, i=1,2,3,4$ lardan boshqa invariant to'plamlarga ham ega bo'lishi mumkin.

4-eslatma. I_1 da (4) tenglamalar sistemasidan $k \geq 2$ va $\lambda > 0$ uchun yagona musbat yechimga ega tenglamani hosil qilamiz. Bu yechim TIGO' μ_0 ga mos keladi. Demak, I_1 to'plamidan olingan qiymatlar TIGO' μ_0 ga mos keluvchi yagona yechimni hosil qiladi.

5-eslatma. I_2 da (4) tenglamalar sistemasidan hosil bo'ladigan tenglamalar sistemasi TIGO' larga mos keluvchi yechimlarni ifodalaydi.

I_3 invariant to'plamda alternativ Gibbs o'lchovlari. I_3 da (4) tenglamalar sistemasi quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{cases} z_1 = \lambda \cdot \left(\frac{1+z_1}{1+z_1+z_2} \right)^m \cdot \left(\frac{1+z_2}{1+z_1+z_2} \right)^{k-m}, \\ z_2 = \lambda \cdot \left(\frac{1+z_2}{1+z_1+z_2} \right)^m \cdot \left(\frac{1+z_1}{1+z_1+z_2} \right)^{k-m}. \end{cases} \quad (5)$$

(5) tenglamalar sistemasi uchun quyidagi teorema o‘rinlidir.

2-teorema. $k \geq 2$ va $\lambda > 0$ bo‘lsin. Agar $k \geq 2m - 1$ bo‘lsa, u holda HC modeli uchun $G = \text{Sirtmoq}$ bo‘lganda I_3 da TI dan boshqa AGO’ mavjud emas.

Isbot. (5) tenglamalar sistemasi $z_1 = z_2$ ko‘rinishdagi $\mathcal{U}_0$ TIGO’ga mos keluvchi yagona yechimga ega ekanligini ko‘rsatamiz. (5) dan

$$z_1(1+z_1)^{k-2m} = z_2(1+z_2)^{k-2m}. \quad (6)$$

(6) dan $f(x) = x(1+x)^{k-2m}$ funksiya $k \geq 2m - 1$ bo‘lsa o‘tuvchi. Bundan $k \geq 2m - 1$ da (5) yagona $z_1 = z_2$ yechimga ega, bu yechim 3-eslatmaga ko‘ra, yagona $\mathcal{U}_0$ TIGO’ ga mos keladi, ya’ni TI dan boshqa AGO’ mavjud emas.

3-teorema. $k \geq 2$ bo‘lsin. U holda HC modeli uchun $G = \text{Sirtmoq}$ bo‘lganda I_3 da $\lambda > 0$ ning biror qiymatlarida TI bo‘lmagan AGO’ mavjud bo‘lishi uchun $2k > 2m \geq k + 2$ shart bajarilishi zarur va yetarlidir.

Isbot. Zarurligi 2-teoremadan kelib chiqadi.

Yetarliligi. $2m - k = n$ ($n \geq 2$) bo‘lsin. U holda (6) tenglamadan quyidagini hosil qilamiz:

$$(z_1 - z_2) \cdot \left[z_1 z_2 [C_n^2 + C_n^3(z_1 + z_2) + \dots + C_n^n(z_1^{n-2} + \dots + z_2^{n-2})] - 1 \right] = 0.$$

Bundan $z_1 = z_2$ yoki $w(z_1, z_2) = 0$, bu yerda

$$w(z_1, z_2) := z_1 z_2 [C_n^2 + C_n^3(z_1 + z_2) + \dots + C_n^n(z_1^{n-2} + \dots + z_2^{n-2})] - 1 = 0.$$

Agar $z_1 = z_2$ bo‘lsa, unda I_1 ga mos yechim hosil bo‘ladi va 4-eslatmaga ko‘ra, bu yechim yagona $\mathcal{U}_0$ TIGO’ ga mos keladi.

Endi $z_1 \neq z_2$ holatini ko'rib chiqamiz. $w(z_1, z_2) = 0$ tenglamasini z_1 o'zgaruvchiga nisbatan tahlil qilamiz. $w(0, z_2) = -1 < 0$ va $z_1 \rightarrow +\infty$ da $w(z_1, z_2) \rightarrow +\infty$ ekanligi ravshan. Demak, $w(z_1, z_2) = 0$ tenglamasining z_1 o'zgaruvchiga nisbatan hech bo'lmaganda bitta musbat ildizi mavjud. Boshqa tomondan, Dekart teoremasiga ko'ra, $w(z_1, z_2) = 0$ tenglama z_1 o'zgaruvchiga nisbatan ko'pi bilan bitta musbat ildizga ega bo'lishi mumkin. Natijada, bu tenglamaning z_1 bo'yicha yagona musbat ildizi mavjud bo'lib, ya'ni (5) tenglamalar sistemasining AGO' ga mos keluvchi (z_1, z_2) yechimi mavjud. Simmetriyaga ko'ra, z_2 uchun ham yuqoridagi mulohazalar o'rinli.

Xususan, $2m - k = 2$ ($n = 2$) bo'lgan holda, agar $z_1 z_2 = 1$ bo'lsa, va $2m - k = 3$ ($n = 3$) bo'lgan holda, agar $z_1^2 z_2 + z_1 z_2^2 + 3z_1 z_2 = 1$ bo'lsa, u holda TI bo'lmagan AGO' mavjud.

6-eslatma. 3-teorema shartlari ostida, $m = k$ bo'lganda TIGO' dan tashqari AGO' mavjud emasligi osonlik bilan ko'rinadi.

$k = 4$ va $m = 3$ holni ko'rib chiqamiz. Bu holatda $2k > 2m \geq k + 2$ tengsizliklar bajariladi va sistema quyidagi shaklga ega bo'ladi:

$$\begin{cases} z_1 = \lambda \left(\frac{1 + z_1}{1 + z_1 + z_2} \right)^3 \cdot \frac{1 + z_2}{1 + z_1 + z_2}, \\ z_2 = \lambda \left(\frac{1 + z_2}{1 + z_1 + z_2} \right)^3 \cdot \frac{1 + z_1}{1 + z_1 + z_2}. \end{cases} \quad (7)$$

1-tasdiq. $\lambda_{cr} = \frac{81}{16}$ bo'lsin. U holda (7) sistema $\lambda \leq \lambda_{cr}$ da yagona (z_0, z_0) yechimga, $\lambda > \lambda_{cr}$ da esa uchta $(z_0, z_0), (z_1, z_2), (z_2, z_1)$ yechimlarga ega.

Isboti. $n = 2$ bo'lganda (7) tenglamalar sistemasi uchun $(z_1 - z_2)(z_1 z_2 - 1) = 0$ o'rinli bo'ladi. Demak, $z_1 = z_2$ yoki $z_1 z_2 = 1$. Ma'lumki, (z_0, z_0) , (bu yerda $z_1 = z_2 \equiv z_0$) yechim yagona TIG'O ga mos keladi.

Endi $z_1 \neq z_2$ uchun $z_1 = \frac{1}{z_2}$ deb olamiz. Unda (7) sistemadan quyidagini hosil qilamiz:

$$\lambda(z_2) = \frac{(1 + z_2 + z_2^2)^4}{z_2^2(1 + z_2)^4} \quad (8)$$

$\lambda(z_2)$ funksiyani tahlil qilamiz. Uning hosilasi

$$\lambda'(z_2) = \frac{2(1 + z_2 + z_2^2)^3(z_2 - 1)(z_2^2 + 3z_2 + 1)}{z_2^3(1 + z_2)^5}.$$

Demak, $\lambda(z_2)$ funksiya minimum qiymatga $z_2 = 1$ da erishadi va $\lambda_{\min}(z_2) = \lambda(1) = \lambda_{cr} = 81/16$. Bundan, $\lambda > \lambda_{cr}$ da λ ning har bir qiymatiga z_2 ning ikkita, $\lambda = \lambda_{cr}$ da bitta qiymati mos keladi, $0 < \lambda < \lambda_{cr}$ da esa (8) tenglama yechimga ega emas. Simmetriyaga ko'ra xulosa qilish mumkinki, $0 < \lambda \leq \lambda_{cr}$ dada sistema yagona $(z_0; z_0)$ yechimga ega, $\lambda > \lambda_{cr}$ bo'lganda esa uchta

yechimga ega bo'ladi: (z_0, z_0) , $(z_1, \frac{1}{z_1})$ va $(z_2, \frac{1}{z_2})$, bu yerda $z_1 \neq z_2$.

3-teorema va 1-tasdiq asosida quyidagi teorema hosil bo'ladi:

4-teorema. $k = 4$, $m = 3$ va $\lambda_{cr} = \frac{81}{16}$ bo'lsin. U holda HC modeli uchun $G = \text{Sirtmoq}$ bo'lganda I_3 to'plamda $0 < \lambda \leq \lambda_{cr}$ da yagona AGO' mavjud bo'lib, u yagona μ_0 TIGO' ga mos keladi, $\lambda > \lambda_{cr}$ da esa uchta μ_0 , μ_1 , μ_2 AGO' lari mavjud, bu yerda μ_1 , μ_2 AGO' lari (TI bo'lmagan).

I_4 invariant to'plamida alternativ Gibbs o'lchovlari. Faraz qilaylik, $z_1 = z_2 = z, t_1 = t_2 = t$. Unda I_4 dagi (4) sistema quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\begin{cases} z = \lambda \left(\frac{1+z}{1+2z} \right)^m \cdot \left(\frac{1+t}{1+2t} \right)^{k-m}, \\ t = \lambda \left(\frac{1+t}{1+2t} \right)^r \cdot \left(\frac{1+z}{1+2z} \right)^{k-r}. \end{cases} \quad (9)$$

5-teorema. $k \geq 2$ va $m+r \geq k-1$ bo'lsin. U holda $G = \text{Sirtmoq}$ bo'lganda I_4 to'plamda HC modeli uchun TI dan boshqa AGO' mavjud emas.

Isboti. 2-teorema kabi isbotlanadi.

6-teorema. $k \geq 2$ bo'lsin. U holda HC modeli uchun $G = \text{Sirtmoq}$ bo'lganda I_4 da $\lambda > 0$ ning biror qiymatlarida TI bo'lmagan AGO' mavjud bo'lishi uchun $m+r \leq k-2$ shart bajarilishi zarur va yetarlidir.

Isboti. 3-teoremaning isbotiga o'xshash isbotlanadi.

7-teorema. $k=3, m=1, r=0$ (mos ravishda $m=0, r=1$) bo'lsin. U holda HC modeli uchun $G = \text{Sirtmoq}$ va $\lambda > 0$ bo'lsa, u holda I_4 invariant to'plamda AGO' lari TI bo'ladi.

Isboti. Bu holatda (9) tenglamalar sistemasidan quyidagini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} z = \lambda \frac{1+z}{1+2z} \left(\frac{1+t}{1+2t} \right)^2, \\ t = \lambda \left(\frac{1+z}{1+2z} \right)^3. \end{cases} \quad (10)$$

(10) sistemadan:

$$(z-t)(1+2z+2t+5zt+4tz^2+4zt^2+z^2+t^2+4t^2z^2)=0$$

tenglamaga ega bo'lamiz. Bu tenglama faqat $z=t$ bo'lganda yagona yechimga ega ekanligini ko'rish oson va bu yechim yagona μ_0 TIGO' ga mos keladi.

Xulosa. Ushbu maqolada Hard-Core modeli uchun unumdor graf Sirtmoq bo'lganda yangi konstruktiv o'lchovlar qurildi hamda faza almashishini ta'minlovchi yangi shartlar topildi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Георги Х.-О. Гиббсовские меры и фазовые переходы. М.:Мир, 1992.
2. Rozikov U. Gibbs measures on Cayley trees. Singapore: World Sci., 2013.
3. Khakimov R.M., Umirzakova K.O. Periodic Gibbs measures for three-state hard-core models in the case Wand. J. Math. Phys. Anal Geometry. 2024; 20(1) p.66–81.
4. Brightwell G., Winkler P. Graph homomorphisms and phase transitions. J. Combin. Theor, Series B. – 1999. – V. 77. – P. 221- 262.
5. Friedli S., Velenik Y. Statistical mechanics of lattice systems. Cambridge: Cambridge University Press; 2017.
6. Rozikov U.A., Shoyusupov S.A. Fertile HC models with three states on a Cayley tree. Theor Math Phys. 2008;156 (3), p.1319–1330.
7. Khakimov R.M., Umirzakova K.O. The uniqueness conditions for periodic Gibbs measures for one HC-models with three states. Bull. Inst. Math. 2020(4), p.113–119.