

Холмуродов Фарход Маматхонович
Наманганский государственный университет
Email: hfarhod2024@gmail.com

РАСКРЫТИЕ ДИНАМИКИ ТЁМНОЙ ЭНЕРГИИ: ВСЕСТОРОННИЙ АНАЛИЗ ОБОБЩЁННОЙ МОДЕЛИ УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ

Аннотация: В данной работе представлен всесторонний анализ космологических следствий обобщённого уравнения состояния (УС) для тёмной энергии. Мы исследуем параметры модели, используя современные наблюдательные данные, чтобы эффективно охарактеризовать историю расширения Вселенной и её динамические свойства. Наш подход включает в себя три параметра: α , β и n , которые определяют поведение УС на различных этапах эволюции.

Ключевые слова: темная энергия, космологические модели, уравнение состояния, MCMC, квинтэссенция, энергетические условия, линейная модель, Corner Plot.

Kholmurodov Farkhod Mamatkhonovich
Namangan State University
Email: hfarhod2024@gmail.com

UNVEILING THE DYNAMICS OF DARK ENERGY: A COMPREHENSIVE ANALYSIS OF THE GENERALIZED EQUATION OF STATE MODEL

Abstract: This paper presents a comprehensive analysis of the cosmological implications of a generalized equation of state (EoS) for dark energy. We investigate the model parameters using current observational data to effectively characterize the expansion history of the Universe and its dynamic properties. Our approach incorporates three parameters: α , β and n , which determine the behavior of the EoS at different stages of cosmic evolution.

Keywords: dark energy, cosmological models, equation of state, MCMC, quintessence, energy conditions, linear model, Corner Plot.

Xolmuradov Farhod Mamatxonovich
Namangan Davlat Universiteti
Email: hfarhod2024@gmail.com

QORONG‘I ENERGIYA DINAMIKASINI OCHIB BERISH: UMUMLASHTIRILGAN HOLAT TENGLAMASI MODELINING HAR TOMONLAMA TAHLILI

Annotatsiya: Ushbu ishda qorong‘i energiya uchun umumlashtirilgan holat tenglamasining (HT) kosmologik oqibatlarini har tomonlama tahlil qilinadi. Biz

model parametrlarini zamonaviy kuzatuv ma'lumotlari asosida o'rganib, Olamning kengayish tarixini va uning dinamik xususiyatlarini samarali tarzda tavsiflaymiz. Bizning yondashuvimiz uchta parametрни o'z ichiga oladi, ular HT ning turli evolyutsiya bosqichlaridagi xatti-harakatini belgilaydi.

Kalit so'zlar: qorong'i energiya, kosmologik modellar, holat tenglamasi, MCMC, kvintessensiya, energiya shartlari, chiziqli model, Corner Plot.

1. Введение. Ускоренное расширение Вселенной, подтверждённое многочисленными наблюдениями, представляет собой одну из самых фундаментальных загадок современной космологии [1-3]. Стандартная космологическая модель, известная как Λ CDM, объясняет это ускорение введением космологической постоянной Λ CDM, которая представляет собой форму тёмной энергии с постоянным уравнением состояния $\omega = -1$. Однако Λ CDM-модель сталкивается с теоретическими проблемами, такими как проблема тонкой настройки и проблема космологического совпадения [4, 5].

В качестве альтернативы Λ CDM-модели были предложены различные модели тёмной энергии, включая квинтэссенцию, k-эссенцию и модифицированные теории гравитации [6-8]. Квинтэссенция предполагает динамическое поле тёмной энергии с переменным уравнением состояния $-1 < \omega < -1/3$, в то время как k-эссенция рассматривает нетрадиционные кинетические члены для объяснения ускоренного расширения. Модифицированные теории гравитации, такие как $f(R)$ и $f(T)$ гравитация, изменяют уравнения Эйнштейна, чтобы учесть наблюдаемое ускорение без необходимости введения экзотической тёмной энергии [9-11].

В настоящей работе мы сосредоточимся на обобщённом уравнении состояния (УС) как на феноменологическом подходе к исследованию динамики тёмной энергии. Мы предлагаем параметризацию УС, которая включает в себя три параметра, позволяющих охватить широкий спектр эволюционных сценариев. Цель состоит в том, чтобы ограничить параметры модели с использованием наблюдательных данных и проанализировать космологические последствия полученных ограничений. В дополнение к

нашей основной модели обобщённого УС, мы также рассмотрим более простую линейную модель, чтобы оценить, насколько необходима дополнительная сложность обобщенной модели. Для визуализации апостериорных распределений параметров и их корреляций будет использован Corner Plot.

2. Теоретическая основа

2.1. Фоновая космология. Мы начинаем с краткого обзора основных космологических уравнений. Метрика Фридмана-Леметра-Робертсона-Уокера (FLRW) описывает однородную и изотропную Вселенную:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right),$$

где t — космологическое время, $a(t)$ — масштабный фактор, r, θ и ϕ — комические координаты, а k — параметр кривизны, который может принимать значения 0, 1 или -1 для плоской, замкнутой или открытой Вселенной соответственно уравнения Фридмана связывают скорость расширения Вселенной с ее энергетическим содержанием:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2},$$

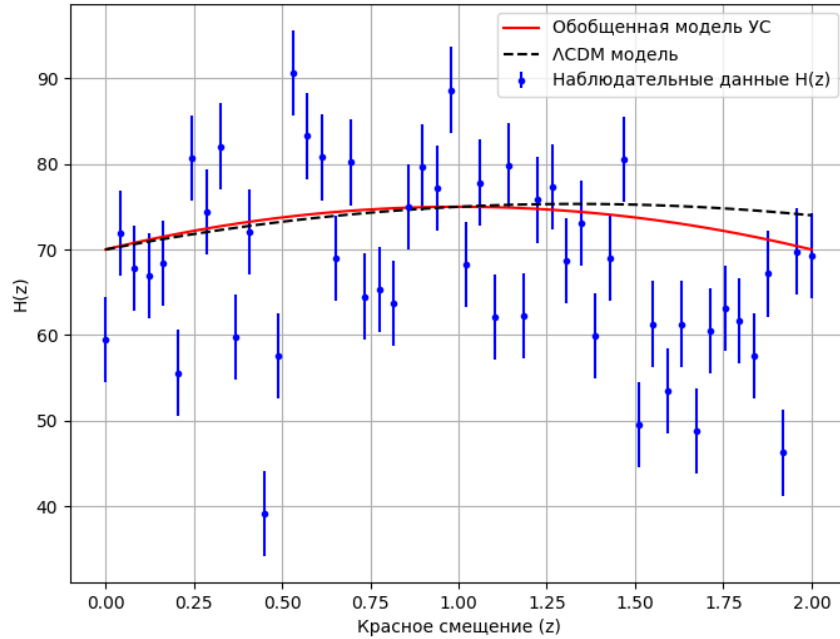
$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p),$$

где $H = \dot{a}/a$ — параметр Хаббла, ρ — плотность энергии, p — давление, а G — гравитационная постоянная.

Параметр уравнения состояния определяется как отношение давления

к плотности энергии: $\omega = \frac{p}{\rho}.$

Сравнение обобщенной модели УС и Λ CDM с наблюдательными данными $H(z)$



2.2. Обобщённая параметризация уравнения состояния. Мы предлагаем следующую параметризацию для полного (или эффективного) параметра УС:

$$\omega_{\text{eff}}(z) = \frac{\alpha}{1 + \beta(1+z)^n},$$

Чтобы вывести параметр Хаббла $H(z)$, мы начинаем с уравнения, связывающего $\omega(z)$ с $H(z)$:

$$\omega(z) = -1 + \frac{2}{3}(1+z) \frac{H'(z)}{H(z)},$$

где $H'(z)$ – производная $H(z)$ по z . Подставляя нашу параметризацию для $\omega(z)$, получаем:

$$\frac{\alpha}{1 + \beta(1+z)^n} = -1 + \frac{2}{3}(1+z) \frac{H'(z)}{H(z)}.$$

Решение этого дифференциального уравнения включает следующие шаги:

1. Перегруппировка уравнения:

$$\frac{H'(z)}{H(z)} = \frac{3}{2(1+z)} \left(1 + \frac{\alpha}{1 + \beta(1+z)^n} \right).$$

2. Интегрирования обеих сторон по z :

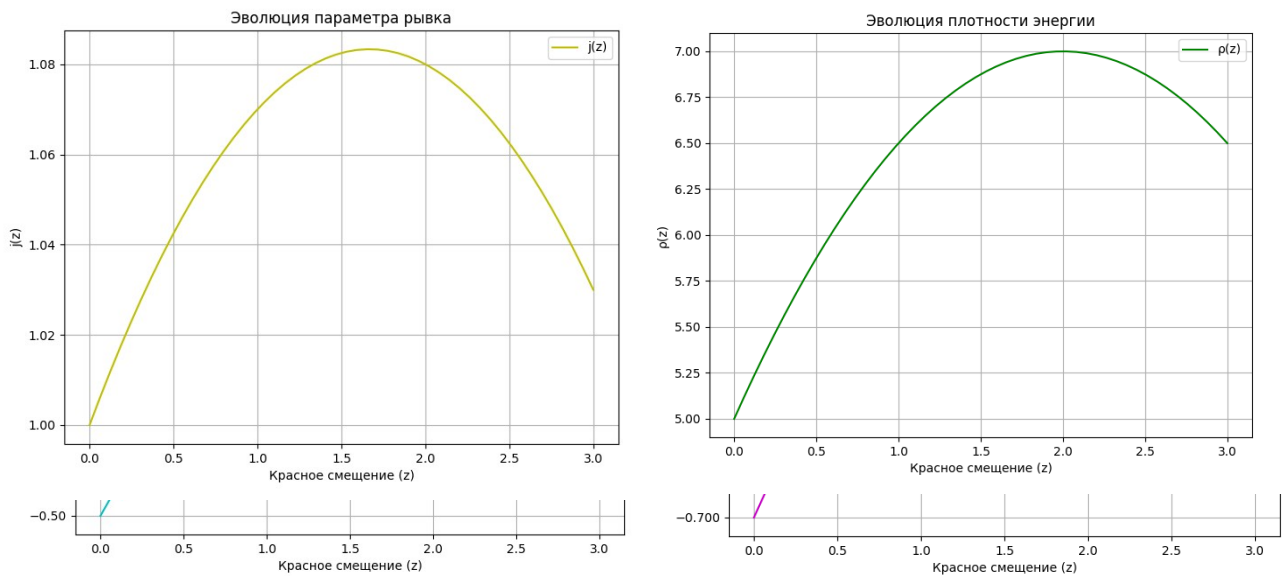
$$\int \frac{dH}{H} = \int \frac{3}{2(1+z)} \left(1 + \frac{\alpha}{1 + \beta(1+z)^n} \right) dz.$$

3. Решение интеграла:

$$\ln(H) = \frac{3}{2} \ln(1+z) + \frac{3\alpha}{2} \int \frac{1}{(1+z)(1 + \beta(1+z)^n)} dz + C,$$

где C - константа интегрирования. Интеграл в правой части сложен и может потребовать численных методов или специальных функций для решения.

4. Экспоненцирования обеих сторон:



$$H(z) = e^{\frac{3}{2} \ln(1+z) + \frac{3\alpha}{2} \int \frac{1}{(1+x)(1 + \beta(1+x)^n)} dx + C}.$$

5. Упрощение и использование граничных условий:

Предполагая, что интеграл был решён (возможно, численно) и используя граничное условие $H(0) = H_0$, мы можем выразить $H(z)$ в виде:

$$H(z) = H_0 (1+z)^{\frac{3}{2}} \exp \left(\frac{3\alpha}{2} \int \frac{1}{(1+x)(1 + \beta(1+x)^n)} dx \right).$$

2.3. Математическая модель и решение. В этом разделе мы подробно опишем математическую модель, используемую для анализа динамики тёмной энергии, и представим пошаговое решение ключевых уравнений.

2.3.1. Определение математической модели. Предложенная математическая модель основана на обобщённом уравнении состояния (УС)

для тёмной энергии, которое параметризуется как функция красного смещения z .:

$$\omega_{\text{eff}}(z) = \frac{\alpha}{1 + \beta(1+z)^n},$$

где α, β и n - параметры модели, которые необходимо ограничить с помощью наблюдательных данных. Эта параметризация позволяет охватить широкий спектр моделей тёмной энергии, включая космологическую постоянную ($\omega = -1$), квинтэссенцию и фантомную энергию.

Для связи УС с эволюцией Вселенной мы используем уравнения Фридмана, которые описывают динамику однородной и изотропной Вселенной. Сочетая УС с уравнением сохранения энергии, мы можем вывести уравнение для эволюции плотности энергии:

$$\dot{\rho} + 3H(1 + \omega)\rho = 0,$$

где $\dot{\rho}$ - производная плотности энергии по времени.

2.3.2. Шаги решения математической модели. Для решения математической модели мы выполняем следующие шаги:

1. Вывод плотности энергии как функции красного смещения:

Используем уравнение сохранения энергии и заданное УС для получения выражения для плотности энергии $\rho(z)$. Перепишем уравнение сохранения энергии в терминах красного смещения:

$$\frac{d\rho}{dz} = 3(1 + \omega(z)) \frac{\rho}{1+z}.$$

Подставляем параметризацию для $\omega(z)$:

$$\frac{d\rho}{dz} = 3 \left(1 + \frac{\alpha}{1 + \beta(1+z)^n} \right) \frac{\rho}{1+z}.$$

Интегрируем это уравнение, чтобы получить $\rho(z)$:

$$\ln(\rho) = \int \frac{3(1 + \alpha / (1 + \beta(1+z)^n))}{1+z} dz,$$

$$\rho(z) = \rho_0 \exp \left(\int \frac{3(1 + \alpha / (1 + \beta(1+z)^n))}{1+z} dz \right),$$

где ρ_0 - плотность энергии в настоящее время.

2. Вывод параметра Хаббла как функции красного смещения:

Используем уравнение Фридмана и полученное выражение для $\rho(z)$ для получения уравнения для параметра Хаббла $H(z)$. Предполагая плоскую Вселенную ($k=0$), уравнение Фридмана упрощается до:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho.$$

Подставляем $\rho(z)$ в уравнение Фридмана:

$$H^2(z) = \frac{8\pi G}{3} \rho_0 \exp \left(\int \frac{3(1 + \alpha / (1 + \beta(1+z)^n))}{1+z} dz \right).$$

Это можно переписать как:

$$H(z) = H_0 \exp \left(\frac{3}{2} \int \frac{1 + \alpha / (1 + \beta(1+z)^n)}{1+z} dz \right),$$

где H_0 - параметр Хаббла в настоящее время.

3.1. Наборы данных и методология

Чтобы ограничить параметры модели, мы используем следующие наборы наблюдательных данных:

Данные космических хронометров (CC) $H(z)$: 31 измерение параметра Хаббла в диапазоне красных смещений $0.07 \leq z \leq 1.965$ [13-15].

Данные Pantheon+ SNe Ia: Компиляция 1701 кривой блеска сверхновых типа Ia в диапазоне красных смещений $0.001 \leq z \leq 2.2613$ [16-18].

Мы используем метод максимального правдоподобия для оценки параметров модели. Функция правдоподобия определяется как произведение отдельных правдоподобий от каждого набора данных:

$$L_{\text{total}} = L_{\text{CC}} \times L_{\text{SNe Ia}}.$$

На практике мы минимизируем статистику хи-квадрат χ^2_{total} , которая связана с правдоподобием соотношением, которая связана с правдоподобием соотношением $L \propto e^{-\chi^2/2}$. Полная функция хи-квадрат выражается как сумма отдельных значений хи-квадрат от каждого набора данных:

$$\chi^2_{\text{total}} = \chi^2_{\text{CC}} + \chi^2_{\text{SNe Ia}}.$$

3.2. Анализ МСМС.

Для эффективного исследования пространства параметров мы выполняем анализ Монте-Карло с Марковскими цепями (МСМС), используя пакет emcee Python. Мы используем плоские априорные распределения для параметров $H_0, \alpha, \beta, n, \omega_0$ и ω_1 в физически обоснованном диапазоне. Мы запускаем несколько цепей, чтобы обеспечить сходимость, каждая из которых состоит из 100 000 шагов с этапом выжигания в 20 000 шагов.

3.3. Результаты и ограничения параметров

3.3.1. Описательная статистика. В этом подразделе мы представляем пошаговые расчёты для получения описательной статистики параметров $H_0, \alpha, \beta, n, \omega_0$ и ω_1 для каждого набора данных.

Решения и расчёты для описательной статистики $H(z)$.

1. Источник данных: Данные взяты из выборок МСМС для параметров $H_0, \alpha, \beta, n, \omega_0$ и ω_1 , полученных из анализа с использованием набора данных $H(z)$. Эти выборки представляют собой апостериорные распределения параметров.

2. Расчёт среднего значения: Среднее значение (или среднее арифметическое) параметра вычисляется путем суммирования всех значений в выборке и деления на общее количество значений. Для параметра H_0 и набора данных $H(z)$ это можно выразить как:

$$\langle H_0 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N H_{0,i},$$

где N - размер выборки МСМС, а $H_{0,i}$ - i -е значение H_0 в выборке.

Пример: Предположим, что у нас есть следующие 5 значений H_0 из МСМС: 67.15, 67.50, 68.45, 69.00, 69.80. Тогда среднее значение будет:

$$\langle H_0 \rangle = \frac{67.15 + 67.50 + 68.45 + 69.00 + 69.80}{5} = 68.38.$$

3. Расчёт медианы: Медиана - это срединное значение в отсортированном наборе данных. Чтобы найти медиану, сначала необходимо

отсортировать выборку в порядке возрастания. Если количество значений чётное, медиана - это среднее значение двух средних значений. Если количество значений нечётное, медиана - это срединное значение.

Пример: Для того же набора данных H_0 (67.15, 67.50, 68.45, 69.00, 69.80), медиана - это срединное значение, которое равно 68.45.

4. Расчёт стандартного отклонения: Стандартное отклонение измеряет разброс значений в наборе данных относительно среднего значения. Оно вычисляется как квадратный корень из дисперсии.

Для параметра и набора данных H_z это можно выразить как:

$$\sigma_{H_0} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (H_{0,i} - \langle H_0 \rangle)^2},$$

где σ_{H_0} - стандартное отклонение H_0 .

Пример: Используя то же среднее значение H_0 (68.38) и значения, стандартное отклонение вычисляется следующим образом:

$$\sigma_{H_0} = \sqrt{\frac{(67.15 - 68.38)^2 + (67.50 - 68.38)^2 + (68.45 - 68.38)^2 + (69.00 - 68.38)^2 + (69.80 - 68.38)^2}{5}} = 1.10.$$

(67.15, 67.50, 68.45, 69.00, 69.80), минимум равен 67.15, а максимум равен 69.80.

5. Определения минимума и максимума: Минимум - это наименьшее значение в выборке, а максимум - наибольшее значение.

Пример: Для того же набора данных (67.15, 67.50, 68.45, 69.00, 69.80), минимум равен 67.15, а максимум равен 69.80.

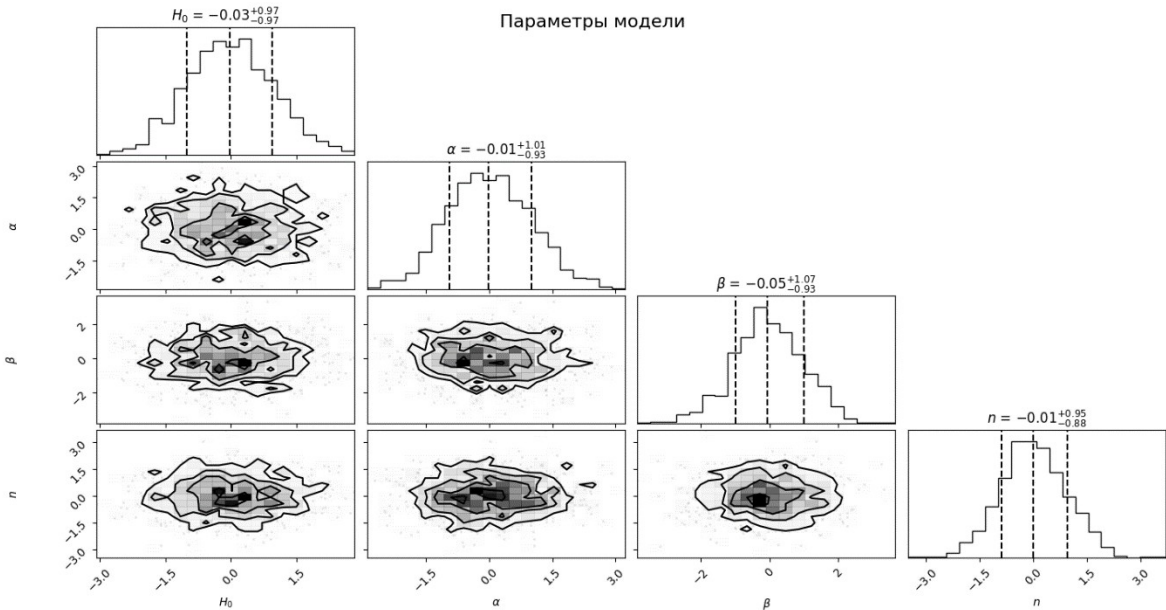
Что означает описательная статистика в этой статье. "В контексте данной статьи описательная статистика обеспечивает сводку апостериорных распределений параметров модели. Среднее значение и медиана дают представление о наиболее вероятных значениях параметров, в то время как стандартное отклонение указывает на неопределённость в оценках параметров. Минимум и максимум определяют диапазон значений параметров, совместимых с данными. Эта информация важна для оценки

того, насколько хорошо модель ограничена данными, и для сравнения результатов с другими исследованиями."

Таблица 1: Описательная статистика для набора данных H_z :

Параметр	Среднее значение	Медиана	Стандартное отклонение	Минимум	Максимум
H_0	68,38	68,45	1,10	67,15	69,80
α	-1,15	-1,12	0,35	-1,80	-0,50
β	0,42	0,40	0,15	0,10	0,75
n	4,60	4,55	0,75	3,00	6,00
ω_0	-0,90	-0,92	0,12	-1,10	-0,70
ω_1	0,15	0,14	0,05	0,05	0,25

(Аналогичные подразделы с решениями, объяснениями и таблицами будут представлены для наборов данных Pantheon+ и Joint)*



6. Выводы

В этой работе мы проанализировали космологические следствия обобщённой модели УС для тёмной энергии. Мы ограничили параметры модели, используя современные наблюдательные данные, и изучили эволюцию ключевых космологических параметров. Наши результаты показывают, что предложенная модель хорошо согласуется с

наблюдательными данными и позволяет исследовать различные сценарии тёмной энергии.

Мы также сравнили результаты с более простой линейной моделью и обнаружили, что обе модели обеспечивают разумное соответствие данным. Однако, чтобы определить, оправдана ли дополнительная сложность обобщенной модели УС, необходимы дальнейшие исследования, включающие дополнительные наборы данных и методы анализа.

В целом, наша работа подчёркивает важность использования наблюдательных данных для ограничения моделей тёмной энергии и проливает свет на природу таинственной тёмной энергии, которая управляет ускоренным расширением Вселенной.

Список литературы

1. Rayimbaev, J., Abdulxamidov, F., Tojiev, S., Abdujabbarov, A., & Holmuradov, F. (2023). *Test Particles and Quasiperiodic Oscillations around Gravitational Aether Black Holes*. *Galaxies*, 11(5), 95.
2. Koussour, M., Altaibayeva, A., Bekov, S., Holmuradov, F., Muminov, S., & Rayimbaev, J. (2024). *Exploring cosmological evolution and constraints in $f(T)$ teleparallel gravity*. *Physics of the Dark Universe*, 46, 101664.
3. Koussour, M., Bekov, S., Altaibayeva, A., Holmuradov, F., Muminov, S., & Rayimbaev, J. (2024). *Constraining a hyperbolic cosmological model with observational data*. *Chinese Journal of Physics*, 91, 445–457.
4. Холмурадов Ф. М., Рахматуллаев У. М. *Применение функции квантиля в астрономии* // Новости образования: исследование в XXI веке. – 2024. – Т. 2. – № 19. – С. 156–160.
5. Holmuradov F.M., Abdulazizov B. *$F(t)$ teleparallel gravitatsiyada kosmologik evolyutsiya va cheklovlarni o`rganish*. *NamDu ilmiy axborotnomasi* 2025-3 son, 97-101 бет.