

Asqarov Javohir Nurali o'g'li

Namangan davlat texnika universiteti tayanch
doktoranti

Email: askarjavokhir1997@gmail.com

UO'K 159.9(575.1)

**UCHINCHI TARTIBLI KELI DARAXTIDA TASHQI MAYDONLI
RAQOBATLASHUVCHI O'ZARO TA'SIRLI IZING MODEL UCHUN ASOSIY
HOLATLAR**

Annotatsiya: Biz ushbu maqolada uchinchi tartibli Keli daraxtida tashqi maydonli raqobatlashuvchi o'zaro ta'sirli Izing modeli uchun translation-invariant, davriy, kuchsiz davriy asosiy holatlarni o'rgandik.

Kalit so'zlar: Keli daraxti, Izing modeli, asosiy holatlar, translation-invariant asosiy holatlar, davriy asosiy holatlar, kuchsiz davriy asosiy holatlar.

Askarov Javokhir Nurali ugli

PhD Student, Namangan State Technical
University

**GROUND STATES OF ISING MODEL FOR THE COMPETING INTERACTIONS
WITH AN EXTERNAL FIELD ON A CAYLEY TREE OF ORDER THREE**

Annotation: In this article, we study translation-invariant, periodic, and weakly periodic ground states for the competing interactions Ising model with an external field on a third-order Cayley tree.

Keywords: Cayley tree, Ising model, ground states, translation-invariant ground states, periodic ground states, weakly periodic ground states.

Аскаров Жавохир Нурали угли

Аспирант, Наманганский государственный
технический университет

ОСНОВНЫЕ СОСТОЯНИЯ МОДЕЛИ ИЗИНГА С КОНКУРИРУЮЩИМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ И ВНЕШНИМ ПОЛЕМ НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Аннотация: В данной статье мы изучили трансляционно-инвариантные, периодические и слабо периодические основные состояния для модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями и внешним полем на дереве Кэли третьего порядка.

Ключевые слова: Дерево Кэли, модель Изинга, основные состояния, трансляционно-инвариантные основные состояния, периодические основные состояния, слабо периодические основные состояния.

Kirish

Spin qiymatli modellar bilan bog'liq asosiy muammolardan biri Gibbs o'lchovlari to'plamining tavsifi hisoblanadi (masalan, [2-6] ga qarang). Gibbs o'lchovlarining fazaviy diagrammasi (batafsil [3, 6] ga qarang) yetarlicha past haroratlarda asosiy holatlarning fazaviy diagrammasiga yaqin bo'lgani sababli, asosiy holatlar to'plamini tavsiflash muammosi tabiiy ravishda paydo bo'ladi.

Keli daraxti. Keli daraxti $\mathfrak{T}^k$, bu $k \geq 1$ tartibli cheksiz daraxt bo'lib, ya'ni har bir uchidan $k+1$ ta qirra chiquvchi, siklsiz cheksiz grafdir. Faraz qilaylik, $\mathfrak{T}^k = (V, L, i)$, bu yerda $V - \mathfrak{T}^k$ ni uchlar to'plami, L -uning qirralar to'plami va i - insidentlik funksiyasi, har bir $l \in L$ qirraga uning oxirgi nuqtalari $x, y \in V$ ni mos qo'yadi. Agar $i(l) = [x, y]$ bo'lsa, u holda x, y yaqin qo'shnilar deyiladi va bunda $l = \langle x, y \rangle$ ko'rinishda yozamiz. Keli daraxtida $d(x, y)$, $x, y \in V$ masofa

$$d(x, y) = \min \{ d : \exists x = x_0, x_1, \dots, x_{d-1}, x_d = y \in V \},$$

bo'lib, bu yerda $\langle x_0, x_1 \rangle, \langle x_1, x_2 \rangle, \dots, \langle x_{d-1}, x_d \rangle$ - yaqin qo'shnilardir.

Fiksirlangan $x^0 \in V$ uchni olib, uni ildiz deb ataymiz, hamda quyidagilarni belgilaymiz:

$$\begin{aligned} W_n &= \{x \in V : d(x^0, x) = n\}, \\ V_n &= \{x \in V : d(x^0, x) \leq n\}, \\ S(x) &= \{x \in W_n, y \in W_{n+1} : d(x, y) = 1\}. \end{aligned}$$

$S(x)$ to'plamni $x \in W_n$ elementning to'g'ri avlodlar to'plami deb ataymiz. $S(x) = \{x \in W_n, y \in W_{n+1} : d(x, y) = 1\}$. Ma'lumki [1], Keli daraxtining V uchlar to'plami va G_k - barpo etuvchilari $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ bo'lgan $(k+1)$ ta ikkinchi tartibli siklik gruppalar orasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjud.

Tashqi maydonli raqobatlashuvchi o'zaro ta'sirli Izing modeli. Model haqida asosiy ta'riflar va ma'lumotlarni berib o'tamiz. Spin qiymatlari $\Phi = [-1, 1]$ to'plamiga tegishli bo'lgan Izing modelini ko'raylik. Shuningdek, $A \subseteq V$ to'plam berilgan bo'lsin. A to'plamda σ_A - konfiguratsiya deb quyidagicha aniqlangan akslantirishga aytiladi:

$$\begin{aligned} x \in A &\rightarrow \sigma_A(x) \in \Phi = [-1, 1], \\ \sigma_A : A &\rightarrow \Phi. \end{aligned}$$

A to'plamning elementlariga Φ to'plamni elementlarini akslantiradi. Barcha konfiguratsiyalar to'plami $\Omega_A = \Phi^A$ bo'ladi. Xususan, $\Omega = \Omega_V$ butun daraxtdagi barcha konfiguratsiyalar fazosini $\Omega_V = \Omega$ deb belgilashimiz mumkin.

Faraz qilaylik, $G_k / G_k^* = \langle H_1, \dots, H_r \rangle$ - faktor gruppalar bo'lsin, bu yerda G_k^* - normal bo'luvchi.

Ta'rif 1: Agar $\forall x \in G_k, y \in G_k^*$ uchun $\sigma(yx) = \sigma(x)$ o'rinli bo'lsa, $\sigma \in \Omega$ konfiguratsiya G_k^* - davriy deyiladi.

Ta'rif 2. G_k -davriy konfiguratsiya translatsion-invariant konfiguratsiya deyiladi.

Ta'rif 3: Agar $\sigma(x) = \sigma_{ij}, x_i \in H_i, x_j \in H_j, \forall x \in G_k$ bo'lsa, u holda $\sigma(x), x \in V$ konfiguratsiya G_k^* - kuchsiz davriy deyiladi.

Tashqi maydonli o'zaro ta'sir radiusi 2 ga teng bo'lgan Izing modeli Gamiltoniani quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$H(\sigma) = J_1 \sum_{\langle x,y \rangle \in L} \sigma(x)\sigma(y) + J_2 \sum_{\substack{\langle x,y \rangle \in L \\ d(x,y)=2}} \sigma(x)\sigma(y) + \alpha \sum_{x \in V} \sigma(x) \quad (1)$$

Bu yerda $J_1, J_2, \alpha \in R, \alpha$ – tashqi magnit maydon.

Asosiy holatlar. V uchlari to'plamidan tuzilgan birlik shakllar to'plamini M bilan belgilaymiz. $b \in M$ shakldagi konfiguratsiyani $x \in b \rightarrow \sigma(x) \in \Phi$ funksiya kabi aniqlaymiz va uni σ_b bilan belgilaylik. $b \in M$ shaklning markazini c_b bilan, qolgan nuqtalari to'plamini ω_b bilan belgilaylik. σ_b konfiguratsiya energiyasini

$$U(\sigma_b) = \frac{1}{2} J_1 \sum_{\substack{\langle x,y \rangle: \\ x,y \in b}} \sigma(x)\sigma(y) + J_2 \sum_{\substack{\langle x,y \rangle: \\ d(x,y)=2}} \sigma(x)\sigma(y) + \alpha \sigma(c_b) \quad (2)$$

ko'rinishda aniqlanadi.

Lemma 1. Har bir σ_b konfiguratsiya uchun quyidagiga ega bo'lamiz:

$$U(\sigma_b) \in \{U_{-(k+1)}, \dots, U_{-0}, U_{+0}, \dots, U_{+(k+1)}\},$$

Bu yerda

$$U_{\pm i} = \left(\frac{k+1}{2} - i \right) J_1 + \left(\frac{k(k+1)}{2} + 2i(i-k-1) \right) J_2 \pm \alpha, \quad i = \overline{0, k+1}.$$

Ta'rif 4. Agar $\forall b \in M$ uchun $U(\phi_b) = \min \{ U_{\pm i} : i=0, 1, \dots, k+1 \}$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda ϕ konfiguratsiya H gamiltonianga nisbatan asosiy holat deyiladi.

Har bir $m = -(k+1), \dots, -1, -0, +0, +1, \dots, +(k+1)$ da $U_m(\phi_b, (J, \alpha))$ energiya eng kichik bo'ladigan to'plamni A_m orqali belgilaymiz:

$$A_m = \left\{ (J_1, J_2, \alpha) : U_m(\sigma_b) \leq U_{\pm i}, i=0, 1, \dots, k+1 \right\}. \quad (3)$$

Ko'rish osonki, $k=3$ holda ixtiyoriy σ_b uchun yuqoridagi Lemma 1 orqali $U(\sigma_b) \in \{U_{+0}, U_{-0}, U_{+1}, U_{-1}, U_{+2}, U_{-2}, U_{+3}, U_{-3}, U_{+4}, U_{-4}\}$ energiyalari topishimiz mumkun. (3) dan foydalanib

$$A_{+0} = \left\{ (J_1, J_2, \alpha) \in R^3 : J_1 \leq 0, J_1 + 6J_2 \leq 0, \alpha \leq 0 \right\},$$

$$A_{-0} = \left\{ (J_1, J_2, \alpha) \in R^3 : J_1 \leq 0, J_1 + 6J_2 \leq 0, \alpha \geq 0 \right\},$$

$$A_{+1} = \left\{ (J_1, J_2, \alpha) \in R^3 : J_1 \leq 0, -\frac{J_1}{6} \leq J_2 \leq -\frac{J_1}{2}, \alpha \leq 0 \right\},$$

$$A_{-1} = \left\{ (J_1, J_2, \alpha) \in R^3 : J_1 \leq 0, -\frac{J_1}{6} \leq J_2 \leq -\frac{J_1}{2}, \alpha \geq 0 \right\},$$

$$A_{+2} = \left\{ (J_1, J_2, \alpha) \in R^3 : J_1 \geq 0, -\frac{J_1}{2} \leq J_2 \leq \frac{J_1}{2}, \alpha \leq 0 \right\},$$

$$A_{-2} = \left\{ (J_1, J_2, \alpha) \in R^3 : J_1 \geq 0, -\frac{J_1}{2} \leq J_2 \leq \frac{J_1}{2}, \alpha \geq 0 \right\},$$

$$A_{+3} = \left\{ (J_1, J_2, \alpha) \in R^3 : J_1 \geq 0, \frac{J_1}{6} \leq J_2 \leq \frac{J_1}{2}, \alpha \leq 0 \right\},$$

$$A_{-3} = \left\{ (J_1, J_2, \alpha) \in R^3 : J_1 \geq 0, \frac{J_1}{6} \leq J_2 \leq \frac{J_1}{2}, \alpha \geq 0 \right\},$$

$$A_{+4} = \left\{ (J_1, J_2, \alpha) \in R^3 : J_1 \geq 0, J_1 - 6J_2 \geq 0, \alpha \leq 0 \right\},$$

$$A_{-4} = \left\{ (J_1, J_2, \alpha) \in R^3 : J_1 \geq 0, J_1 - 6J_2 \geq 0, \alpha \geq 0 \right\},$$

$$\text{va } \forall i=1 \dots 4 A_{\pm i} = R^3.$$

Teorema 1. Uchinchi tartibli Keli daraxtida $\alpha \neq 0$ tashqi maydonli raqobatlashuvchi o‘zaro ta’sirga ega Izing modeli uchun quyidagi tasdiqlar o‘rinli;

1.a) $\varphi(x)=1, \forall x \in V$ konfiguratsiya

$$\left\{ (J_1, J_2, \alpha) \in R^3: J_1 \leq 0, J_1 + 6J_2 \leq 0, \alpha \leq 0 \right\}$$

to‘plamda translatsion-invariant asosiy holat bo‘ladi;

b) $\varphi(x)=-1, \forall x \in V$ konfiguratsiya

$$\left\{ (J_1, J_2, \alpha) \in R^3: J_1 \leq 0, J_1 + 6J_2 \leq 0, \alpha \geq 0 \right\}$$

to‘plamda translatsion-invariant asosiy holat bo‘ladi:

2. Barcha H_A - davriy asosiy holat translatsion-invariant bo‘ladi.

Isbot. Quyidagicha belgilash kiritamiz: $C_{\pm i} = \{ \varphi_b : U(\varphi_b) = U_{\pm i} \}$.

1. a) $\forall x \in V$ uchun $\sigma(x)=1$ bo‘lsin. U holda $\forall b \in M$ uchun $\sigma_b \in C_{+0}$ bo‘lishi kelib chiqadi. Demak $\sigma(x)=1, \forall x \in V$ konfiguratsiya

$$A_{+0} = \left\{ (J_1, J_2, \alpha) \in R^3: J_1 \leq 0, J_1 + 6J_2 \leq 0, \alpha \leq 0 \right\}$$

to‘plamda translatsion-invariant asosiy holat bo‘ladi.

b) $\forall x \in V$ uchun $\sigma(x)=-1$ bo‘lsin. U holda $\forall b \in M$ uchun $\sigma_b \in C_{-0}$ bo‘lishi kelib chiqadi. Demak $\sigma(x)=-1, \forall x \in V$ konfiguratsiya

$$A_{-0} = \left\{ (J_1, J_2, \alpha) \in R^3: J_1 \leq 0, J_1 + 6J_2 \leq 0, \alpha \geq 0 \right\}$$

to‘plamda translatsion-invariant asosiy holat bo‘ladi

2. Birorta H_A -davriy konfiguratsiya olaylik. $|A|=1$ va $H_A = \{ x \in G_k : w_{a_i}(x) - juft \}$, $H_A = H_0$ deb olamiz.

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in H_0, \\ -1, & x \in G_k/H_0. \end{cases}$$

Biz quyidagi tushunchani kiritamiz $B_t = \{ x \in S_1(c_b) : \varphi_b(x) = t \}$ barcha $t \in \Phi$ lar uchun. $c_b \in H_0$ bo‘lsin. U holda

$$\varphi(c_b)=1, |B_1|=3, |B_{-1}|=1.$$

Natijada $\varphi_b \in C_{+1}$ kelib chiqadi. $c_b \in G_k / H_0$ bo'lsin. U holda

$$\varphi(c_b)=-1, |B_{-1}|=3, |B_1|=1.$$

Natijada $\varphi_b \in C_{-1}$ kelib chiqadi. U holda φ konfiguratsiya

$$A_{+1} \cap A_{-1} = \{J_1 \leq 0, -\frac{J_1}{6} \leq J_2 \leq -\frac{J_1}{2}, a=0\}$$

to'plamda asosiy holat bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa teorema shartiga zid.

Quyidagi teorema $k=3$ tartibli Keli daraxtida normal bo'luvchi indeksi 2 bo'lgan kuchsiz davriy asosiy holatlarni isbotlaydi.

Teorema 2. Uchinchi tartibli Keli daraxtida $\alpha \neq 0$ tashqi maydonli raqobatlashuvchi o'zaro ta'sirga ega Izing modeli uchun har qanday H_A - kuchsiz davriy asosiy holatlar translatsion-invariant asosiy holat bo'ladi.

Isbot. φ ixtiyoriy konfiguratsiya bo'lsin. H_A - kuchsiz davriy konfiguratsiya dastlab quyidagi ko'rinishga ega bo'lsin deb faraz qilaylik:

$$\varphi(x) = \begin{cases} -1 \text{ agar } x_i \in H_0, x \in H_0, \\ +1 \text{ agar } x_i \in H_0, x \in H_1, \\ -1 \text{ agar } x_i \in H_1, x \in H_0, \\ +1 \text{ agar } x_i \in H_1, x \in H_1. \end{cases}$$

1. $c_b \in H_1$ bo'lsin:

a) Agar $c_{b_i} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b_i})=-1$ bo'lsa, $\varphi_b(c_b)=1, |B_1|=3, |B_{-1}|=1$ bo'ladi. Natijada $\varphi_b \in C_{+1}$.

b) Agar $c_{b_i} \in H_1$ va $\varphi_b(c_{b_i})=1$ bo'lsa, $\varphi_b(c_b)=1, |B_1|=3, |B_{-1}|=1$ bo'lsadi. Natijada $\varphi_b \in C_{+1}$.

2. $c_b \in H_0$ bo'lsin. a) Agar $c_{b_i} \in H_0$ va $\varphi_b(c_{b_i})=-1$ bo'lsa, $\varphi_b(c_b)=-1, |B_{-1}|=3, |B_1|=1$ bo'ladi.

Natijada $\varphi_b \in C_{-1}$.

b) Agar $c_{b_i} \in H_1$ va $\varphi_b(c_{b_i})=1$ bo'lsa, $\varphi_b(c_b)=-1, |B_{-1}|=3, |B_1|=1$

bo'ladi. Natijada $\varphi_b \in C_{-1}$.

Demak φ konfiguratsiya $A_{+1} \cap A_{-1} = \{J_1 \leq 0, -\frac{J_1}{6} \leq J_2 \leq -\frac{J_1}{2}, a=0\}$

to'plamda asosiy holat bo'ladi. Qolgan holatlar ham yuqoridagi kabi isbotlanadi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Ganikhodjaev N.N. Group representation and automorphisms of the Cayley tree. Dokl. Akad. Nauk Resp. Uzbekistan. –1994-- 4, № 3–5.
2. Baxter R.J. Exactly Solved Models in Statistical Mechanics. Academic Press, London. –1982--.
3. Minlos R.A. Introduction to Mathematical Statistical Physics. University Lecture Series. American Mathematical Society, Providence. –2000--Vol.1.
4. Preston, C.J. Gibbs States on Countable Sets. Cambridge University Press, London. – 1974--.
5. Rozikov, U.A. Gibbs Measures on Cayley Trees. World Scientific, Singapore .-2013-.
6. Sinai, Ya.G. Theory of Phase Transitions. Rigorous Results. Pergamon, Oxford - 1982-