

Madraximov Asqarali Ermatovich

Farg‘ona Davlat Universiteti

Fizika-matematika fakulteti

Matematika kafedrası dotsenti

SIMMETRIK KO‘PHADLARNING XOSSALARINI TAKRORIY TENGLAMALARNI YECHISHDA QO‘LLASH

Annotatsiya: Ishda [2] simmetrik ko‘phadlarning asosiy xossalarini chiziqli tenglamalar sistemasini yechishga tatbiq qilish masalasi ko‘rib chiqilgan. [3] ishda esa, asosiy simmetrik ko‘phadlarning xossalari yordamida ratsional kasrlar maxrajidagi irratsionallikdan xalos bo‘lish masalasi o‘rganilgan. Ushbu maqolada simmetrik ko‘phadlarning xossalari takroriy algebraik tenglamalarni yechishda qo‘llaniladi.

Kalit so‘zlar: ko‘phad, simmetrik ko‘phad, asosiy simmetrik ko‘phad, takroriy tenglamalar, ko‘phad ildizlari, Gerner sxemasi

Madraximov Askarali Ermatovich

Associate Professor at the Department of Mathematics

Faculty of Physics and Mathematics

Fergana State University.

APPLICATION OF SYMMETRIC POLYNOMIAL PROPERTIES TO SOLVING REPEATED EQUATIONS

Abstract: In [2], the application of fundamental symmetric polynomial properties to solving systems of linear equations was studied. In [3], these properties were used to rationalize the denominators of rational fractions by eliminating irrationality. This paper applies the properties of symmetric polynomials to solving repeated algebraic equations.

Keywords: polynomial, symmetric polynomial, fundamental symmetric polynomial, repeated equations, polynomial roots, Horner's scheme

Мадрахимов Аскарали Эрматович

доцент кафедры Математики
Физико-математического факультета
Ферганского государственного университета.

ПРИМЕНЕНИЕ СВОЙСТВА СИММЕТРИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ К РЕШЕНИЮ ПОВТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация: в работе [2] рассмотрен вопрос о применении свойства основных симметрических многочленов к решению системы линейных уравнений. А в [3] вопрос об освобождении иррациональности знаменателя рациональных дробей с помощью свойств основных симметрических многочленов. В данной работе свойства симметрических многочленов применяются к решению повторных алгебраических уравнений.

Ключевые слова: многочлен, симметрический многочлен, основной симметрический многочлен, повторные уравнения, корни многочлена, схема Горнера

Известно, что сумму $S_k = x^k + y^k$ можно выразить через основные симметрические многочлены $\sigma_1 = x + y$, $\sigma_2 = xy$, при любом $k = 2, 3, \dots, n$.

Если воспользоваться суммой S_k выраженное через основные симметрические многочлены σ_1, σ_2 , то их можно применить к решению некоторых алгебраических уравнений с высшими порядками.

Определение 1. Если в многочлене

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n \quad (a_0 \neq 0)$$

где, $a_0 = a_n$, $a_1 = a_{n-1}$, $a_2 = a_{n-2}, \dots$, то многочлен $f(x)$ называется повторяющимся многочленом.

Определение 2. Если $f(x)$ повторяющийся многочлен и $f(x) = 0$, то последнее уравнение называет повторяющим уравнением. Отметим, что следующая теорема играет важную роль при решении повторяющихся уравнений.

Теорема. Если

$$f(x) = a_0 x^{2k} + a_1 x^{2k-1} + \dots + a_{2k-1} x + a_{2k}$$

является повторяющим многочленом чётного порядка, то многочлен $f(x)$ можно выразить в виде

$$f(x) = x^k \varphi(\sigma),$$

где $\sigma = x + \frac{1}{x}$, $\varphi(\sigma)$ - некоторый многочлен со степенью k . [1]

Произвольный повторяющийся многочлен нечетной степени делится без остатка на многочлен $(x+1)$ и только в этом случае частный многочлен всегда является повторяющимся многочленом чётной степени.

Если заменить $u = x, v = \frac{1}{x}$, то

$$S_k = u^k + v^k = x^k + \frac{1}{x^k}$$

имея в виду

$$\sigma_1 = u + v = x + \frac{1}{x} = \sigma$$

$$\sigma_2 = u \cdot v = x \cdot \frac{1}{x} = 1$$

можно выразить через σ .

$$S_k = x^k + \frac{1}{x^k}$$

В частности:

$$S_1 = x + \frac{1}{x} = \sigma,$$

$$S_2 = x^2 + \frac{1}{x^2} = \sigma^2 - 2,$$

$$S_3 = x^3 + \frac{1}{x^3} = \sigma^3 - 3\sigma,$$

$$S_4 = x^4 + \frac{1}{x^4} = \sigma^4 - 4\sigma^2 + 2$$

$$S_5 = x^5 + \frac{1}{x^5} = \sigma^5 - 5\sigma^3 + 5\sigma$$

$$S_6 = x^6 + \frac{1}{x^6} = \sigma^6 - 6\sigma^4 + 9\sigma^2 - 2$$

$$S_7 = x^7 + \frac{1}{x^7} = \sigma^7 - 7\sigma^5 + 14\sigma^3 - 7\sigma$$

и т.д.

Воспользовавшись выше стоящими обозначениями и некоторыми соображениями можно решить повторяющиеся уравнения.

Например 1. Решить уравнение

$$f(x) = 12x^4 - 16x^3 - 11x^2 - 16x + 12 = 0 \quad (1)$$

Решение.

Выполняя некоторые элементарные преобразование имеем:

$$\begin{aligned} f(x) &= 12x^4 - 16x^3 - 11x^2 - 16x + 12 = \\ &= x^2 \left[12 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) - 16 \left(x + \frac{1}{x} \right) - 11 \right] = \\ &= x^2 [12(\sigma^2 - 2) - 16\sigma - 11] = x^2 (12\sigma^2 - 11\sigma - 35) \end{aligned} \quad (2)$$

Ясно, что $x \neq 0$ не является корнем уравнения $f(x) = 0$. Поэтому уравнение $f(x) = 0$ равносильно уравнению

$$12\sigma^2 - 11\sigma - 35 = 0$$

Легко убедиться в том, что

$$\sigma = -\frac{7}{6}, \quad \sigma = \frac{5}{2}$$

$$\sigma = x + \frac{1}{x}$$

Таким образом, так как $\sigma = x + \frac{1}{x}$, соответственно получим уравнения

$$x + \frac{1}{x} = -\frac{7}{6}, \quad x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$$

Решив последние уравнения имеем:

$$x_{1,2} = \frac{-7 + i\sqrt{25}}{12},$$

$$x_3 = 2; \quad x_4 = \frac{1}{2}.$$

Проверка. По схеме Горнера убедились в том, что $x_3 = 2$ есть решение данного уравнение.

$k : f(x)$	12	-16	-11	-16	12
2	12	8	5	-6	0

Отметим, что и другие найденные значения неизвестного x также являются корнями данного многочлена.

Пример 2. Решить повторяющееся уравнение

$$f(x) = 4x^{11} + 4x^{10} - 21x^9 - 21x^5 + 17x^4 + 17x^6 + \\ + 17x^5 + 17x^4 - 21x^3 - 21x^2 + 4x + 4 = 0 \quad (3)$$

В силу изложенной выше теоремы левая сторона (3) делится без остатка на $(x+1)$

Выполнив деление, имеем

$$4x^{11} + 4x^{10} - 21x^9 - 21x^8 + 17x^4 + 17x^6 + \\ + 17x^5 + 17x^4 - 21x^3 - 21x^2 + 4x + 4 = \\ = (x+1)(2x^{10} - 21x^8 + 17x^6 + 17x^4 - 21x^2 + 4) \quad (4)$$

Таким образом уравнение (3) равносильно уравнению $x+1=0$ или

$$4x^{10} - 21x^8 + 17x^6 + 17x^4 - 21x^2 + 4 = 0$$

Из первого уравнения находим, что $x_1 = -1$. Второе уравнение есть повторяющееся уравнение чётной степени.

Поэтому второе уравнение решим также по способу приведенной в примере 1.

$$\begin{aligned}
 & 4x^{10} - 21x^8 + 17x^6 + 17x^4 - 21x^2 + 4 = \\
 & = x^5 \left(4x^5 - 21x^3 + 17x + \frac{17}{x} - 21 \cdot \frac{1}{x^3} + 4 \cdot \frac{1}{x^5} \right) = \\
 & = x^5 \left[4 \left(x^5 + \frac{1}{x^5} \right) - 21 \left(x^3 + \frac{1}{x^3} \right) + 17 \left(x + \frac{1}{x} \right) \right] = \\
 & = x^5 [4(\sigma^5 - 5\sigma^3 + 5\sigma) - 21(\sigma^3 - 3\sigma) + 17\sigma] = \\
 & \quad x^5(4\sigma^5 - 41\sigma^3 + 100\sigma)
 \end{aligned} \tag{5}$$

Видно, что $x=0$ не является решением уравнения (3). Поэтому (5) равносильно уравнению

$$\sigma(4\sigma^4 - 41\sigma^2 + 100) = 0 \tag{6}$$

В свою очередь (6) равносильно решению уравнения $\sigma=0$ или $4\sigma^4 - 41\sigma^2 + 100 = 0$.

Выше было отмечено, что $x=0$ и $\sigma=0$ не имеет места. Поэтому имеем уравнение

$$4\sigma^4 - 41\sigma^2 + 100 = 0$$

А это есть биквадратное уравнение относительно σ^2 решив его получим:

$$\sigma = -\frac{5}{2}, \quad \sigma = \frac{5}{2}, \quad \sigma = 2, \quad \sigma = -2$$

имея в виду, что $\sigma = x + \frac{1}{x}$ получим уравнения:

$$x + \frac{1}{x} = 0, \quad x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2}, \quad x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$$

$$x + \frac{1}{x} = 2, \quad x + \frac{1}{x} = -2$$

а их корни,

$$x_1 = -1, \quad x_2 = i, \quad x_3 = -i, \quad x_4 = -2,$$

$$x_5 = -\frac{1}{2}, \quad x_6 = 2, \quad x_7 = -\frac{1}{2}, \quad x_8 = x_9 = -1, \quad x_{10} = x_{11} = 1.$$

Нетрудно убедиться в том, что найденные корни будут решениями уравнения (2).

Литература

1. Болтянский В.Г., Виленкин Н.Я. Симметрия в алгебре. М., Наука, 1967, 283 с.
2. Мадрахимов А.Э., Н.Мирзакаримова. Симметрик кўпхадларни тенгламалар системасини ечишга тадбиқи. НамДУ, илмий ахборотлар. 2024, № 6, 51-54 б
3. А.Э.Мадрахимов. Симметрик кўпхадларни касрнинг махражини иррационалликдан қутқаришга тадбиқи. НамДУ, Илмий ахборотлар, № 6, 42-44 бетлар.