

**ОБ АВТОМОДЕЛЬНОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ
НЕСТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ ГРУНТОВЫХ ВОД ВБЛИЗИ
ВОДОХРАНИЛИЩА ПРИ НАЛИЧИИ НЕЛИНЕЙНОГО
ИСПАРЕНИЯ**

Жамуратов К.¹, Умаров Х.²

^{1, 2}Гулистанский государственный университет, Гулистан, Республика
Узбекистан

e-mail: umarovhr@mail.ru, телефон: (+998 97) 341 87 17

Аннотация. Исследована задача фильтрации вблизи новых каналов и водохранилищ с учетом испарения. Для одного случая зависимости испаряемости от времени найдено автомодельное решение задачи с неизвестной границей, позволяющее сделать определенные качественные выводы и которое можно использовать в качестве теста.

Ключевые слова: автомодельное решение, нестационарное движение, грунтовые воды, испарение, нелинейное испарение, коэффициент водоотдачи, коэффициент фильтрации, уравнение Буссинеска, неизвестная граница.

**SIMILAR SOLUTIONS PROBLEM OF UNSTEADY GROUNDWATER
FLOW VICINITY OF A RESERVOIR UNDER NONLINEAR
VAPORIZATION**

Zhamuratov K.¹, Umarov Kh.²

^{1, 2}Gulistan State University, Gulistan, Republic of Uzbekistan

e-mail: umarovhr@mail.ru, number telephone: (+998 97) 341 87 17

Annotation. We investigated the problem of filtering near the new channels and reservoirs with the evaporation. For one case, depending on the time of evaporation found similar solution of the problem with an unknown

boundary, provides some qualitative conclusions and which can be used as a test.

Keywords: self-similar solution, unsteady movement, ground water, vaporization, the non-linear vaporization, the coefficient of water loss and filtration, Boussinesq equation, the unknown boundary.

NOCHIZIQLI BUG‘LANISH MAVJUD BO‘LGANDA SUV OMBORI YAQINIDAGI YER OSTI SUVLARINING NOSTATSIONAR HARAKATI MASALASINING AVTOMODEL YECHIMI HAQIDA

Jamuratov K.¹, Umarov X.²

^{1,2}Guliston davlat universiteti, Guliston, O‘zbekiston Respublikasi

e-mail: umarovhr@mail.ru

Annotatsiya. Yangi kanal va suv omborlari yaqinidagi filtratsiya masalasi bug‘lanishni hisobga olgan holda o‘rganildi. Bug‘lanishni vaqtga bog‘liqligining bitta holatida noma‘lum chegarali masalaning avtomodel yechimi topildi. Aniqlangan sifatli xulosalarni yo‘lga qo‘yish va test sifatida foydalanish mumkin.

Tayanch so‘zlar: avtomodel yechim, nostatsionar harakat, yer osti suvlari, bug‘lanish, nochiziqli bug‘lanish, suv sarfi koeffitsienti, filtratsiya koeffitsienti, Bussinesk tenglamasi, noma‘lum chegara.

Введение

Курс на интенсификацию сельскохозяйственного производства, проводимой в нашей стране в соответствии аграрной политикой государства, вызвал бурное развитие гидротехнического строительства. В частности, вводится в эксплуатацию и строится большое количество каналов и водохранилищ.

Устройства новых каналов и водохранилищ коренным образом изменяет гидрогеологические и мелиоративные условия прибрежным территорий. Повышение горизонта воды в гидротехнических сооружениях

вызывает поверхности грунтового потока на прилегающих к ним территориях и в ряде случаев создает угрозу подтопления городов, населенных пунктов, а также засоления и заболачивания, ценных для сельского хозяйства земель.

Вследствие неглубокого залегания вблизи водоемов грунтовые воды интенсивно расходятся на испарение. Если грунты и грунтовые воды засолены, то поднимающиеся грунтовые воды, растворяя соли, содержащиеся в грунтах, транспортируют их к почвенному слою, что ведет к его засолению.

Следовательно, изучение и анализ водного режима любой территории не могут быть проведены достаточно полно без учета испарения. В этой связи несомненно актуальность и исследования различных математических моделей процесса фильтрации вблизи новых каналов и водохранилищ с учетом испарения.

Цель данного исследования – нахождение автомодельного решения задачи с неизвестной границей, позволяющего сделать качественные выводы о динамике грунтовых вод и которое можно использовать тестовой задачей для численных расчетов.

Литературный анализ

Рассмотрим движение грунтовых вод вблизи водохранилищ, в котором уровень воды мгновенно увеличивается от начального значения h_0 ($h_0 < h_{kp}$) до значения $h^* = h_{kp} + h_0$, $0 < h_0 \leq y_0$, $y_0 = h_m - h_{kp}$, h_{kp} – критический уровень стояния грунтовых вод, выше которого происходит испарение, h_m – мощность пласта.

Пусть пласт имеет горизонтальный водоупор и перетек из нижележащего пласта отсутствует, а также с поверхности грунтового потока происходит испарение, зависящее от глубины залегания грунтовых вод и времени по закону

$$\varepsilon(h,t)=\begin{cases} 0, & h \leq h_{kp}, \\ \frac{\varepsilon_1(t)}{y_0^n} (h - h_{kp})^n, & h > h_{kp}, \end{cases}$$

где n – параметр, который может принимать значения 0, 1, 2, 3 [3]

В силу зависимости $\varepsilon(h,t)$ от $h(x,t)$ область движения разделяется на две зоны с подвижной границей раздела $x=l(t)$, причем в области $\psi_1(t)=h(0,t) > h(x,t) > h(l(t),t)=h_{kp}$ ($0 < x < l(t)$) будет иметь испарение, а в области $h_0 < h(x,t) \leq h_{kp}$ ($x > l(t)$) отсутствовать.

В пределах гидравлической теории уровень грунтовых вод $h(x,t)$ удовлетворяет уравнению Бусинеска [1]

$$\mu \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \cdot h \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \varepsilon(h,t), \quad (1)$$

где μ – коэффициент водоотдачи (эффективная пористость), k – коэффициент фильтрации пласта.

Для упрощения исследования задачи уравнение (1) рассматривают обычно в линеаризованном виде и считают $\mu = \text{const}$, $k = \text{const}$. В теории фильтрации известны два метода (способа) линеаризации уравнения Бусинеска, так называемые первый и второй способы линеаризации [1]. В настоящей работе в отличие от этих способов уравнение (1) осуществляется раздельная линеаризация.

Методология исследования

Выше указанный фильтрационный процесс вблизи водохранилища моделируется в виде краевой задачи с неизвестной границей для дифференциального уравнения в частных производных, которое сведено к обыкновенному дифференциальному уравнению.

Полученная задача решается методом степенных рядов.

Результаты и их обсуждение

Положим:

$$a^2(x) = \begin{cases} a_1^2 = \frac{k \cdot \bar{h}_1}{\mu}, & 0 < x < l(t), \\ a_2^2 = \frac{k \cdot \bar{h}_2}{\mu}, & x > l(t), \end{cases}$$

где $\bar{h}_1$ и $\bar{h}_2$ – некоторое осредненное значение $h(x, t)$ соответственно из промежутков $[h_{kp}, h_m]$ и $[h_0, h_{kp}]$.

Постановка задачи: Найти свободную поверхность $h(x, t)$

$h(x, t) = \begin{cases} h_1(x, t), & 0 < x < l(t), \\ h_2(x, t), & x > l(t). \end{cases}$ и кривую $x = l(t)$, $l(t_0) = 0$ из следующих условий:

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} - \frac{\varepsilon_1(t)}{\mu \cdot y_0^n} (h - h_{kp}), \quad 0 < x < l(t), \quad (2)$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial t} = a_2^2 \frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2}, \quad l(t) < x < \infty, \quad (3)$$

$$h_1(x, t)|_{x=0} = h_{kp} + h_0, \quad h_1(x, t)|_{x=l(t)+0} = h_{kp}, \quad t > t_0, \quad (4)$$

$$h_2(x, t)|_{x=l(t)+0} = h_{kp}; \quad h_2(x, t)|_{x \rightarrow +\infty} = h_2(x, t)|_{t=t_0} = h_0, \quad (5)$$

$$a_1^2 \frac{\partial h_1}{\partial x} \Big|_{x=l(t)+0} = a_2^2 \frac{\partial h_2}{\partial x} \Big|_{x=l(t)+0}, \quad t > t_0, \quad (6)$$

где y_0 – критическая глубина стояния грунтовых вод, t_0 – момент времени, в котором уровень воды достигнет значения h_{kp} .

Пусть интенсивность испарения с поверхности почвы $\varepsilon_1(t)$ изменяется по закону

$$\varepsilon_1(t) = \frac{\varepsilon_0^*}{\mu_0 \cdot (t - t_0) + 1}$$

то для значения времени $t > t^*$, где t^* – достаточно большое значение времени; можно принимать $\mu_0 \cdot (t - t_0) \gg 1$, т.е.

$$\varepsilon_1(t) = \frac{\varepsilon_0}{t - t_0}, \quad \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_0^*}{\mu_0} = \text{const}. \quad (7)$$

В работе К.Жамуратова и Х.Умарова [2] доказываемость единственности обобщенного решения задачи (2) – (6), как известно класс обобщенных

решений содержит в себе множества классических решений задачи (2) – (6).

Покажем, что при законе испаряемости с поверхности почвы (7) задача (2) – (6) (движение) становится автомодельной.

Итак, полагая, $t > t^*$ переходим к автомодельным переменным. Действительно, полагая

$$\xi = \frac{x}{l(t)}, \quad h_1 - h_{kp} = h_0 \cdot u_1(\xi), \quad h_2 - h_0 = u_2(\xi) \quad (8)$$

в место (2) и (3) имеем

$$a_1^2 u_1''(\xi) + l'(t) \cdot l(t) \cdot u_1'(\xi) = 0 \quad (9)$$

$$a_2^2 u_2''(\xi) + l'(t) \cdot l(t) \xi \cdot u_2'(\xi) = 0 \quad (10)$$

Очевидно, для того, чтобы движение было автомодельным, необходимо выполнение условий

$$l'(t) \cdot l(t) = \text{const}, \quad \varepsilon_1(t) \cdot l^2(t) = \text{const}. \quad (11)$$

Отсюда ясно, что при $l(t_0) = 0$, $l(t)$ нужно искать в виде

$$l(t) = \alpha \cdot \sqrt{t - t_0}, \quad (12)$$

где α – некоторая постоянная.

Если формула (7) имеет место при $\mu_0 \cdot (t^* - t_0) \gg 1$, то равенства (11) и (12) одновременно будут справедливы для $t > t^*$.

С учетом (8), (12) задача (2) – (6) в безразменном виде примет вид:

$$u_1''(\xi) + \frac{\alpha^2}{2a_1^2} \cdot \xi \cdot u_1'(\xi) = 0, \quad \xi \in (0, 1), \quad (13)$$

$$u_1(0) = 1, \quad u_1(1) = 0. \quad (14)$$

$$u_2''(\xi) + \frac{\alpha^2}{2a_2^2} \cdot \xi \cdot u_2'(\xi) = 0, \quad 1 < \xi < +\infty, \quad (15)$$

$$h_0 \cdot a_1^2 u_1'(\xi) \Big|_{\xi=0} = a_2^2 u_2'(\xi) \Big|_{\xi=+\infty} \quad (16)$$

$$u_2|_{\xi=0} = h_{kp} - h_0 = \psi_0, \quad u_2|_{\xi \rightarrow +\infty} = 0, \quad (17)$$

$$\text{где } b_n = \varepsilon_0 h_0^{n-1} / \mu a_1^2 \gamma_0^n.$$

Решение граничной задачи (15) – (17) ищем в виде

$$u_2(\xi) = B_2 + A_2 \int_1^{\xi} e^{-\frac{\alpha^2 \lambda^2}{4a_2^2}} d\lambda.$$

Удовлетворяя условию (17) находим $B_2 = \psi_0$, $A_2 = -\frac{\psi_0}{\sqrt{\pi} a_2 \operatorname{erfc}(\alpha/2a_2)}$.

Тогда решение задачи (15) – (17) имеет вид

$$u_2(\xi) = \psi_0 \left(1 - \frac{\operatorname{erf}(\alpha/2a_2 \cdot \xi) - \operatorname{erf}(\alpha/2a_2)}{\operatorname{erfc}(\alpha/2a_2)} \right), \quad (18)$$

$$\text{где } \operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha, \quad \operatorname{erfc}(z) = 1 - \operatorname{erf}(z).$$

Для решения задачи (13), (14) рассмотрим отдельно каждый из случаев $n=0$, $n=1$, $n=2$ и $n=3$.

Случай $n=0$. В этом случае из (13), (14) имеем

$$u_1''(\xi) = -\frac{\alpha^2}{2a_1^2} u_1(\xi), \quad (19)$$

$$u_1(\xi)|_{\xi=0} = -1, \quad u_1(\xi)|_{\xi \rightarrow 0} = 0. \quad (20)$$

Полагая, $v = u'$ приходим к уравнению первого порядка. Воспользуясь условием (20) получим точное решение задачи (19), (20)

$$u_1(\xi) = 1 - \frac{1 + b_0 \alpha^2 \int_0^1 \exp\left(-\frac{\alpha^2}{4a_1^2} \lambda^2\right) \int_0^v \exp\left(\frac{\alpha^2}{4a_1^2} v^2\right) dv d\lambda}{\operatorname{erf}\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right)} \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha}{2a_1} \xi\right) + \\ + b_0 \alpha^2 \int_0^{\xi} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{4a_1^2} \lambda^2\right) \int_0^{\lambda} \exp\left(\frac{\alpha^2}{4a_1^2} v^2\right) dv d\lambda. \quad (21)$$

В случае $n=1, 2, 3$ уравнение не интегрируется в квадратурах, по этому для решение применим один из приближенных методов, например, метод степенных рядов.

Будем искать решение задачи (13), (14) для $n = 1, 2, 3$ в виде ряда по степеням $\xi - 1$

$$u_1(\xi) = u_1(1) + \frac{u_1'(1)}{1!}(\xi - 1) + \frac{u_1''(1)}{2!}(\xi - 1)^2 + \dots \quad (22)$$

В силу второго условия (14) и условия (16) два первых коэффициента ряда (22) определяются сразу

$$u_1(1) = 0, \quad u_1'(1) = -\alpha \varphi(\alpha), \quad (23)$$

$$\text{где } \varphi(\alpha) = \frac{a_2 \psi_0}{a_1^2 \sqrt{\pi} h_0} \cdot \frac{\exp\left(-\frac{\alpha^2}{4a_1^2}\right)}{\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)}.$$

Учитывая (23) из уравнения (13) определим $u_1'''(1)$

$$u_1'''(1) = \frac{\alpha^3}{2a_1^2} \varphi(\alpha). \quad (24)$$

Затем дифференцируя последовательно (13) и с учетом второго уравнения (14), равенств (23), (24) найдем остальные коэффициенты ряда (22). Очевидно, во все коэффициенты ряда входит неизвестная константа α , для нахождения которой воспользуемся первым условием (14). Тогда α для случаев $n = 1, 2, 3$ определяется как решение следующего уравнения

$$1 = -u_1'(1) + \frac{1}{2!} u_1''(1) + \frac{1}{3!} u_1'''(1) + \dots \quad (25)$$

Уравнение (25) представляет собой трансцендентное уравнение. В правой части (25) вычисляется конечный отрезок ряда, в силу этого находится приближенное значение α .

В случае $n = 0$ для нахождения α воспользуемся условием (16) и точными решениями (18) и (21). Следует отметить, что в (21) α содержится под интегралами, которые также вычисляются приближенно, поэтому и при $n = 0$ находится приближенное значение α .

Поскольку $u_1(1)=0$, то первые два коэффициента $u_1(1)$ и $u_1'(1)$ ряда (22) будут одинаковы для всех случаев $n=1,2,3$. Коэффициенты $u_1'''(1)$, $u_1^{IV}(1)$ и $u_1^V(1)$ ряда (22) для случаев $n=1,2,3$ находится указанным выше способом. Рассмотрим каждый из этих случаев отдельно.

Случай $n=1$. При этом нетрудно найти:

$$\begin{aligned} u_1'''(1) &= -\varphi(\alpha) \left[\frac{\alpha^5}{(2a_1^2)^2} + \left(b_1 - \frac{1}{2a_1^2} \right) \cdot \alpha^3 \right], \\ u_1^{IV}(1) &= \varphi(\alpha) \left[\frac{\alpha^7}{(2a_1^2)^3} + \frac{1}{2a_1^2} \left(2b_1 - \frac{3}{2a_1^2} \right) \cdot \alpha^5 \right], \\ u_1^V(1) &= \varphi(\alpha) \left[-\frac{\alpha^9}{(2a_1^2)^4} - \frac{3}{(2a_1^2)^2} \left(b_1 - \frac{3}{2a_1^2} \right) \cdot \alpha^7 + \frac{1}{2a_1^2} \left(4b_1 - \frac{3}{2a_1^2} \right) \cdot \alpha^5 - b_1^2 \alpha^3 \right]. \end{aligned}$$

Ограничиваясь пятью членами разложения (25), составим уравнение для определения α :

$$\begin{aligned} &\varphi(\alpha) \left[\frac{\alpha^9}{120 \cdot (2a_1^2)^4} - \left(b_1 - \frac{1}{6a_1^2} \right) \cdot \frac{\alpha^7}{40 \cdot (2a_1^2)^2} + \right. \\ &\left. + \left(\frac{b_1^2}{8} + \frac{359}{4a_1^2} b_1 + \frac{1}{4a_1^2} \right) \cdot \frac{\alpha^5}{15} + \left(b_1 - \frac{1}{a_1^2} \right) \frac{\alpha^3}{6} \right] = 1. \quad (26) \end{aligned}$$

Обозначим левую часть (26) через $F_1(\alpha)$, тогда

$$F_1(\alpha) = 1. \quad (27)$$

Случай $n=2$.

$$\begin{aligned} u_1'''(1) &= -\varphi(\alpha) \left[\frac{\alpha^5}{(2a_1^2)^2} - \frac{\alpha^3}{2a_1^2} \right], \\ u_1^{IV}(1) &= \varphi(\alpha) \left[\frac{\alpha^7}{(2a_1^2)^3} - \frac{3\alpha^5}{(2a_1^2)^2} + 2\varphi(\alpha) b_2 \cdot \alpha^2 \right], \\ u_1^V(1) &= -\varphi(\alpha) \left[\frac{\alpha^9}{(2a_1^2)^4} - \frac{6\alpha^7}{(2a_1^2)^3} + \frac{3\alpha^5}{(2a_1^2)^2} - \frac{5b_2\varphi(\alpha)}{2a_1^2} \alpha^6 \right]. \end{aligned}$$

Случай $n=3$.

$$u_1'''(\alpha) = -\varphi(\alpha) \left[\frac{\alpha^5}{(2a_1^2)^2} - \frac{\alpha^3}{2a_1^2} \right],$$

$$u_1^{IV}(\alpha) = \varphi(\alpha) \left[\frac{\alpha^7}{(2a_1^2)^3} - \frac{3\alpha^5}{(2a_1^2)^2} \right],$$

$$u_1^V(\alpha) = -\varphi(\alpha) \left[\frac{\alpha^9}{(2a_1^2)^4} - \frac{6\alpha^7}{(2a_1^2)^3} + \left(\frac{3}{(2a_1^2)^2} - 6b_3\varphi^2(\alpha) \right) \alpha^5 \right].$$

При этом уравнения для определения α в случаях $n=2$ и $n=3$ соответственно имеют вид

$$F_2(\alpha) = \varphi(\alpha) \left[\frac{\alpha^9}{120 \cdot (2a_1^2)^4} - \frac{\alpha^7}{120 \cdot (2a_1^2)^3} + \frac{b_2 \cdot \alpha^6 \cdot \varphi(\alpha)}{48a_1^2} + \right. \\ \left. + \frac{\alpha^5}{15 \cdot (2a_1^2)^2} + \frac{\alpha^3}{6a_1^2} + \frac{b_2 \cdot \alpha^6 \cdot \varphi(\alpha)}{12} + \alpha \right] = 1, \quad (28)$$

$$F_3(\alpha) = \varphi(\alpha) \left[\frac{\alpha^9}{120 \cdot (2a_1^2)^4} - \frac{\alpha^7}{120 \cdot (2a_1^2)^3} + \frac{b_3 \cdot \varphi^2(\alpha) \cdot \alpha^5}{20} + \frac{\alpha^3}{6a_1^2} + \alpha \right] = 1. \quad (29)$$

Наличие хотя бы одного решения рассматриваемых уравнений следует из того, что при изменении α от нуля до $+\infty$ левые уравнений для случаев $n=1, 2, 3$ изменяются от нуля до $+\infty$, а правая часть во всех уравнениях равна единице.

Применяя метод половинного деления, решены полученные уравнения при следующем наборе значений данных (характеристик) задачи (2) – (6): $\mu = 0.25$, $k = 0.5$ м/сут., $h_m = 26$ м, $h_{kp} = 21$ м, $h_0 = 4$ м, $y_0 = 5$ м, $\overline{h_1} = 23$ м, $\overline{h_2} = 20$ м, $\varepsilon_0 = 0.046$ м/сут.

При этом производные константы будут принимать следующие значения: $a_1^2 = (6.78)^2$ м²/сут., $a_2 = (6.33)^2$ м²/сут., $d_1 = 0.0194362 \frac{\sqrt{\text{сут}}}{\text{м}}$, $b_0 = 0.001$, $b_1 = 0.00097$, $b_2 = 0.00064$, $b_4 = 0.000512$, где b_i , $i = 0, 1, 2, 3$ имеют размерности сут/м².

Оказалось, что для всех уравнений разность между левой и правой частями отрицательно при $\alpha = a_2$, положительна при $\alpha = 2a_1$. Учитывая это обстоятельство мы применяли метод половинного деления для промежутка $[a_2, 2a_1]$.

Приведем алгоритм приближенного вычисления корня рассматриваемых уравнений на примере случая $n=2$. Уравнение (26) записывается в виде $f_2(\alpha) \equiv F_2(\alpha) - 1 = 0$ затем вычисляются $f_2(A)$ и $f_2(B)$, где $A = a_2$, $B = 2a_1$. Выше отмечали, что $f_2(A) < 0$ и $f_2(B) > 0$.

Разделим промежуток $[A, B]$ пополам, тогда или в конце одной половины функция $f_2(\alpha)$ будет иметь различные знаки, или же $f_2\left(\frac{A+B}{2}\right) = 0$. Если $f_2\left(\frac{A+B}{2}\right) = 0$, то за решение уравнения принимается $\alpha = \frac{A+B}{2}$. В противном случае разделим пополам ту половину, в конце которой функция $f_2(\alpha)$ имеет разные знаки. Продолжим этот процесс до выполнения $|A_m - B_m| < \varepsilon$, где A_m и B_m концы половины отрезка с разными знаками на m -ом шаге, ε – заданная малая величина. При этом за приближенное решение (корня) уравнения принимается $\alpha = \frac{1}{2}(A_m + B_m)$.

При указанном выше наборе входных данных, получены следующие значения α в зависимости от $n = 0, 1, 2, 3$.

n	0	1	2	3
α	11.7439	12.1411	12.4648	13.5599

Видно, что скорость продвижения границы раздела будет расти с увеличением показателя ε от $h - h_{кр}$.

При известном значении α нетрудно вычислять u_1 , по конечному отрезку ряда (25), а u_2 – по формуле (18), причем граница раздела $l(t)$ определяется по формуле (12).

Знание границы $l(t)$ при определенном значении времени позволит нам, определять полосу вблизи водохранилища (каналов) шириной $x = l(t)$,

которая может подвергаться засолению или заболачиванию и принять необходимые меры предотвращения.

Выводы

Найдено приближенно – аналитическое решение одной задачи фильтрации с учетом испарения. Разработан алгоритм нахождения границы раздела двух областей в одной из которых происходит испарение а в другой отсутствует.

Литература

1. Полубаринова – Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука. 1994. с 664.
2. Жамуратов К., Умаров Х. Обобщенное решение одной краевой задачи с неизвестной границей // Тезисы докладов Республиканской научной конференции с участием ученых из стран СНГ «Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения» Ташкент. 2013. с. 144 – 146.
3. С.Ф.Аверьянов. Влияние оросительных систем на режим грунтовых вод. Москва : Изд-во Акад. наук СССР, 1956.
4. K.Zhamuratov, X.Umarov, A.Dodobayev, Drainage of a Semi-infinite Aquifer in the Presence of Evaporation // International Scientific and Practical Conference on Actual Problems of Mathematical Modeling and Information Technology, AIP Conf. Proc. 3147, 030036-1 - 030036-6, (2024), <https://doi.org/10.1063/5.02102>.
5. Jamuratov K., Umarov X., Mirzayeva X. Дренаживание полу бесконечного водоносного горизонта при наличии испарения, “Ilm sarchashmalari” (UrDU) ilmiy jurnali, 5/1.2023, 24-28 betlar.
6. Жамуратов К., Умаров Х. К приближенному решению одной задачи теории фильтрации для малых значений времени, Научный вестник НамГУ- 2024-yil_2-son, стр. 72-78. ISSN: 2181-0427.