

Мавлонов Тулкин, Национальный исследовательский университет
«Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского
хозяйства», доктор технических наук, профессор, E-mail:
baxtiyor_yuldashev68@mail.ru

Юлдошев Бахтиёр Шодмонович, Национальный исследовательский
университет «Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации
сельского хозяйства», доктора философии (PhD) по техническим наукам,
доцент, E-mail: baxtiyor_yuldashev68@mail.ru

Райимов Абдурахмон Одилжонович, Национальный исследовательский
университет «Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации
сельского хозяйства», докторант, E-mail: rayimovabduraxmon@gmail.com

УДК: 539.411

КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ С ВЯЗКОУПРУГИМИ СВОЙСТВАМИ

Аннотация. Настоящая статья посвящена к исследованию поперечных колебаний стержней. На основе принципа Гамильтона выведено уравнения поперечных колебаний стержней. При этом зависимость между напряжениями и деформацией принято в виде интегральных соотношений Больцмана-Вольтерра. Вид ядра R , входящий в математической модель Больцмана-Вольтерра существенной степени отделяет как поведение модели материала, так и возможности применения тех или иных методов решения задач. В данной работе в качестве ядро релаксации принято трехпараметрическое ядро Ржаницына-Колтунова.

При этом интегральные члены в наследственных соотношениях Больцмана-Вольтерра как правило малы по сравнению с мгновенными упругими слагаемыми, что в совокупности с предположением о колебательном характере движения позволяет применить известную процедуру "замораживания" интегральных членов, которая и приводит к комплексным физическим соотношениям. Проведен численный анализ полученных результатов.

Ключевые слова: стержен, деформация, напряжения, модел, метод конечные элементы, упругость, упруго-пластичность, динамическая нагрузка.

Mavlonov To‘lqin
«Toshkent irrigatsiya va qishloq xo‘jaligini mexanizatsiyalash muhandislari
instituti» Milliy tadqiqot universiteti, Professor
Yuldoshev Baxtiyor Shodmonovich
«Toshkent irrigatsiya va qishloq xo‘jaligini mexanizatsiyalash muhandislari
instituti» Milliy tadqiqot universiteti, Dotsent

Rayimov Abduraxmon Odiljon o'g'li
«Toshkent irrigatsiya va qishloq xo'jaligini mexanizatsiyalash muhandislari
instituti» Milliy tadqiqot universiteti, Doktorant

QOVUSHQOQ ELASTIK XUSUSIYATIGA EGA BO'LGAN STERJENLARNING TEBRANMA HARAKATI

Annotatsiya. Ushbu maqola sterjenlarning ko'ndalang tebranishlarini o'rganishga bag'ishlangan. Gamilton prinsipi asosida sterjenlarning ko'ndalang tebranishlari tenglamasi keltirib chiqarilgan. Bunda kuchlanish va deformatsiya orasidagi bog'lanish Bolsman-Volterra integral munosabatlari ko'rinishida qabul qilingan. Bolsman-Volterra matematik modeliga kiruvchi R yadrosining ko'rinishi material modelining o'zini tutishini ham, masalalarni yechishning u yoki bu usullarini qo'llash imkoniyatlarini ham sezilarli darajada ajratib turadi. Ushbu ishda relaksatsiya yadrosi sifatida uch parametrlili Rjanitsin-Koltunov yadrosi qabul qilingan.

Bunda Bolsman-Volterra irsiy munosabatlaridagi integral hadlar, odatda, oniy elastik qo'shiluvchilarga nisbatan kichik bo'ladi, bu esa harakatning tebranma xarakteri haqidagi faraz bilan birgalikda integral hadlarni "muzlatish"ning ma'lum protsedurasini qo'llashga imkon beradi, bu esa kompleks fizik munosabatlarga olib keladi. Olingan natijalarning sonli tahlili o'tkazilgan.

Kalit so'zlar: sterjen, deformatsiya, kuchlanish, model, usul chekli elementlar, elastiklik, elastik-plastiklik, dinamik yuklanish.

Mavlonov To'lqin
«Tashkent institute of irrigation and agricultural mechanization engineers» National
research university, Professor
Yuldoshev Baxtiyor Shodmonovich
««Tashkent institute of irrigation and agricultural mechanization engineers»
National research university, Associate Professor
Rayimov Abduraxmon Odiljon o'g'li
«Tashkent institute of irrigation and agricultural mechanization engineers» National
research university, Doctoral student

VIBRATIONS OF STERGES WITH VISCO-PLUNG PROPERTIES

Abstract. This article is devoted to the study of transverse vibrations of rods. The equations of transverse vibrations of rods are derived on the basis of Hamilton's principle. In this case, the relationship between stress and strain is assumed to be the Boltzmann-Volterra integral relations. The type of R core included in the mathematical Boltzmann-Volterra model significantly separates both the behavior of the material

model and the possibilities of applying certain methods of solving problems. In this paper, the three-parameter Rzhanitsyn-Koltunov kernel is used as the relaxation kernel.

At the same time, the integral terms in the hereditary Boltzmann-Volterra relations are usually small compared to the instantaneous elastic terms, which, together with the assumption of the oscillatory nature of motion, allows us to apply the well-known procedure of "freezing" integral terms, which leads to complex physical relations. A numerical analysis of the obtained results is carried out.

Key words: rod, deformation, strain, model, Method finite elements, elasticity, elastic-plasticity, dynamic loading.

Введение

Дифференциальное уравнение поперечных колебаний выведем на основе принципа Гамильтона, которые подробно описаны в известной работе [1]. При этом в отличие от [1] зависимость между напряжениями и деформацией принято в виде интегральных соотношений Больцмана-Вольтерра.

Самой общей линейной теорией, наиболее полно отражающей практически все особенности квазистатического и динамического поведения вязкоупругих материалов, является теория Больцмана-Вольтерры, согласно которой зависимость между напряжениями и деформациями имеет вид:

$$\sigma(t) = E \dot{\epsilon} + R * \epsilon \quad (1)$$

где σ - напряжение, ϵ - деформации, t - время наблюдения, $0 \leq \tau \leq t$ - промежуточный момент, Мгновенный модуль Юнга, R – функция памяти или ядро релаксации. Вид ядра R в существенной степени отделяет как поведение модели материала, так и возможности применения тех или иных методов решения задач для материалов, моделируемых с помощью соотношения (1). Если функция R имеет вид экспоненты или суммы экспонент, то соотношения (1) приводятся к дифференциальным соотношениям, порядок которых равен числу экспонент в указанной сумме. Наиболее адекватно описывают поведение вязкоупругих материалов слабо сингулярные наследственности, из которых отметим ядро Бронского А.П.

$$R(t-\tau) = \frac{\alpha \lambda e^{-(t-\tau)^\alpha}}{(t-\tau)^{1-\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (1.1)$$

Степенное ядро

$$K(t-\tau) = \frac{\beta}{(\alpha)(t-\tau)^{1-\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (1.2)$$

Для решение поставленных в данной работе задач было использовано ядро Колтунова М.А. Ржаницына А.Р.

$$R(t-\tau) = \frac{A e^{-\beta(t-\tau)}}{(t-\tau)^\alpha} \quad (1.3)$$

которое, с одной стороны, весьма удовлетворительно отражает как квазистатическое [2], так и динамическое поведение материалы с другой стороны, наиболее удобно при проведении квазистатических и с другой стороны, наиболее удобно при проведении квазистатических и динамических расчетов и определении механических колебаний [3].

При этом интегральные члены в наследственных соотношениях вида (1.1) как правило малы по сравнению с мгновенными упругими слагаемыми, что в совокупности с предположением о колебательном характере движения позволяет применить известную [4] процедуру "замораживания" интегральных членов, которая и приводит к следующим комплексным физическим соотношениям [5].

Полагая, что физические соотношения материала могут быть описаны в направлении комплексными значениями модуля упругости [3].

$$E = E_R + i E_s \quad (2)$$

коэффициента Пуассона:

$$\nu = \nu_R + i \nu_s \quad (3)$$

Связь между напряжениями и деформациями для стержня из вязкоупругого материала имеет вид (1)

Рассмотрим интеграл $I = \int_D^t R(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau$. Считая, что входящие в этот интеграл функции времени можно представить виде $\varphi(t) = \psi(t) e^{-i\omega R t}$ где $\psi(t)$ – медленно меняющаяся функция времени, а - действительная константа, и учитывая малость интегральных членов в наследственных соотношениях, получаем

$$I = \int_D^t R(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau = \int_D^t R(t-\tau) \psi(\tau) e^{-i\omega_R \tau} d\tau \approx \psi(t) \int_D^t R(t-\tau) e^{-i\omega_R \tau} d\tau \approx \psi(t) \int_D^t R(t-\tau) e^{-i\omega_R \tau} d\tau \approx \psi(t) \int_D^t R(t-\tau) d\tau \quad (5)$$

Проведенная процедура "замораживания" интегральных членов в наследственных соотношениях и переход к бесконечному пределу интегрирования позволяют записать для амплитудных значений следующие выражения;

$$\tilde{E} = E(1 - \Gamma_{11c} + i\Gamma_{11s}) \quad (6)$$

Величины Γ_{11c} и Γ_{11s} являются косинус и синус - преобразованиями Фурье ядра $R(t)$:

$$\Gamma_{11c} = \int_D^\infty R_{11}(\tau) \cos \omega_R \tau d\tau, \quad \Gamma_{11s} = \int_D^\infty R_{11}(\tau) \sin \omega_R \tau d\tau \quad (7)$$

В частном случае, дифференциальное уравнение поперечных колебаний стержня сводится к простейшему виду

$$c^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0; \quad c^2 = \frac{E J}{\rho} \quad (8)$$

Уравнению (7) соответствует два начальных условия

$$w(x, 0) = f(x); \quad \dot{w}(x, 0) = g(x), \quad (9)$$

определяющие положения и скорости перемещений в начальный момент, а также четыре граничных условия, зависящие от характеристики опор.

Для решение поставленной задачи воспользуемся методикой «замораживания» в сочетании с известным методом Бубнова-Галеркина.

В качестве примера рассмотрим стержень с одним закрепленным ($x=0$) и с другим защемленным концами ($x=l$). Для этих условий закрепления стержня имеем:

$$\text{при } x=0 \quad w(0, t)=0; \quad \frac{\partial w(0, t)}{\partial x}=0 \quad \text{и при } x=l \quad w(l, t)=0; \quad \frac{\partial^2 w(l, t)}{\partial x^2}=0. \quad (10)$$

В (8) полагая $w=w(x)e^{i\lambda t}$, получаем характеристическое уравнение для определения k :

$$k^2 - \lambda^2 = 0$$

откуда $k_{1,2} = \pm \sqrt{\lambda} = \pm \lambda_0$; $k_{3,4} = \pm i \sqrt{\lambda} = \pm i \lambda_0$, где $\lambda_0 = \sqrt{\lambda}$. Каждому корню k соответствует частное решение (7). В результате получаем решение однородного уравнения. Отсюда можно утверждать, что любая функция, являющаяся линейной комбинацией частных решений k_{ij} , является решением поставленной задачи. Из-за произвольности комбинации можно построить такое решение, при котором без труда определить произвольные постоянные c_j . Наиболее приемлемым функциям при этом можно отнести функции Крылова K_i . Следует отметить, что эта функция широко применяется в расчетной практике и имеют вид:

$$K_1 = 0.5 \text{ch}(\lambda \text{sh}(\lambda)) \quad K_2 = 0.5 \text{sh}(\lambda \text{ch}(\lambda)) \quad (11)$$

$$K_3 = 0.5 \text{ch}(\lambda \text{ch}(\lambda)) \quad K_4 = 0.5 \text{sh}(\lambda \text{sh}(\lambda))$$

В этом случае решение уравнения (7) можно представить в виде

$$W = \sum_{i=1}^4 c_i K_i \quad (12)$$

Из первых двух краевых условий имеем, что $c_1 = c_2 = 0$. Из остальных двух краевых условий получаем два уравнения:

$$c_3 K_3(1, \lambda) + c_4 K_4(1, \lambda) = 0; \quad (13)$$

$$c_3 K_1(1, \lambda) + c_4 K_2(1, \lambda) = 0.$$

Приравнявая далее определитель этой системы нулю, получим трансцендентное уравнение, из которого определяются последовательные значения частот.

$$D = \begin{vmatrix} K_3(1, \lambda) & K_4(1, \lambda) \\ K_1(1, \lambda) & K_2(1, \lambda) \end{vmatrix} = 0 \quad (14)$$

$$\text{ch}(\lambda \text{sh}(\lambda) \sin(\lambda \text{ch}(\lambda)) - \text{sh}(\lambda \text{ch}(\lambda)) \cos(\lambda \text{sh}(\lambda))) = 0 \quad (15)$$

Из (14) находим λ

$$\lambda_{01} = 3.926; \lambda_{02} = 7.068; \lambda_{03} = 10.2101; \lambda_{04} = 13.3517; \lambda_{05} = 16.4934$$

Размерные частоты при этом принимают соответственно следующие

значения: $p_1 = 8.619 \quad p_2 = 27.931 \quad p_3 = 58.174 \quad p_4 = 99.656 \quad p_5 = 152.071$

Зная частоты колебаний далее можно построить форму колебаний.

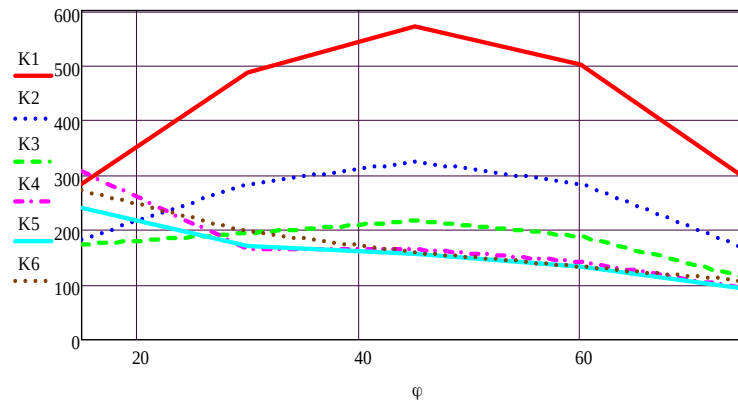


Рис. 1. Формы колебаний в зависимости от угла конусности для различных значений тона колебаний (1-m=3; 2-m=4; 3-m=5; 5-m=6; 6-m=7)

Аналогично [6] при учете вязкоупругих свойств материала стержня из систем уравнений (12) можно определить собственные функции, которые могут быть использованы при приближенных решениях общих уравнений колебания стержней с переменным сечением а также стержней, находящихся в потоке воздуха или жидкости.

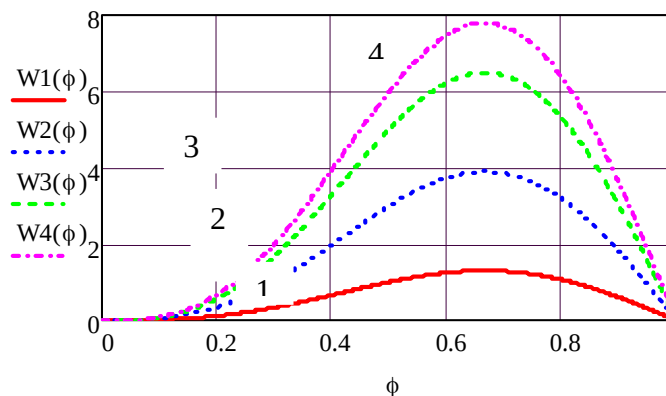


Рис.2. Кривые зависимости формы колебаний от коэффициента $\theta = x/l$

На примере стержня предложена методика определения собственных частот и формы колебаний. Предложенную методику можно распространит для решения более сложных задач динамики стержневых элементов конструкции.

Заключение

На основе полученных результатов можно сделать следующие выводы:

1. Для учета вязкоупругих свойств использована предложена модель в виде интегральных соотношений Больцмана-Вольтерра.

2. Установлено, что любая функция, являющаяся линейной комбинацией частных решений k_{ij} , является решением поставленной задачи.
3. Полученное решение позволяет утверждать, что наиболее приемлемым функциями, являющиеся решением поставленной задачи является функции Крылова

Литература

1. Светлицкий В.А. Механика гибких стержней и нитей. М., 1982 г., 222 с.
2. Колтунов М.А. Ползучесть и релаксация - М.: Высшая школа, 1976.-277 с.
3. Мавланов Т. Динамика вязкоупругих осесимметричных и призматических конструкций. Расчеты на прочность, 1988, Машиностроение, 186-199 с.
4. Филатов А.Н. Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. Ташкент, ФАН, 1974-216 с.
5. Майборода В.П. К вопросу применимости функций влияния, определяемых из квазистатических опытов для решения динамических задач вязкоупругости//. Механика полимеров, № 3, 1974-стр.537-540.
6. Светлицкий В.А. Механика стержней, Учебник для вузов. М.: Высшая школа, 1987 г., 304 с. Динамика.