

Хамитов Азизбек Ахмаджон угли
Наманганский инженерно-строительный
институт докторант(Phd)

E-mail: azizbek.khamitov.93@mail.ru

Тел: +99899 694 0193

УДК 517.954

О РЕШЕНИЕ ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ В ТРЁХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Аннотация: В данной работе рассматривается вторая краевая задача для неоднородного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в трехмерном пространстве. Единственность решение поставленной задачи доказана методом интегралов энергии, а существование решения доказана методом разделения переменных.

Ключевые слова: Уравнения с кратными характеристиками, краевая задача, собственное значение, собственная функция, функциональный ряд, абсолютная и равномерная сходимость.

Xamitov Azizbek Axmadjon o'g'li
Namangan muhandislik-qurilish
instituti doktoranti(PhD)

E-mail: azizbek.khamitov.93@mail.ru

UCH O'LCHOVLI FAZODA UCHINCHI TARTIBLI KARRALI XARAKTERISTIKALI BIR JINSLI BO'LMAGAN TENGLAMA UCHUN IKKINCHI CHEGARAVIY MASALANI YECHISH HAQIDA

Annotatsiya: Ushbu ishda uch o'lchovli fazoda uchinchi tartibli karrali xarakteristikali bir jinsli bo'lmagan tenglama uchun qo'yilgan ikkinchi chegaraviy masala o'rganilgan. Qo'yilgan masala yechimini yagonaligi integral energiya usuli yordamida isbotlangan, mavjudligi esa o'zgaruvchilarni ajratish usuli bilan isbotlangan.

Kalit so'zlar: Karrali xarakteristikali tenglama, chegaraviy masala, xos son, xos funksiya, funksional qator, absolyut va tekis yaqinlashish.

Khamitov Azizbek Akhmadjon ugli

Namangan Engineering-Construction Institute

doctoral student(PhD)

E-mail: azizbek.khamitov.93@mail.ru

ON THE SOLUTION OF THE SECOND BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A THIRD-ORDER INHOMOGENEOUS EQUATION WITH MULTIPLE CHARACTERISTICS IN THREE-DIMENSIONAL SPACE

Annotation: This work considers the second boundary value problem for a third-order inhomogeneous equation with multiple characteristics in three-dimensional space. The uniqueness of the solution to the problem is proven by the method of energy integrals, and the existence of the solution is proven by the process of separation of variables.

Key words: Equation with multiple characteristics, boundary value problem, eigenvalue, eigenfunction, functional series, absolute and uniform convergence.

I. Введение

Дифференциальные уравнения в частных производных третьего порядка рассматриваются при решении задач теории нелинейной акустики и в гидродинамической теории космической плазмы, фильтрации жидкости в пористых средах [1].

В работе [2], учитывая свойства вязкости и теплопроводности газа, из системы Навье-Стокса было получено уравнение третьего порядка с кратными характеристиками, содержащее вторую производную по времени

$$u_{xxx} + u_{yy} - \frac{\nu}{y} u_y = u_x u_{xx}, \quad \nu = \text{const.}$$

Это уравнение при $\nu = 1$ описывает осесимметричный поток, а при $\nu = 0$ описывает плоско - параллельный поток [3].

Первоначальные результаты по уравнению третьего порядка с кратными характеристиками были получены в работах Н. Block [4], E. Del Vecchio [5].

L. Catabriga в работе [6] для уравнения $D_x^{2n+1}u - D_y^2u = 0$ построил фундаментальное решение в виде двойного несобственного интеграла и изучил свойства потенциала, решил краевые задачи.

В работах [7-8] построены фундаментальные решения уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, содержащие вторые производные по времени, выраженные через конфлюэнтные гипергеометрические функции, изучены их свойства, найдены оценки при $|t| \rightarrow \infty$.

В работе [9] в плоскости исследована вторая краевая задача для уравнения третьего порядка с младшими членами.

В работах [10-11] рассмотрены краевые задачи для уравнения четвертого порядка в трехмерном пространстве.

II. Постановка задачи

В области $D = \{(x, y, z): 0 < x < p, 0 < y < q, 0 < z < r\}$ рассмотрим следующее уравнение третьего порядка вида

$$L[u] \equiv \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z), \quad (1)$$

где $p, q, r \in R^+$ и для него исследуем следующую задачу.

Задача B. Найти решение уравнения (1) в области D из класса $C_{x,y,z}^{3,2,2}(D) \cap C_{x,y,z}^{2,1,1}(\overline{D})$, удовлетворяющее краевым условиям:

$$u_y(x, 0, z) = u_y(x, q, z) = 0, \quad u_z(x, y, 0) = u_z(x, y, r) = 0, \quad (2)$$

$$\begin{cases} au(0, y, z) + bu_{xx}(0, y, z) = \psi_1(y, z), \\ cu(p, y, z) + du_{xx}(p, y, z) = \psi_2(y, z), \\ u_x(p, y, z) = \psi_3(y, z), \end{cases} \quad (3)$$

где $a, b, c, d \in R \setminus \{0\}$, а $f(x, y, z)$, $\psi_i(y, z)$, $i = \overline{1, 3}$ – заданные достаточно гладкие функции, причем

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \psi_i(0, z)}{\partial y} = \frac{\partial \psi_i(q, z)}{\partial y} = 0, \frac{\partial^4 \psi_i(y, 0)}{\partial y^3 \partial z} = \frac{\partial^4 \psi_i(y, r)}{\partial y^3 \partial z} = 0, \\ \frac{\partial \psi_i(y, 0)}{\partial z} = \frac{\partial \psi_i(y, r)}{\partial z} = 0, \frac{\partial^4 \psi_i(0, z)}{\partial y \partial z^3} = \frac{\partial^4 \psi_i(q, z)}{\partial y \partial z^3} = 0, \quad i = \overline{1, 3}. \\ \frac{\partial f(x, 0, z)}{\partial y} = \frac{\partial f(x, q, z)}{\partial y}, \frac{\partial f(x, y, 0)}{\partial z} = \frac{\partial f(x, y, r)}{\partial z} = 0, \end{array} \right. \quad (4)$$

III. Единственность решения

Теорема 1. Если задача B имеет решение, то при выполнении условий $ab > 0, cd < 0$, оно единственно.

Доказательство. Предположим обратное, пусть задача B имеет два различные решения $u_1(x, y, z)$ и $u_2(x, y, z)$. Тогда функция $u(x, y, z) = u_1(x, y, z) - u_2(x, y, z)$ удовлетворяет однородному уравнению (1) с однородными краевыми условиями. Докажем, что $u(x, y, z) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

Для этого уравнения (1) умножим на u , тогда имеем

$$u L[u] \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left(u u_{xx} - \frac{1}{2} u_x^2 \right) - \frac{\partial}{\partial y} (u u_y) + u_y^2 - \frac{\partial}{\partial z} (u u_z) + u_z^2 = 0. \quad (5)$$

Интегрируя тождество (5) по области D и учитывая однородные краевые условия, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^q \int_0^r u_x^2(0, y, z) dy dz - \frac{d}{c} \int_0^q \int_0^r u_{xx}^2(p, y, z) dy dz + \frac{b}{a} \int_0^q \int_0^r u_{xx}^2(0, y, z) dy dz + \\ + \iiint_D u_y^2(x, y, z) dx dy dz + \iiint_D u_z^2(x, y, z) dx dy dz = 0. \end{aligned}$$

Если $ab > 0, cd < 0$, из четвертого и пятого слагаемого, т.е. $u_y(x, y, z) = 0$ и $u_z(x, y, z) = 0$, получим $u(x, y, z) = h(x)$, здесь $h(x)$ является произвольной функцией, удовлетворяющей условиям задачи.

Поставляя в уравнение (1), имеем $h'''(x)=0$. Отсюда, $h(x)=C_1x^2+C_2x+C_3$, из условия (3), получим

$$\begin{cases} 2bC_1 + aC_3 = 0, \\ (cp^2 + 2d)C_1 + cpC_2 + cC_3 = 0, \\ 2pC_1 + C_2 = 0. \end{cases}$$

Основной определитель этой системы равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2b & 0 & a \\ cp^2 + 2d & cp & c \\ 2p & 1 & 0 \end{vmatrix} = -acp^2 + 2ad - 2bc.$$

Пусть $\Delta = 0$, т.е. $-acp^2 + 2ad - 2bc = 0 \Rightarrow p^2 = 2\left(\frac{d}{c} - \frac{b}{a}\right)$, учитывая условия $ab > 0, cd < 0$ и $p > 0$, получим $p^2 < 0$, а это невозможно, значит $\Delta \neq 0$. Тогда $C_1 = C_2 = C_3 = 0$, получим $h(x) = 0$. Следовательно, $u(x, y, z) \equiv 0$, $(x, y, z) \in \bar{D}$. В силу последнего, получим $u_1(x, y, z) = u_2(x, y, z)$.

Теорема 1 доказана.

IV. Существование решения

Теорема 2. Если выполняются следующие условия:

- 1) $\frac{\partial^6 \psi_i(y, z)}{\partial y^3 \partial z^3} \in C(0 \leq y \leq q, 0 \leq z \leq r), i = \overline{1, 3}$;
- 2) $\frac{\partial^5 f(x, y, z)}{\partial x \partial y^2 \partial z^2} \in C(0 \leq x \leq p, 0 \leq y \leq q, 0 \leq z \leq r)$,

и (4), то решение задачи B существует.

Доказательство. С целью доказательства существования решение задачи B ищем в виде

$$u(x, y, z) = X(x)V(y, z). \quad (6)$$

Поставляя (6) в уравнение (1) и разделяя переменные, для $V(y, z)$ имеем следующую задачу:

$$\begin{cases} V_{yy} + V_{zz} + \lambda V = 0, \\ V_y(0, z) = V_y(q, z) = 0, \\ V_z(y, 0) = V_z(y, r) = 0, \end{cases} \quad (7)$$

где λ - параметр разделения.

Нетривиальные решения задачи (7), существуют только при

$$\lambda_{n,m} = \left(\frac{n^2}{q^2} + \frac{m^2}{r^2} \right) \pi^2, \quad n, m = 0, 1, 2, \dots$$

Эти числа являются собственными значениями задачи (7), а соответствующие им собственные функции имеют вид:

$$V_{n,m}(y, z) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{qr}}, & \text{если } n = m = 0, \\ A_{n,m} \cos \frac{n\pi y}{q} \cos \frac{m\pi z}{r}, & \text{если } n^2 + m^2 \neq 0, \end{cases} \quad n, m = 0, 1, 2, \dots, \quad (8)$$

здесь

$$A_{n,m} = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{qr}}, & \text{при } n = 0, m \in N \text{ и } n \in N, m = 0, \\ \frac{2}{\sqrt{qr}}, & \text{при } n, m \in N. \end{cases}$$

Отметим, что система собственных функций (8) задачи (7) является полной и ортонормированной в пространстве $L_2(0 < y < q, 0 < z < r)$ [12-13].

Разложим $f(x, y, z)$ в ряд Фурье по $\{V_{n,m}(y, z)\}$:

$$f(x, y, z) = \sum_{n,m=0}^{+\infty} f_{n,m}(x) V_{n,m}(y, z),$$

где
$$f_{n,m}(x) = \int_0^q \int_0^r f(x, y, z) V_{n,m}(y, z) dy dz.$$

Интегрируя функцию $f_{n,m}(x)$ по частям и учитывая условия (4), имеем оценку

$$|f_{n,m}(x)| \leq M \frac{|F_{n,m}(x)|}{n^2 m^2}, \quad (9)$$

здесь

$$M = \left(\frac{qr}{\pi^2} \right)^2, \quad F_{n,m}(x) = \int_0^q \int_0^r \frac{\partial^4 f(x, y, z)}{\partial y^2 \partial z^2} V_{n,m}(y, z) dy dz.$$

В дальнейшем максимальное значение всех найденных положительных известных чисел в оценках будем обозначать через M .

Решение задачи B ищем в виде

$$u(x, y, z) = \sum_{n,m=0}^{+\infty} X_{n,m}(x) Y_{n,m}(y, z). \quad (10)$$

Поставляя (10) в уравнение (1), учитывая граничные условия (3), получим следующую задачу:

$$\begin{cases} X_{n,m}'''(x) + \lambda_{n,m} X_{n,m}(x) = f_{n,m}(x), \\ aX_{n,m}(0) + bX_{n,m}''(0) = \psi'_{1n,m}, \\ cX_{n,m}(p) + dX_{n,m}''(p) = \psi'_{2n,m}, \\ X_{n,m}'(p) = \psi'_{3n,m}, \end{cases} \quad (11)$$

$$\psi'_{in,m} = \int_0^q \int_0^r \psi'_i(y, z) V_{n,m}(y, z) dy dz, \quad i = \overline{1, 3}.$$

где

Применяя интегрирование по частям к $\psi'_{in,m}$ с учетом условия (4), получаем оценку

$$|\psi'_{in,m}| \leq M \frac{|\Psi_{in,m}|}{n^3 m^3}, \quad (12)$$

здесь

$$\Psi_{in,m} = \int_0^q \int_0^r \frac{\partial^6 \psi'_i(y, z)}{\partial y^3 \partial z^3} V_{n,m}(y, z) dy dz.$$

Сначала, ищем решение задачи (11), при $n = m = 0$, т.е. $\lambda_0 = 0$. Оно имеет вид:

$$X_0(x) = \rho_0(x) + \int_0^p G_0(x, \xi) f_0(\xi) d\xi,$$

где

$$\rho_0(x) = \frac{1}{ap^2 + 2b} \left[(x - p)^2 \psi'_{10} + \frac{2apx - ax^2 + 2b}{c} \psi'_{20} + (x - p)(apx + 2b) \psi'_{30} \right],$$

$$G_0(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} \left[(2ad\xi + (2bc - acp\xi)(p - \xi))x - \left(ad + \frac{1}{2}ac(\xi^2 - p^2) \right) x^2 + \right. \\ \left. + 2bd + bc(\xi^2 - p^2) \right], \text{ при } 0 \leq x < \xi, \\ \frac{1}{\Delta} \left(b + \frac{1}{2}a\xi^2 \right) \left[cx(2p - x) + 2d - cp^2 \right], \text{ при } \xi < x \leq p, \end{cases}$$

$$\Delta = 2ad - acp^2 - 2bc.$$

Равенство $\Delta \neq 0$, установлено в доказательстве теоремы 1.

Тогда решение задачи B получим в виде

$$u_0(x) = \frac{1}{\sqrt{qr}} \left[\rho_0(x) + \int_0^p G_0(x, \xi) f_0(\xi) d\xi \right]. \quad (13)$$

Из (13) имеем

$$|u_0(x)| = \left| \frac{1}{\sqrt{qr}} \left[\rho_0(x) + \int_0^p G_0(x, \xi) f_0(\xi) d\xi \right] \right| \leq M \left[|\psi'_{10}| + |\psi'_{20}| + |\psi'_{30}| \right] \leq M,$$

$$|u_0''(x)| \leq M.$$

Переходим к исследованию решения задачи при $n^2 + m^2 \neq 0$, т.е.

$\lambda_{n,m} = \left(\frac{n^2}{q^2} + \frac{m^2}{r^2} \right) \pi^2$, $n, m = 0, 1, 2, \dots$. Решение задачи (11) находим методом построения функции Грина, для этого с помощью функции

$$U_{n,m}(x) = X_{n,m}(x) - \rho_{n,m}(x), \quad (14)$$

изменим граничные условия на однородные.

Функция $\rho_{n,m}(x)$ имеет вид

$$\rho_{n,m}(x) = \frac{1}{ap^2 + 2b} \left[(x - p)^2 \psi'_{1n,m} + \frac{2apx - ax^2 + 2b}{c} \psi'_{2n,m} + (x - p)(apx + 2b) \psi'_{3n,m} \right]. \quad (15)$$

Подставляя (14), (15) в (11) получим задачу

$$\begin{cases} U''_{n,m}(x) + \lambda_{n,m} U_{n,m}(x) = \lambda_{n,m} g_{n,m}(x), \\ aU_{n,m}(0) + bU''_{n,m}(0) = 0, \\ cU_{n,m}(p) + dU''_{n,m}(p) = 0, \\ U'_{n,m}(p) = 0, \end{cases} \quad (16)$$

здесь

$$g_{n,m}(x) = -\frac{1}{ap^2 + 2b} \left[(x-p)^2 \psi'_{1n,m} + \frac{2apx - ax^2 + 2b}{c} \psi'_{2n,m} + (x-p)(apx + 2b) \psi'_{3n,m} \right] + \frac{f_{n,m}(x)}{\lambda_{n,m}}.$$

Учитывая (11), (14) и $\lambda_{n,m} = \left(\frac{\pi n}{q} \right)^2 + \left(\frac{\pi m}{r} \right)^2 \geq \frac{2\pi^2}{qr} nm, \quad n, m \in N$, тогда имеем оценки

$$\begin{aligned} |g_{n,m}(x)| &\leq \frac{M}{n^3 m^3} \left(\sum_{i=1}^3 |\Psi_{in,m}| + |F_{n,m}(x)| \right), \\ |g'_{n,m}(x)| &\leq \frac{M}{n^3 m^3} \left(\sum_{i=1}^3 |\Psi_{in,m}| + |F'_{n,m}(x)| \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Решение задачи (16) ищем в виде:

$$U_{n,m}(x) = \lambda_{n,m} \int_0^p G_{n,m}(x, \xi) g_{n,m}(\xi) d\xi, \quad (18)$$

здесь $G_{n,m}(x, \xi)$ функция Грина задачи (16) и имеет следующий вид:

$$G_{n,m}(x, \xi) = \begin{cases} G_{1n,m}(x, \xi), & 0 \leq x < \xi, \\ G_{2n,m}(x, \xi), & \xi < x \leq p, \end{cases} \quad (19)$$

здесь

$$\begin{aligned}
G_{1n,m}(x, \xi) = & \frac{2}{3k_{n,m}^2 \bar{\Delta}} \left[e^{-k_{n,m} \left| \frac{1}{2} \xi + x \right|} \left(\left(\frac{ad}{k_{n,m}^2} - \frac{ac}{k_{n,m}^4} \right) \sin \left(\beta_{n,m} \xi + \frac{\pi}{6} \right) + \left(\frac{bc}{k_{n,m}^2} - bd \right) \cos \beta_{n,m} \xi \right) - \right. \\
& - e^{k_{n,m} \left| \frac{1}{2} \xi - \frac{3}{2} p - x \right|} \left(\left(\frac{bc}{k_{n,m}^2} - \frac{ad}{k_{n,m}^2} \right) \cos \beta_{n,m} p - \frac{ac}{k_{n,m}^4} \sin \left(\beta_{n,m} p + \frac{\pi}{6} \right) + bd \cos \left(\beta_{n,m} p + \frac{\pi}{3} \right) \right) + \\
& + e^{\frac{1}{2} k_{n,m} (x - \xi)} \left(\frac{a}{k_{n,m}^2} + b \right) \left(\frac{c}{k_{n,m}^2} - d \right) \sin \left(\beta_{n,m} (\xi - x) + \frac{\pi}{6} \right) - \\
& - e^{-k_{n,m} \left| \frac{1}{2} \xi - \frac{3}{2} p + \frac{1}{2} x \right|} \left(\frac{a}{k_{n,m}^2} + b \right) \left(\frac{c}{k_{n,m}^2} \sin \left(\beta_{n,m} (p - x) + \frac{\pi}{6} \right) + d \cos \beta_{n,m} (p - x) \right) + \\
& + e^{-\frac{1}{2} k_{n,m} (\xi + 3p - x)} \left(\left(\frac{a}{k_{n,m}^2} \sin \left(\beta_{n,m} \xi + \frac{\pi}{6} \right) - b \cos \beta_{n,m} \xi \right) \left(\frac{2c}{k_{n,m}^2} \sin \left(\beta_{n,m} (p - x) + \frac{\pi}{6} \right) + 2d \cos \beta_{n,m} (p - x) \right) + \right. \\
& \left. + \left(\left(\frac{2bc}{k_{n,m}^2} - \frac{2ad}{k_{n,m}^2} \right) \cos \beta_{n,m} p + 2bd \cos \left(\beta_{n,m} p + \frac{\pi}{3} \right) - \frac{2ac}{k_{n,m}^4} \sin \left(\beta_{n,m} p + \frac{\pi}{6} \right) \right) \sin \left(\beta_{n,m} (\xi - x) + \frac{\pi}{6} \right) \right) \Bigg], \\
G_{2n,m}(x, \xi) = & \frac{1}{3k_{n,m}^2 \bar{\Delta}} \left(\frac{a}{k_{n,m}^2} + b - 2e^{-\frac{3}{2} k_{n,m} \xi} \left(\frac{a}{k_{n,m}^2} \sin \left(\beta_{n,m} \xi + \frac{\pi}{6} \right) - b \cos \beta_{n,m} \xi \right) \right) \\
& \left[e^{k_{n,m} (\xi - x)} \left(\frac{c}{k_{n,m}^2} - d \right) - 2e^{k_{n,m} \left| \frac{1}{2} \xi - \frac{3}{2} p + \frac{1}{2} x \right|} \left(\frac{c}{k_{n,m}^2} \sin \left(\beta_{n,m} (p - x) + \frac{\pi}{6} \right) + d \cos \beta_{n,m} (p - x) \right) \right], \\
\bar{\Delta}(n, m) = & \left(\frac{a}{k_{n,m}^2} + b \right) \left(\frac{c}{k_{n,m}^2} - d \right) + e^{-\frac{3}{2} k_{n,m} p} \left\{ \left(\frac{2bc}{k_{n,m}^2} - \frac{2ad}{k_{n,m}^2} - \frac{ac}{k_{n,m}^4} + bd \right) \cos \beta_{n,m} p - \right. \\
& \left. - \sqrt{3} \left(\frac{ac}{k_{n,m}^4} + bd \right) \sin \beta_{n,m} p \right\}.
\end{aligned}$$

Тогда решение задачи B имеет вид

$$u(x, y, z) = \sum_{n,m=0}^{+\infty} \left(\rho_{n,m}(x) + \lambda_{n,m} \int_0^p G_{n,m}(x, \xi) g_{n,m}(\xi) d\xi \right) V_{n,m}(y, z). \quad (20)$$

Докажем абсолютную и равномерную сходимость ряда (20). Из (20) имеем оценку

$$|u(x, y, z)| \leq M \sum_{n,m=0}^{+\infty} (|U_{n,m}(x)| + |\rho_{n,m}(x)|).$$

$$G_{n,m}(x, \xi) = -\frac{1}{\lambda_{n,m}} G_{n,m,\xi\xi\xi}(x, \xi)$$

Теперь подставляя в (18) и интегрируя по

частям, имеем

$$U_{n,m}(x) = -g_{n,m}(x) + g_{n,m}(0)G_{2n,m\bar{z}}(x,0) - g_{n,m}(p)G_{1n,m\bar{z}}(x,p) + \\ + \int_0^p G_{n,m\bar{z}}(x,\xi)g'_{n,m}(\xi)d\xi.$$

Учитывая (15), (17) и

$$|G_{2n,m\bar{z}}(x,0)| \leq M, \quad |G_{1n,m\bar{z}}(x,p)| \leq M, \quad |G_{n,m\bar{z}}(x,\xi)| \leq M,$$

из функции Грина (19), получим оценки

$$|\rho_{n,m}(x)| \leq \frac{M}{n^3 m^3} (|\Psi_{1n,m}| + |\Psi_{2n,m}| + |\Psi_{3n,m}|), \\ |U_{n,m}(x)| \leq \frac{M}{n^3 m^3} \left(\sum_{i=1}^3 |\Psi_{in,m}| + |F_{n,m}(0)| + |F_{n,m}(p)| + |F_{n,m}(x)| + |F'_{n,m}(x)| \right).$$

Отсюда

$$|u(x,y,z)| \leq M \sum_{n,m=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3 m^3} \left(\sum_{i=1}^3 |\Psi_{in,m}| + |F_{n,m}(0)| + |F_{n,m}(p)| + |F_{n,m}(x)| + |F'_{n,m}(x)| \right) < \infty.$$

Отсюда следует, что ряд (20) сходится абсолютно и равномерно.

Теперь докажем, что частные производные ряда (20) входящие в уравнения (1), также сходятся абсолютно и равномерно в области $\bar{D}$. Для этого вычисляем частные производные ряда (20) по переменными y и z до второго порядка и учитывая оценку $u(x,y,z)$, получим

$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right| \leq M \sum_{n,m=1}^{+\infty} \frac{1}{nm^3} \left(\sum_{i=1}^3 |\Psi_{in,m}| + |F_{n,m}(0)| + |F_{n,m}(p)| + |F_{n,m}(x)| + |F'_{n,m}(x)| \right), \\ \left| \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right| \leq M \sum_{n,m=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3 m} \left(\sum_{i=1}^3 |\Psi_{in,m}| + |F_{n,m}(0)| + |F_{n,m}(p)| + |F_{n,m}(x)| + |F'_{n,m}(x)| \right).$$

Используя неравенства Коши- Буняковского и Бесселя, получим

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right| &\leq M \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{nm^3} \right)^2} \left(\sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty} |\Psi_{1n,m}|^2} + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty} |\Psi_{2n,m}|^2} + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty} |\Psi_{3n,m}|^2} + \right. \\
&+ \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty} |F_{n,m}(0)|^2} + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty} |F_{n,m}(p)|^2} + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty} |F_{n,m}(x)|^2} + \left. \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty} |F'_{n,m}(x)|^2} \right) \leq \\
&\leq \overline{M} \left(\sum_{i=1}^3 \left\| \frac{\partial^6 \psi_i(y,z)}{\partial y^3 \partial z^3} \right\|_{L_2(0 < y < q, 0 < z < r)} + \left\| \frac{\partial^4 f(0,y,z)}{\partial y^2 \partial z^2} \right\|_{L_2(0 < y < q, 0 < z < r)} + \right. \\
&+ \left\| \frac{\partial^4 f(p,y,z)}{\partial y^2 \partial z^2} \right\|_{L_2(0 < y < q, 0 < z < r)} + \left\| \frac{\partial^4 f(x,y,z)}{\partial y^2 \partial z^2} \right\|_{L_2(0 < y < q, 0 < z < r)} + \\
&\left. + \left\| \frac{\partial^5 f(x,y,z)}{\partial x \partial y^2 \partial z^2} \right\|_{L_2(0 < x < p, 0 < y < q, 0 < z < r)} \right) < \infty,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right| &\leq M \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^3 m} \right)^2} \left(\sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty} |\Psi_{1n,m}|^2} + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty} |\Psi_{2n,m}|^2} + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty} |\Psi_{3n,m}|^2} + \right. \\
&+ \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty} |F_{n,m}(0)|^2} + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty} |F_{n,m}(p)|^2} + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty} |F_{n,m}(x)|^2} + \left. \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty} |F'_{n,m}(x)|^2} \right) \leq \\
&\leq \overline{M} \left(\sum_{i=1}^3 \left\| \frac{\partial^6 \psi_i(y,z)}{\partial y^3 \partial z^3} \right\|_{L_2(0 < y < q, 0 < z < r)} + \left\| \frac{\partial^4 f(0,y,z)}{\partial y^2 \partial z^2} \right\|_{L_2(0 < y < q, 0 < z < r)} + \right. \\
&+ \left\| \frac{\partial^4 f(p,y,z)}{\partial y^2 \partial z^2} \right\|_{L_2(0 < y < q, 0 < z < r)} + \left\| \frac{\partial^4 f(x,y,z)}{\partial y^2 \partial z^2} \right\|_{L_2(0 < y < q, 0 < z < r)} + \\
&\left. + \left\| \frac{\partial^5 f(x,y,z)}{\partial x \partial y^2 \partial z^2} \right\|_{L_2(0 < x < p, 0 < y < q, 0 < z < r)} \right) < \infty,
\end{aligned}$$

так как

$$\begin{aligned}
\sum_{n,m=1}^{+\infty} |\Psi_{in,m}|^2 &\leq \left\| \frac{\partial^6 \psi_i(y,z)}{\partial y^3 \partial z^3} \right\|_{L_2(0 < y < q, 0 < z < r)}^2, \quad i = \overline{1,3}, \\
\sum_{n,m=1}^{+\infty} |F_{n,m}(x)|^2 &\leq \left\| \frac{\partial^4 f(x,y,z)}{\partial y^2 \partial z^2} \right\|_{L_2(0 < y < q, 0 < z < r)}^2, \\
\sum_{n,m=1}^{+\infty} |F'_{n,m}(x)|^2 &\leq \left\| \frac{\partial^5 f(x,y,z)}{\partial x \partial y^2 \partial z^2} \right\|_{L_2(0 < x < p, 0 < y < q, 0 < z < r)}^2, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}.
\end{aligned}$$

Следовательно, ряд, соответствующий функции $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ сходится абсолютно и равномерно. Абсолютная и равномерная сходимости третьей

производной по x ряда (20) следует из $\left| \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right| \leq \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right| + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right|$ и доказанного выше.

Теорема 2 доказана.

Заключение

В данной работе исследована вторая краевая задача для неоднородного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в трехмерном пространстве. Единственность решения была установлена с применением метода интегралов энергии. Существование решения доказано методом разделения переменных. Решение выписано через построенную функцию Грина. Найдены условия на заданные функции, обеспечивающие регулярность решения поставленной задачи. При обосновании равномерной сходимости установлено отличие от нуля «малого знаменателя».

Список литературы

1. Юлдашев Т.К. Обратная задача для одного интегро -дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных третьего порядка // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, - Самара, 2014. - № 1(34). - С.56-65.
2. Рыжов О.С. Асимптотическая картина обтекания тел вращения со звуковым потоком вязкого и теплопроводящего газа // Прикл. Матем. и механ., - Москва, 1965. - Т. 29. Вып. 6. - С. 1004-1014.
3. Диесперов В.Н. О функции Грина линеаризованного вязкого трансзвукового уравнения // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. - Москва, 1972. - Т. 12. - № 5. - С. 1265-1279.
4. Block H. Sur les equations lineaires aux derives parielles a carateristiques multiples // Ark. Mat. Astron. Fus. Note 1, - 1912, 7(13), - pp. 1-34; Note 2, 1912, ibid. 7(21),- pp. 1-30; Note 3, 1912 - 1913, ibid. 8(23). - pp. 1-51.

5. Del Vecchio E. Sulle equazioni $z_{xx} - z_y + \varphi_1(x, y) = 0$, $z_{xx} - z_{yy} + \varphi_2(x, y) = 0$
// Memorie R. Accad. Sci. Ser.2. - Torino, 1915, 66. - pp. 1-41.
6. Cattabriga L. Potenziali di linea e di dominio per equazioni non paraboliche in due variabili caratteristiche multiple // Rendiconti del seminario matematico della univ. di Padova. - 1961, 31. - pp. 1-45.
7. Джураев Т.Д, Апаков Ю.П. Об автомодельном решении одного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, - Самара, 2007. - № 2(15). - С.18-26.
8. Джураев Т.Д., Апаков Ю.П. К теории уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, содержащего вторую производную по времени // Украинский математический журнал. – Киев, 2010, том 62. № 1.- С. 40-51.
9. Апаков Ю.П., Жураев А.Х. Вторая краевая задача для уравнения третьего порядка с младшими членами // Узбекский математический журнал, 2011, № 4. –С. 84-87.
10. Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнений с частными производными высоких порядков // Матем. заметки, 2015, том 97, выпуск 2. -С. 262-276.
11. Сабитов К.Б. Начально-граничные задачи для уравнения колебаний прямоугольной пластины // Изв. вузов. Матем., 2021, №10. -С. 60-70.
12. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. – М.: Мир, 1985, 590 стр.
13. Сабитов К.Б., Зайнуллов А. Р. Обратные задачи для двумерного уравнения теплопроводности по отысканию правой части// Изв.вузов. Матем., 2021, №3. -С. 83–97.