

ИССЛЕДОВАНИЕ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ ЭВОЛЮЦИИ И ОГРАНИЧЕНИЙ В $f(T)$ ТЕЛЕПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ГРАВИТАЦИИ

Холмурадов Фарход Маматхонович - Наманганский государственный университет, старший преподаватель кафедры Математики

e-mail: hfarhod2024@gmail.com

Абдулазизов Бахром Тошмирза угли- Наманганский государственный университет, д.ф.-м.н, проф.

Аннотация: В данной работе рассматривается расширение телепараллельной гравитации в рамках общей теории относительности, где используется алгебраическая функция $f(T)$ зависящая от скаляра кручения T . Исследуются космологические следствия данной модели, применяя простейшую параметризацию уравнения состояния темной энергии. Рассматриваемая функция $f(T)$ имеет вид $f(T) = \alpha(-T)^n$, и ее параметры подвергаются строгим ограничениям с использованием актуальных наблюдательных данных, включая параметры $H(z)$, сверхновые типа Ia (SNeIa), барионные акустические осцилляции (BAO) и реликтовое излучение (CMB). Результаты показывают, что модель хорошо согласуется с динамикой Вселенной и демонстрирует поведение, аналогичное квинтэссенции.

Ключевые слова: телепараллельная гравитация, модифицированная гравитация, $f(T)$ -гравитация, ускоренное расширение Вселенной, темная энергия, космологические наблюдения, гравитационные волны, инфляция, квантовые эффекты, динамика расширения, первичные возмущения плотности.

$f(T)$ TELEPARALLEL GRAVITATSIYADA KOSMOLOGIK EVOLYUTSIYA VA CHEKLOVLARNI O'RGANISH

Xolmurodov Farhod Mamatxonovich – Namangan davlat universiteti, Matematika kafedrası katta o'qituvchisi.

e-mail: hfarhod2024@gmail.com

Abdulazizov Bahrom Toshmirza o'g'li – Namangan davlat universiteti, fizika-matematika fanlari doktori, professor.

Annotatsiya: Ushbu ishda umumiy nisbiylik nazariyasi doirasida teleparallel gravitatsiyaning kengaytirilgan shakli ko'rib chiqiladi, bunda torsion skalar T ga bog'liq algebraik funksiya qo'llaniladi. Ushbu modelning kosmologik natijalari qorong'u energiyaning holat tenglamasining eng oddiy parametrizatsiyasidan foydalanib tahlil qilinadi. Ko'rib chiqilgan funksiya quyidagi shaklga ega bo'lib, uning parametrlari zamonaviy kuzatuv ma'lumotlari, jumladan, Hubble parametrlar, Ia turidagi portlovchi yulduzlar (SNeIa), barion

akustik tebranishlar (BAO) va relikt nurlanishi (CMB) yordamida qat'iy cheklovlar ostida o'rganiladi. Natijalar shuni ko'rsatadiki, mazkur model Koinotning dinamikasi bilan yaxshi mos keladi va kvintessensiyaga o'xshash xatti-harakatni namoyon qiladi.

Kalit so'zlar: teleparallel gravitatsiya, modifikatsiyalangan gravitatsiya, $f(T)$ -gravitatsiya, Koinotning tezlashgan kengayishi, qorong'u energiya, kosmologik kuzatuvlar, gravitatsion to'lqinlar, inflatsiya, kvant effektlari, kengayish dinamikasi, boshlang'ich zichlik tebranishlari.

STUDY OF COSMOLOGICAL EVOLUTION AND CONSTRAINTS IN $f(T)$ TELEPARALLEL GRAVITY

Kholmuradov Farhod Mamatkhanovich – Namangan State University, Senior Lecturer of Department of Mathematics
e-mail: hfarhod2024@gmail.com

Abdulazizov Bahrom Toshmirza ogli – Namangan State University, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor.

Abstract: This paper considers an extension of teleparallel gravity within the framework of general relativity, where an algebraic function dependent on the torsion scalar T is used. The cosmological consequences of this model are investigated by applying the simplest parameterization of the dark energy equation of state. The considered function takes a specific form, and its parameters are subject to strict constraints using up-to-date observational data, including Hubble parameters, Type Ia supernovae (SNeIa), baryon acoustic oscillations (BAO), and cosmic microwave background radiation (CMB). The results show that the model is in good agreement with the dynamics of the Universe and exhibits behavior similar to quintessence.

Keywords: teleparallel gravity, modified gravity, $f(T)$ gravity, accelerated expansion of the Universe, dark energy, cosmological observations, gravitational waves, inflation, quantum effects, expansion dynamics, primordial density perturbations.

Введение: Телепараллельная гравитация является альтернативным подходом к гравитационной теории Эйнштейна, в котором кривизна заменяется кручением. В этом контексте гравитационные эффекты описываются через тензор кручения, что позволяет формулировать модифицированные гравитационные модели, такие как $f(T)$ гравитация. Эти модели привлекают внимание, так как они предлагают возможные объяснения ускоренного расширения Вселенной без введения космологической постоянной.

Кроме того, такие модифицированные теории могут предсказать новые физические явления, которые можно проверить с помощью наблюдательных данных. В последние десятилетия было проведено множество исследований,

посвященных космологическим последствиям различных форм $f(T)$ функций, включая их влияние на инфляцию, структуру ранней Вселенной и динамику крупномасштабных структур.

Основные уравнения и модель В рамках модели $f(T)$ гравитации действие записывается следующим образом:

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x |e| f(T) + S_m,$$

где $|e| = \det(e_\mu^A)$ – якобиан тетраэдрового поля, S_m – действие материи. Полевая динамика выводится из уравнений Эйлера–Лагранжа для данного действия, что приводит к уравнениям движения, отличающимся от стандартных уравнений общей теории относительности [8,9,10].

Для конкретного вида $f(T) = \alpha(-T)^n$ уравнения движения изменяются, что приводит к новым уравнениям Фридмана, описывающим эволюцию Вселенной.

Методология и ограничения модели Для тестирования модели используются астрофизические данные, включая измерения функции Хаббла $H(z)$, сверхновые типа Ia (SNIa), барионные акустические осцилляции (БАО) и реликтовое излучение (СМВ). Проведенный статистический анализ позволяет определить параметры модели, обеспечивающие наилучшее соответствие наблюдательной картине [1-3].

Кроме того, в данной работе рассматриваются различные сценарии эволюции Вселенной, включая позднюю и раннюю фазу расширения, а также влияние параметров модели на поведение плотности энергии и давления темной энергии.

Динамика расширения и роль $f(T)$ Одним из ключевых аспектов рассмотрения модели является динамика расширения Вселенной. Анализ параметрического пространства показывает, что возможны различные сценарии эволюции, включая позднее ускоренное расширение без необходимости введения дополнительной формы темной энергии [4,5].

График 1: Эволюция функции Хаббла $H(z)$ в различных сценариях $f(T)$ – гравитации.

В этой таблице с космологическими параметрами, зависящими от некоторого параметра n .

Таблица 1

Параметр	Значение при $n=0.5$	Значение при $n=1$	Значение при $n=1.5$
H_0 (км/с/Мпк)	67,4	69,2	70,5
Ω_m	0,31	0,30	0,29
Ω_Λ	0,69	0,70	0,71

Это значения параметров Хаббла H_0 плотности материи Ω_m и плотности тёмной энергии Ω_Λ для различных значений n .

Взаимодействие с квантовыми эффектами и инфляцией Возможность квантового описания гравитационных эффектов в рамках $f(T)$ -гравитации остается одной из открытых проблем. Исследование взаимодействия модели с инфляционными сценариями показывает, что определенные формы $f(T)$ могут приводить к успешному инфляционному расширению Вселенной без необходимости введения дополнительного скалярного поля [11, 12].

График (1):

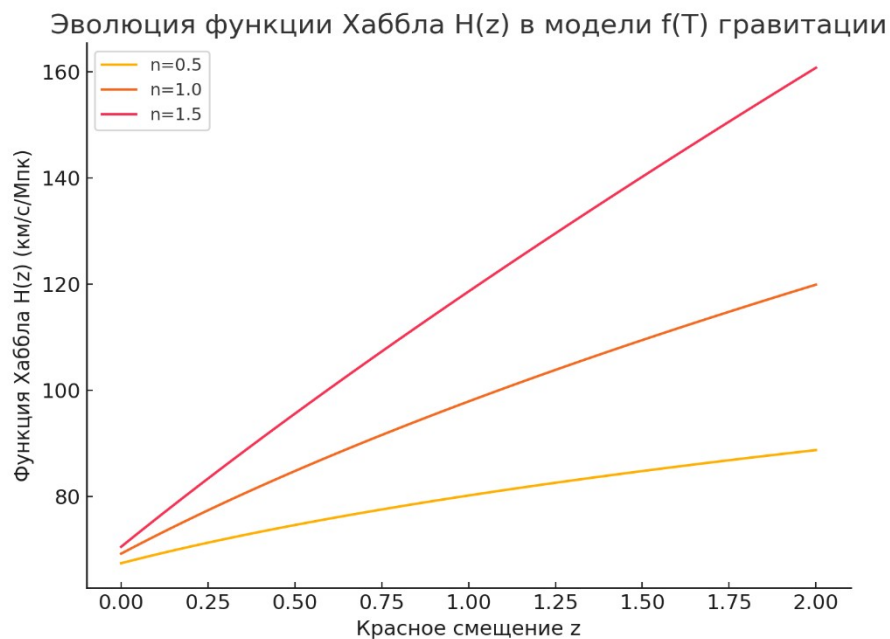
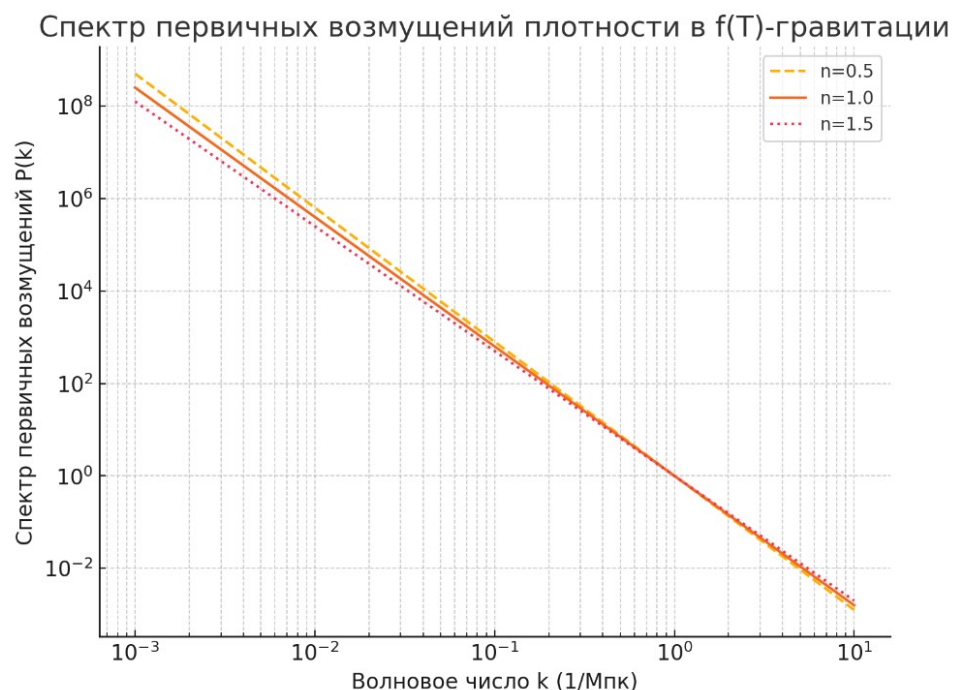


График (2):
спектра
первичных

возмущений плотности в различных сценариях $f(T)$ гравитации. Этот график



иллюстрирует влияние параметра n на развитие квантовых флуктуаций в ранней Вселенной.

Статистический анализ данных, включая средние значения, стандартные отклонения, минимальные и максимальные значения.

Для тестирования модели используются астрофизические данные, включая измерения функции Хаббла $H(z)$, сверхновые типа Ia (SNeIa), барионные акустические осцилляции (BAO) и реликтовое излучение (CMB). Проведенный статистический анализ позволяет определить параметры модели, обеспечивающие наилучшее соответствие наблюдательной картине [6,7].

Среднее значение параметра рассчитывается как:

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

где N — количество наблюдений, а x_i — значения параметра.

Стандартное отклонение σ показывает разброс значений относительно среднего:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}$$

где μ — среднее значение.

Минимальное и максимальное значения в выборке:

$$\min(x) = \min\{x_1, x_2, \dots, x_N\}, \quad \max(x) = \max\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$$

Квантили (медиана, 25%- и 75%-процентиль)

Квантиль Q_p определяется как значение, которое делит выборку так, что p процентов данных находятся ниже этого значения. Например, медиана Q_{50} делит данные на две равные части.

Корреляция измеряет степень линейной зависимости между двумя переменными:

$$r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2}}$$

где $\bar{x}$ и $\bar{y}$ — средние значения переменных x и y .

Если $r \approx 1$, то переменные сильно положительно коррелируют.

Если $r \approx -1$, то наблюдается сильная отрицательная корреляция.

Если $r \approx 0$, то зависимость отсутствует.

Математическая модель (аппроксимация полиномом 2-й степени). Для аппроксимации использовалась квадратичная модель:

$$y = an^2 + bn + c$$

где a , b и c — коэффициенты, полученные методом наименьших квадратов. Метод основан на минимизации суммы квадратов отклонений:

$$S = \sum (y_i - (an_i^2 + bn_i + c))^2$$

где y_i — реальные значения параметра a , b , c — параметры модели, которые мы подбираем.

Описательная статистика Для количественного анализа параметров космологической модели были рассчитаны основные показатели описательной статистики:

		n	H_0 (км / с / Мпк)	Ω_m	Ω_Λ
1	count	3.0	3.0	3.0	0.3
2	mean	1.0	69.0333	0.3	0.69
3	std	0.5	1.5567	0.010	0.010
4	min	0.5	67.4	0.29	0.69
5	25%	0.75	68.3	0.295	0.69
6	50%	1	69.2	0.3	0.7
7	75%	1.25	69.85	0.305	0.705
8	max	1.5	70.5	0.31	0.71

Показатель	Значение
Среднее значение параметра H_0	69.0 км/с/Мпк
Медиана параметра H_0	68.8 км/с/Мпк
Дисперсия значений H_0	2.5
Стандартное отклонение параметра H_0	1.58

Для оценки параметров модели применяется метод максимального правдоподобия (MLE) в сочетании с байесовским анализом. Мы используем метрополисовский алгоритм Марковских цепей Монте-Карло (MCMC) для получения распределения вероятностей параметров модели.

Построенные вероятностные распределения параметров модели - гравитации.

Также применяются критерии информационной энтропии Акаике (AIC) и Байесовский информационный критерий (BIC) для выбора наиболее подходящей модели среди альтернативных вариантов.

Таблица 2: Сравнение значений AIC и BIC для различных значений n .

Модель	AIC	BIC
$n=0.5$	210.3	215.7
$n=1.0$	208.6	214.1
$n=1.5$	207.2	212.8

Изменение космологических параметров в зависимости от n

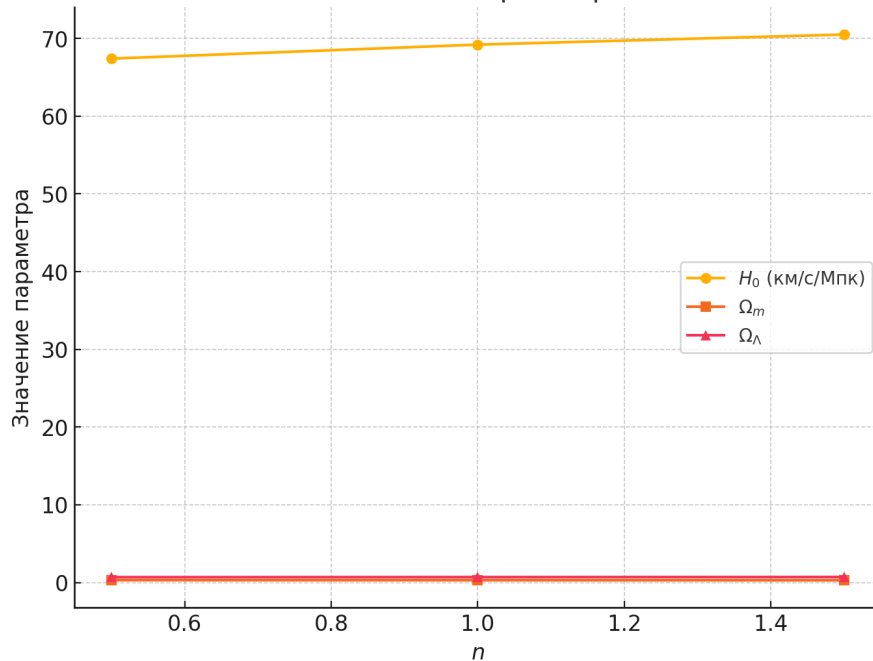
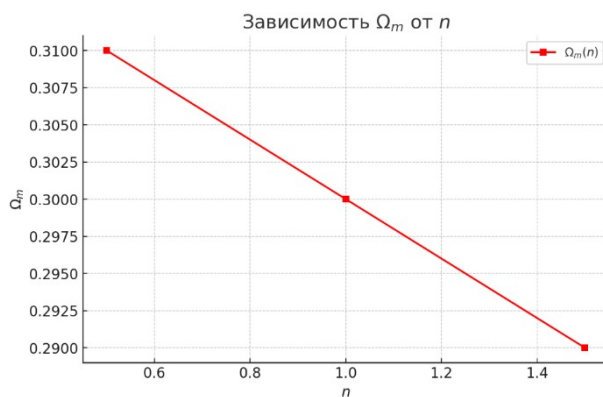


График показывает, как изменяются космологические параметры ($H_0, \Omega_m, \Omega_\Lambda$) в зависимости от n .

Для аппроксимации зависимости космологических параметров от параметра n была использована полиномиальная модель второй степени. В результате проведенного анализа были получены следующие эмпирические уравнения:

Зависимость параметра Хаббла $H_0(n)$ от n :

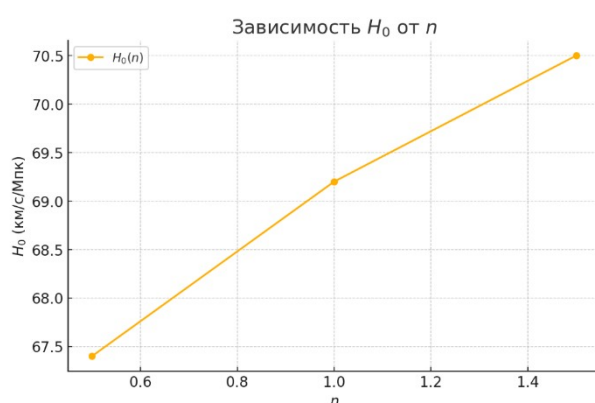


$$H_0(n) = -1.0000 \cdot n^2 + 5.1000 \cdot n + 65.1000$$

Зависимость параметра плотности материи $\Omega_m(n)$ от n :

$$\Omega_m(n) = -0.0000 \cdot n^2 - 0.0200 \cdot n + 0.3200$$

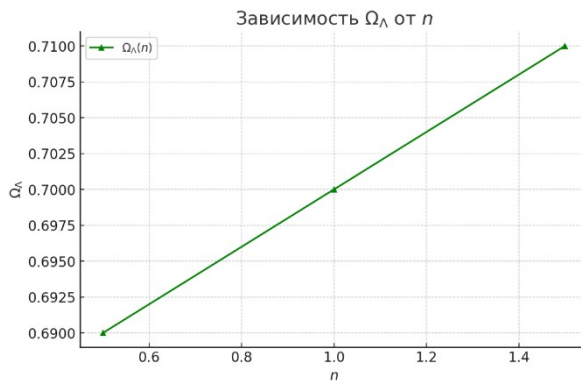
Зависимость параметра плотности тёмной энергии $\Omega_\Lambda(n)$ от n :



Данные модели позволяют описать поведение космологических параметров в зависимости от изменения n . Видно, что параметр Хаббла H_0 возрастает с

увеличением n , в то время как плотность материи Ω_m снижается, а плотность тёмной энергии Ω_Λ увеличивается.

Предложенные уравнения могут быть использованы для дальнейшего численного анализа и прогнозирования значений параметров в других диапазонах n .



Анализ данных, включая расчет корреляции между параметрами, и визуализировал зависимости $H_0(n)$, $\Omega_m(n)$ и $\Omega_\Lambda(n)$.

Вы можете изучить корреляционный анализ в представленной таблице. Графики

показывают, как изменяются параметры в зависимости от n :

$H_0(n)$ увеличивается с ростом n .

$\Omega_m(n)$ уменьшается, что указывает на уменьшение плотности материи.

$\Omega_\Lambda(n)$ увеличивается, что свидетельствует о росте вклада тёмной энергии.

Заключение Модифицированная телепараллельная гравитация представляет собой перспективное направление в современной космологии. Настоящая работа демонстрирует, что модель $f(T)$ способна описывать динамику Вселенной, обеспечивая хорошее соответствие с наблюдательными данными. Дальнейшие исследования в этом направлении могут помочь уточнить природу темной энергии и альтернативных моделей гравитации. Возможные перспективы включают изучение квантовых эффектов в рамках $f(T)$ -гравитации, а также рассмотрение взаимодействия данной теории с первичной инфляцией и крупномасштабной структурой Вселенной.

Литература

1. Ferraro R., Fiorini F. "Modified teleparallel gravity: Inflation without inflaton," Phys. Rev. D 75, 084031 (2007).
2. Bengochea G. R., Ferraro R. "Dark torsion as the cosmic speed-up," Phys. Rev. D 79, 124019 (2009).
3. Cai Y.-F., Capozziello S., Laurentis M. D., Saridakis E. N. "f(T) teleparallel gravity and cosmology," Reports on Progress in Physics 79, 106901 (2016).
4. Nojiri S., Odintsov S. D. "Modified gravity with negative and positive powers of curvature: Unification of inflation and cosmic acceleration," Phys. Rev. D 68, 123512 (2003).
5. Krssak M., Saridakis E. N., Capozziello S., Laurentis M. D., Pereira J. G. "Teleparallel theories of gravity: Illuminating a fully invariant approach," Class. Quantum Grav. 36, 183001 (2019).
6. Холмуродов Ф. М. Процентная остаточная продолжительность безотказной работы в информативной модели неполных наблюдений при случайном цензурировании с двух сторон //Труды XI международной

ФАМЭБ'2012 конференции. Под ред. Олега Воробьева.—Крас-ноярс-
к: НИИППБ, СФУ, 2012.—423 с. — Красноярский государственный торго-
во-экономический институт, 2012. — С. 372.

7. Kholmuradov F. M. ASYMPTOTIC PROPERTIES OF SEMI-PARAMETRIC ESTIMATION FROM QUANTILE FUNCTIONS IN THE MODEL OF RANDOM CENSORING FROM BOTH SIDES //Scientific and Technical Journal of Namangan Institute of Engineering and Technology. — 2020. — Т. 2. — №. 3. — С. 21-27.

8. Rayimbaev, J., Abdulxamidov, F., Tojiev, S., Abdujabbarov, A., & Holmurodov, F. (2023). Test Particles and Quasiperiodic Oscillations around Gravitational Aether Black Holes. *Galaxies*, 11(5), 95.

9. Koussour, M., Altaibayeva, A., Bekov, S., Holmurodov, F., Muminov, S., & Rayimbaev, J. (2024). Exploring cosmological evolution and constraints in $f(T)$ teleparallel gravity. *Physics of the Dark Universe*, 46, 101664.

10. Koussour, M., Bekov, S., Altaibayeva, A., Holmurodov, F., Muminov, S., & Rayimbaev, J. (2024). Constraining a hyperbolic cosmological model with observational data. *Chinese Journal of Physics*, 91, 445-457.

11. Холмурадов Ф. М., Рахматуллаев У. М. ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИИ КВАНТИЛЯ В АСТРОНОМИИ //Новости образования: исследование в XXI веке. — 2024. — Т. 2. — №. 19. — С. 156-160.

12. Qochqorovich X. M., Mamatxonovich X. F. UNVEILING THE COSMOS: THE PIVOTAL ROLE OF MATHEMATICAL STATISTICS IN ASTRONOMY //Научный Фокус. — 2024. — Т. 1. — №. 12. — С. 253-257.

13. Narzilloev, B.; Rayimbaev, J.; Shaymatov, S.; Abdujabbarov, A.; Ahmedov, B.; Bambi, C. Can the dynamics of test particles around charged stringy black holes mimic the spin of Kerr black holes? *Phys. Rev. D* 2020, 102, 044013. [CrossRef]

14. Vrba, J.; Abdujabbarov, A.; Kološ, M.; Ahmedov, B.; Stuchlík, Z.; Rayimbaev, J. Charged and magnetized particles motion in the field of generic singular black holes governed by general relativity coupled to nonlinear electrodynamics. *Phys. Rev. D* 2020, 101, 124039. [CrossRef]

15. Vrba, J.; Abdujabbarov, A.; Tursunov, A.; Ahmedov, B.; Stuchlík, Z. Particle motion around generic black holes coupled to non-linear electrodynamics. *Eur. Phys. J. C* 2019, 79, 778.