

**Qo'shaqov Xolmurodjon Shermamatovich**

Andijon davlat universiteti dotsenti.

Tel: +998916030010

Email: [xolmurodjonqoshaqov737@gmail.com](mailto:xolmurodjonqoshaqov737@gmail.com)

**Toxirjonova Shoxsanam Dilmurod qizi**

Andijon davlat universiteti talabasi

Tel: +998954878180

Email: [kobilovd139@gmail.com](mailto:kobilovd139@gmail.com)

## **KESIK KUBDA BITTA AKTIV IKKITA SUST QUVLOVCHI VA BIR QOCHUVCHINING DIFFERENSIAL O'YINI**

**Annotatsiya.** Ushbu ishda kesik kub qirralari bo'ylab harakatlanuvchi uch quvlovchi va bir qochuvchining quvlash differensial o'yinini o'rganilgan. Qochuvchining va bir quvlovchining maksimal tezligi  $\rho_1=1$  va  $\sigma=1$  ga, ikkinchi va uchinchi quvlovchining maksimal tezligi esa  $1/2 \leq \rho_{2,3} \leq 1$  ga teng. Agar biror quvlovchi va qochuvchining geometrik holatlari ustma-ust tushsa, qochuvchi tutilgan hisoblanadi. O'yinchilarning kesik kub qirralaridagi ixtiyoriy boshlang'ich holatlari uchun qochuvchini tutish mumkinligi isbotlangan. Bundan tashqari, quvlovchilar uchun tutish strategiyalari ham qurilgan.

**Kalit so'zlar:** Kesik kub, differensial o'yin, sust quvlovchi, qochuvchi, strategiya, boshlang'ich holat, geometrik holat.

**Кушакав Холмуроджон Шерматович**

Андижанский государственный университет доцент.

**Тохиржонова Шохсанам Дилмурод кизи**

Андижанский государственный университет студент

## **ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА ОДНОГО АКТИВНОГО, ДВУХ МЕДЛЕННЫХ ПРЕСЛЕДОВАТЕЛЕЙ И ОДНОГО УБЕГАЮЩЕГО НА УСЕЧЕННОМ КУБЕ**

**Аннотация.** В данной работе исследуется дифференциальная игра преследования на усеченном кубе, где три преследователя и один убегающий перемещаются по ребрам усеченного куба. Максимальные скорости убегающего и одного преследователя равны  $\rho_1=1$  и  $\sigma=1$ , а максимальные скорости второго и третьего преследователей составляют  $1/2 \leq \rho_{2,3} \leq 1$ .

Считается, что убегающий пойман, если геометрические положения какого-либо преследователя и убегающего совпадают. Доказано, что убегающего можно поймать для любых начальных положений игроков на ребрах усеченного куба. Кроме того, построены стратегии преследования для преследователей.

**Ключевые слова:** Усеченный куб, дифференциальная игра, медленный преследователь, убегающий, стратегия, начальное положение, геометрическое положение.

**Qo'shaqov Xolmurodjon Shermamatovich**  
Andijan State University ,Doctor of Philosophy (PhD)  
**Toxirjonova Shoxsanam Dilmurod qizi**  
Andijn State University Student

## **DIFFERENTIAL GAME OF ONE ACTIVE, TWO SLOW PURSUERS AND ONE EVADER ON A TRUNCATED CUBE**

**Abstract.** *This work investigates a pursuit differential game on a truncated cube, where three pursuers and one evader move along the edges of the truncated cube. The maximum speeds of the evader and one pursuer are  $\rho_1=1$  and  $\sigma=1$ , respectively, and the maximum speeds of the second and third pursuers are  $1/2 \leq \rho_{2,3} \leq 1$ . The evader is considered captured if the geometric positions of any pursuer and the evader coincide. It is proven that the evader can be captured for any initial positions of the players on the edges of the truncated cube. Furthermore, pursuit strategies for the pursuers are constructed.*

**Keywords:** *Truncated cube, differential game, slow pursuer, evader, strategy, initial position, geometric position.*

### **1. Kirish**

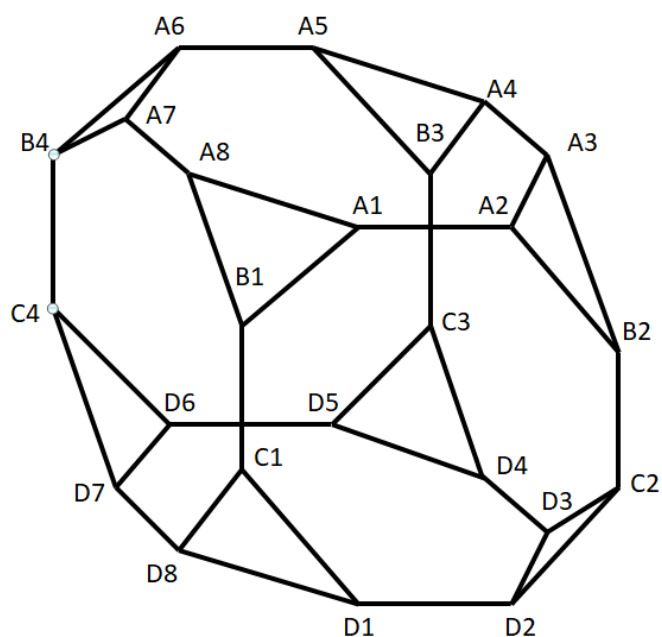
Differensial o'yin tushunchasi amerikalik matematik Rufus Isaacs tomonidan fanga kiritilgan. Uning "Differensial o'yinlar" nomli kitobida u birinchi bo'lib differensial o'yinlar tushunchasini kiritgan. Keyinchali boshqa matematiklar tomonidan differensial o'yinlarning bir nechta matematik asoslari ya'ni boshqacha

qilib aytganda matematik formarizatsiyasi yaratildi. Shulardan biri Lev Pontryagin tomonidan yaratildi.

Differensial o'yinlarning bir nechta formarizatsiyasi bor. Bulardan asosan ikkitasini aytib o'tishimiz mumkin. Shulardan biri Lev Pontryagin tomonidan taklif qilingan formarizatsiya. Differensial o'yinlarda "Trayektoriya qanday qaraladi?" "Trayektoriya deb nimaga aytiladi?", "Strategiya nima?" kabi savollarga javob berish kerak bo'ladi. Lev Pontryagin mana shu savollarga javob berib, trayektoriyani aniqlab differensial o'yinlarga formarizatsiya yaratgan. Lev Pontryagin formarizatsiga ko'ra, differensial o'yin ikkita nuqtai nazardan qaraladi: quvlovchi hamda qochuvchi. Bundan tashqari Lev Pontryagin nol cheksiz oraliqda qochib ketish masalari bo'yicha ham juda ulkan natijalar olgan. Lev Pontryagin quvlash masalari bo'yicha ikkita ulkan metod yaratdi.

Hozirgacha bu metodlar Pontryaginining birinchi metodi va Pontryaginining ikkinchi metodi deb yuritiladi. Differensial o'yinlarning ikkinchi formarizatsiyasi Nikolay Krasovskiiga tegishli. Krasovskiy ilmiy maktabinin matematiklari tomonidan Isaacs metodi to'la asoslandi va u yerda zarur va yetarli shartlar darajasiga ko'tarildi. Chunki Isaacs tenglamasi umuman olganda yechimga ega bo'lmasligi yoki bitta yechimga ega bo'lishi yoki cheksiz ko'p yechimga ega bo'lishi mumkin.

Endi jahon matematikasiga salmoqli hissa qo'shgan, differensial o'yinlar bo'yicha ulkan metodlar yaratgan matematiklarimi bilan tanishib chiqamiz. Shulardan biri No'mon Yunusovich Satimov. Satimov tomonidan differensial o'yinlar bo'yicha uchinchi metod yaratilgan. Bundan tashqari No'mon Yunusovich Satimov O'zbekistonga differensial o'yinlar sohasini birinchi



2.2.1-rasm. K kesik kub.

bo'lib olib kirgan matematik hisoblanadi. No'mon Yunusovich Satimov tomonidan nafaqat differensial o'yinlar sohasida balki matematikaning boshqa sohalarida ham chuqur natijalar olingan.

Jahon matematikasiga salmoqli hissa qo'shgan, differensial o'yinlar sohasida katta bir metod yaratgan navbatdagi matematigimiz O'zbekiston Fanlar Akademiyasi akademigi, fizika matematika fanlari doktori, O'zbekiston matematika jamiyatining raisi Abdulla Azamovdir. Bu matematik nafaqat differensial o'yinlar sohasida balki matematikaning barcha sohalarida ulkan natijalar olgan. Differensial o'yinlar sohasida katta bir metod yaratgan. Bu metod Azamovning to'rtinchi metodi deb yuritiladi.

Joriy ishda kesik kub  $K$  (2.3.1-rasm) qirralari bo'ylab quvlash differensial o'yinini o'rganiladi. Barcha o'yinchilar kesik kubning qirralari bo'ylab harakat qilishadi. Ixtiyoriy boshlang'ich holatdan o'yinni tugatish uchun quvlovchilarning tezliklariga shart olingan. Bundan tashqari, quvlovchilar uchun tutish strategiyalari ham qurilgan

## 2. Asosiy natija

Quyidagi

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= u_i, & x_i(0) &= x_{i0}, i=1, 2, 3 \\ \dot{y} &= v, & y(0) &= y_0, \end{aligned} \quad (1)$$

Tenglamalar bilan beriladigan uchta  $x_1, x_2, x_3$  quvlovchilar va bitta  $y$  qochuvchining differensial o'yinini qaraymiz, bunda  $x_{i0}, y_0 \in K$ ,  $x_{i0} \neq y_0$ ,  $i=1, 2, 3$ ;  $u_i$  –  $i$ -quvlovchining,  $v$  esa qochuvchining boshqaruv parametri. Barcha o'yinchilar kesik kub  $K$  ning qirralari bo'ylab harakatlanadi,  $x_1, x_2, x_3$  quvlovchilarning maksimal tezliklari, mos ravishda,  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  larga,  $y$  qochuvchining maksimal tezligi esa  $\sigma$  ga teng, ya'ni  $|u_i| \leq \rho_i$ ,  $i=1, 2, 3$ ,  $|v| \leq \sigma$ .

### 2.2.1-ta'rif. Agar ushbu

$$\dot{x}_i = u_i, x_i(0) = x_{i0},$$

Koshi masalasining  $x_i(\cdot)$  yechimi  $x_i(t) \in K$ ,  $t \geq 0$ , shartni qanoatlantirsa,  $u_i(\cdot)$ ,  $u_i: \mathbb{R} \rightarrow B(\rho_i)$ , funksiya  $x_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , quvlovchining joiz boshqaruvi deyiladi.

### 2.2.2-ta'rif. Agar ushbu

$$\dot{y}=v, y(0)=y_0,$$

Koshi masalasining  $y(\cdot)$  yechimi  $y(t) \in K, t \geq 0$ , shartni qanoatlantirsa,  $v(\cdot), v: \mathbb{R} \rightarrow B(\sigma)$  funksiya  $y$  qochuvchining joiz boshqaruvi deyiladi.

Biz quvlash differensial o'yinini qaraymiz. Bunday differensial o'yinlarda quvlovchilar biror strategiyalarni qo'llaydi, qochuvchi esa ixtiyoriy joiz boshqaruvni qo'llaydi. Endi quvlovchilarning strategiyalariga ta'rif beramiz.

**2.2.3-ta'rif.** Agar  $u_i = U_i(t, x_1, x_2, x_3, y, v), i=1, 2, 3$ , funksiyalar va qochuvchining ixtiyoriy  $v=v(t)$  joiz boshqaruvi uchun (1) Koshi masalasi yagona  $x_1(t), x_2(t), x_3(t), y(t) \in K, t \geq 0$ , yechimga ega bo'lsa,

$$(t, x_1, x_2, x_3, y, v) \rightarrow U_i(t, x_1, x_2, x_3, y, v), \quad i=1, 2, 3$$

funksiyalar mos ravishda  $x_i, i=1, 2, 3$ , quvlovchilarning strategiyalari deyiladi.

**2.2.4-ta'rif.** Agar o'yinchilarning ixtiyoriy boshlang'ich holatlari uchun quvlovchilarning shunday strategiyalari topilib, biror  $\tau \geq 0$  va  $i \in \{1, 2, 3\}$  da  $x_i(\tau) = y(\tau)$  bo'lsa, u holda quvlash tugadi yoki qochuvchi tutildi deb aytamiz.

Quvlovchilar mumkin qadar o'yinni tez tugallashga harakat qilishadi. Qochuvchi esa iloji boricha o'yinda quvlash tugashini kechiktirishga harakat qiladi.

Masala quvlovchilarga quvlashni tugatishni kafolatlaydigan strategiyalar qurishdan iborat.

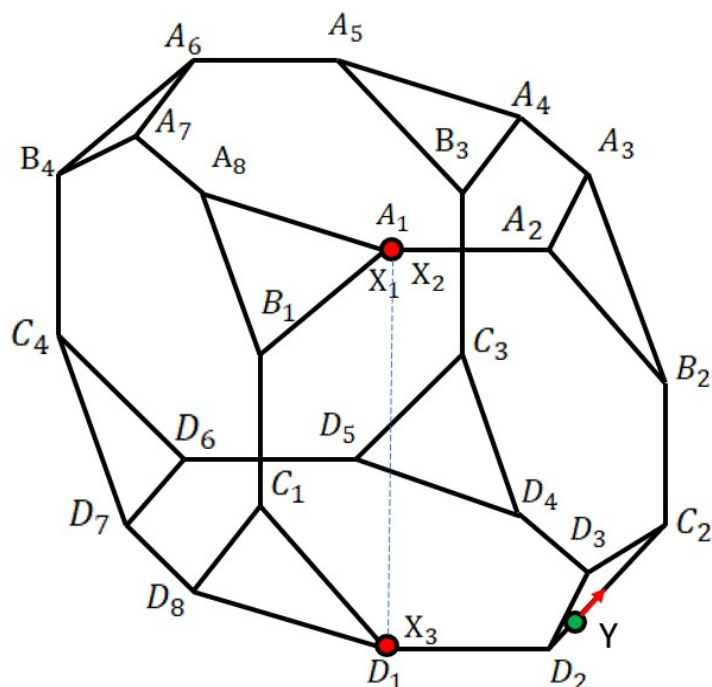
**2.2.1-teorema .** Agar  $\rho_1=1$  va  $1/2 \leq \rho_{2,3} \leq 1$  bo'lsa, u holda kesik tetraedr  $K$  ning qirralari ustida qaralayotgan o'yinda quvlashni tugatish mumkin.

**Isbot.** Quvlovchilar geometrik holatlarini  $X_1, X_2, X_3$  qochuvchi vaziyatini esa  $Y$  bilan belgilaylik. Teoremani isbotlash uchun  $X_1$  quvlovchining maksimal tezligi 1 ga  $X_2, X_3$  quvlovchilarning maksimal tezligi esa 1/2 teng bo'lgan holni qarashimiz yetarli.  $X_1$  va  $X_2$  quvlovchilar  $A_1$  uchda va  $X_3$  quvlovchi esa  $D_1$  uchda.

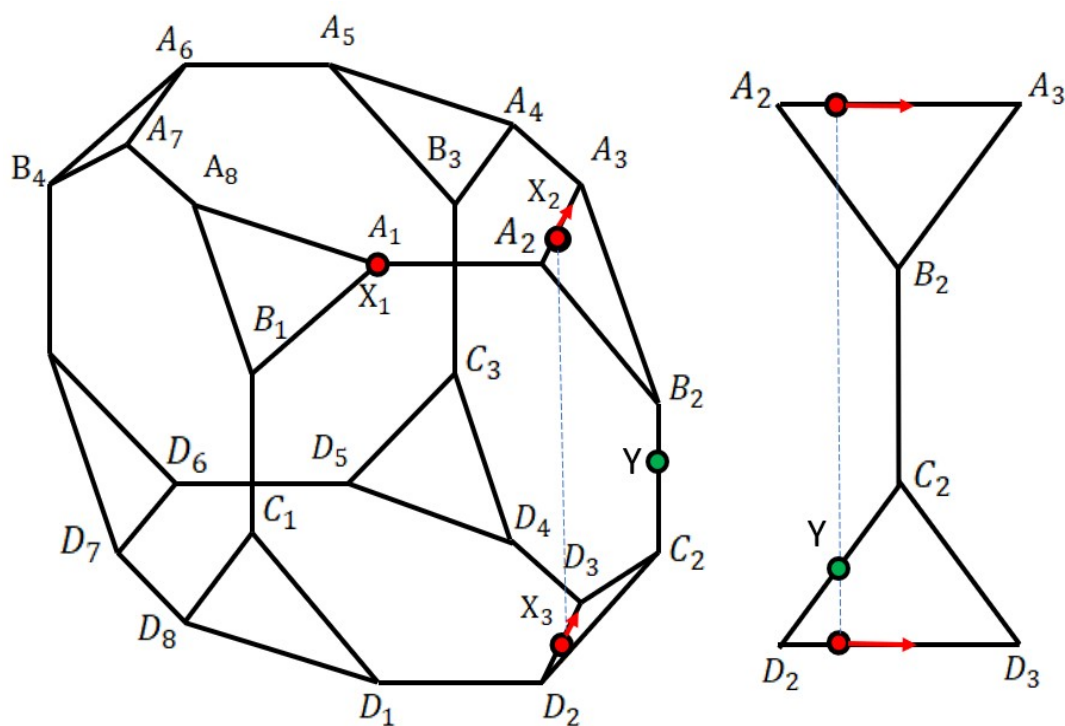
Endi quvlovchilarga qochuvchini tutish uchun strategiyalar quramiz. Dastlab  $X_2$  va  $X_3$  quvlovchilarga strategiya quramiz. Ular mos ravishda  $A_1 A_2 A_3 \dots A_8$  va  $D_1 D_2 D_3 \dots D_8$  sakkiz burchaklarda soat strelkasi yonalishiga qarama-qarshi va bir-biriga simmetrik va mos ravishda  $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow A_4 \rightarrow A_5 \rightarrow A_6 \rightarrow A_7 \rightarrow A_8 \rightarrow A_1$  va

$D_1 \rightarrow D_2 \rightarrow D_3 \rightarrow D_4 \rightarrow D_5 \rightarrow D_6 \rightarrow D_7 \rightarrow D_8 \rightarrow D_1$  kabi harakat qilsin. Ma'lumki  $X_3$  quvlovchi  $D_2D_3$  kesmada harakatlanayotganda  $X_2$  quvlovchi  $A_2A_3$  kesmada harakatlanadi.

Agar quvlovchilar bu kesmalarda harakatlanyotgan vaqtda  $Y$  qochuvchi  $D_2C_2$ ,  $D_3C_3$ ,  $C_2B_2$ ,  $B_2A_2$ ,  $B_2A_3$  [bundan buyog'iga bu kesmalardan tashkil topgan shaklini  $H\textcircled{1}$ ) deb belgilash kiritamiz va huddi shundek qolganlarini  $H\textcircled{2}$ )  $H\textcircled{3}$ ) va  $H\textcircled{4}$ ) kabi belgilaymiz] kesmalardan birida qolib ketsa ma'lumki  $X_2$  va  $X_3$  quvlovchilar biror vaqtda qochuvchini  $A_2A_3$  va  $D_2D_3$  kesmalardagi proyeksiyalarini tutadi va  $X_2=X_3=Y'$  tenglamaga asosan harakat qiladi va qochuvchini  $A_2, A_3$ ,  $D_2$  va  $D_3$  nuqtalarga keltirmaydi yoki kelsa tutadi. Ko'rinib turibdiki qochuvchi uchun boshqa yurgani yo'l qolmaydi va shu vaqtdan boshlab  $X_1$  qochuvchi tomon harakat qilib uni tutadi.



2.2.2-rasm.

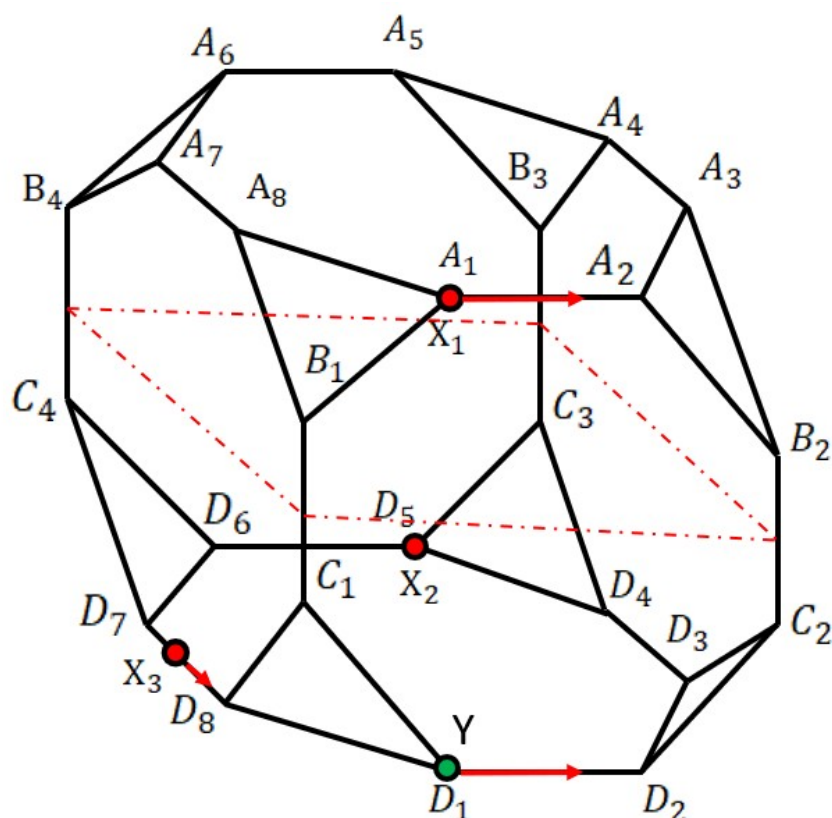


Xuddi shuningdek quvlovchilar mos ravishda  $A_4A_5$  va  $D_4D_5$ ,  $A_6A_7$  va  $D_6D_7$ ,  $A_8A_1$  va  $D_8D_1$  kesmalarda harakatlayotgan vaqtda yochuvchi mos ravishda  $H\curvearrowright$  va  $H\curvearrowright$  shakllarda qolib ketsa tutilishini ko'rsatish mumkin. Agar  $X_2$  va  $X_3$  quvlovchilar  $A_2A_3$  va  $D_2D_3$ ,  $A_4A_5$  va  $D_4D_5$ ,  $A_6A_7$  va  $D_6D_7$ ,  $A_8A_1$  va  $D_8D_1$  kesmalarda harakatlayotgan vaqtda yochuvchi mos ravishda  $H\curvearrowright$ ,  $H\curvearrowright$ ,  $H\curvearrowright$  va  $H\curvearrowright$  shakllarda qolib ketsamasa demak biror vaqtda  $D_1$  yoki  $A_1$  nuqtalarga kelishga majbur aks xolda  $X_2$  yoki  $X_3$  quvlovchilar tomonidan tutuladi. Ma'lumki  $A_1$  nuqta  $X_1$  quvlovchi tomonidan qo'riqlanayotgonli sababli qochuvchi  $D_1$  dan o'tishga majbur. Qochuvchi  $D_1$  nuqtaga kelgan vaqtda  $X_1$  quvlovchi  $C_1B_1$ ,  $C_2B_2$ ,  $C_3B_3$  va  $C_4B_4$  kesmalar o'rtasidan o'tuvchi tekislikka nisbatan qochuvchiga simmetrik harakat qilishni boshlaydi va qochuvchini shu tekislikka yaqinlashtirmaydi yoki tutadi. Shu vaqtdan boshlab  $X_2$  quvlovchi harakatini o'zgartiradi va  $D_5$  nuqtaga keladi va harakatlanmay turadi.  $X_3$  quvlovchi esa harakatini o'zgartirmay ya'ni saot strelkasiga qarama-qarshi ravishda harakat qiladi.

Ma'lumki,  $X_3$   
quvlovchi  $D_2D_3$ ,  $D_4D_5$ ,  
 $D_6D_7$  va  $D_8D_1$   
kesmalarda

harakatlanayotgan  
vaqtda qochuvchi  $H_1$   
(,  $H_2$ ),  $H_3$ ) va  $H_4$ )  
shakllarda qolib  
ketmasin aks holda  
tutiladi va  $D_5$   
nuqtadan o'tishga  
majbur bo'ladi va  $X_2$   
quvlovchi tomonidan  
tutiladi yoki  $X_3$  tutadi.

Demak o'yinni tugatish mumkin.



2.2.4-rasm

### 3. Xulosa

Kesik kub – Arximed jismlari turkumiga kiradi. Ushbu ish Arximed jismlari qirralari ustidagi differensial o'yinlarga bag'ishlangan ishdir. Maqolada qaralgan masalada bitta aktiv, ikkita sust quvlovchi va bitta qochuvchi ishtirokidagi differensial o'yin o'rganilgan. Agar biror quvlovchi va qochuvchining geometrik holatlari ustma-ust tushsa, qochuvchi tutilgan hisoblanadi. O'yinchilarning kesik kub qirralaridagi ixtiyoriy boshlang'ich holatlari uchun qochuvchini tutish mumkinligi isbotlangan. Bundan tashqari, quvlovchilar uchun tutish strategiyalari ham qurilgan.

### Adabiyotlar

1. Azamov A.A., Ibragimov G.I., Ibaydullaev T., Alias I.A. (2021) Optimal number of pursuers in the differential games on the 1-skeleton of orthoplex. Symmetry (Game Theoretical Symmetry Dynamic Processes). 10.3390/sym13112170.

2. Isaacs R. (1965). Differential games. John Wiley & Sons, New York, NY, USA.
3. Fleming W.H. (1961). The convergence problem for differential games. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. **3**, 102–116.
4. Satimov N.Y., Rikhsiev B.B. (2000). Methods of Solving of Evasion Problems in Mathematical Control Theory, Fan, Tashkent, Uzbekistan.
5. Chernous'ko F.L. (1976). A Problem of Evasion of Several Pursuers. *Prikl. Mat. Mekh.*, 40(1): 14–24.
6. Pshenichnii B.N. (1976). Simple pursuit by several objects. *Cybernetics and Systems Analysis*, 12(3):145–146.
7. Kumkov S.S., Le Ménec S., Patsko V.S. Zero-sum pursuit-evasion differential games with many objects: Survey of publications. *Dynamic games and applications*. 7: 609–633, Doi 10.1007/s13235-016-0209-z.
8. Ibragimov G.I., Salleh Y. (2012). Simple motion evasion differential game of many pursuers and one evader with integral constraints on control functions of players. *Journal of Applied Mathematics*, 2012, Article ID 748096, doi:10.1155/2012/748096.
9. Azamov A.A., Kuchkarov A.Sh., Holboyev A.G. (2019). The pursuit-evasion game on the 1-skeleton graph of the regular polyhedron. III. *Mat. Teor. IgrPril.*, 11:4 (2019), 5–23.
10. Ramana M.V., and Kothari M. (2017) Pursuit strategy to capture high-speed evaders using multiple pursuers. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 40(1): 139-149, <https://doi.org/10.2514/1.G000584>.
11. Sun W., Tsiotras P. (2014) An optimal evader strategy in a two-pursuer one-evader problem, *Proc. 53rd IEEE Conf. Decision and Control*, Los Angeles, CA, 4266–4271.
12. Ibragimov G.I. (2023). Evasion differential game of one evader and many slow pursuers. *Dynamic Games and Applications*. <https://doi.org/10.1007/s13235-023-00501-2>.

13. Garcia E., Casbeer D.W., Pachter M. (2020). Optimal strategies for a class of multi-player reach-avoid differential games in 3D space. IEEE Rob. Autom. Lett., 5, 4257–4264, <https://doi.org/10.1109/LRA.2020.2994023>

14. M. Muhammadjonova, R.Ortiqova. Ikki burchakli beshburchak prizma qirralarida ikki quvlovchi va bir qochuvchining differensial o'yini. Scientific Bulletin of NamSU. 2025-4-son. pp.37-43.

15. Ibragimov G.I., Xasanjonova N.U. (2023) Kesik tetraedrda ikki quvlovchi va bir qochuvchining differensial o'yini. Scientific Bulletin of NamSU. № 7: 28–36.

16. Qo'shaqov X.Sh., Muhammadjonova M.A., Maxammadzokirov Sh.Sh. (2024). Differential game of three pursuers and one evader on an Elongated Square Gyrobicupola. Scientific Bulletin. Physical and Mathematical Research Vol. 6 Iss. 1.

17. Qo'shaqov X.Sh., Maxammadzokirov Sh.Sh., Ortiqova R. (2024). Differential game of three pursuers and one evader on an elongated pentagonal pyramid. Scientific reports of Bukhara State University 2024/8 (113).